Časopis pro pěstování matematiky

Jürgen Tölke

Die Bedeutung der Fokalachsen für die symmetrische Rollung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 101 (1976), No. 1, 53--59

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108686`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1976

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

DIE BEDEUTUNG DER FOKALACHSEN FÜR DIE SYMMETRISCHE ROLLUNG*)

JÜRGEN TÖLKE, Stuttgart

(Eingegangen am 1. Juli 1974)

Nach R. BEREIS [1], O. BOTTEMA [4] und dem Verfasser [7, 8, 9] gelten für die ebene *symmetrische Rollung* eine ganze Reihe kennzeichnender Bedingungen. Sie resultieren aus Beziehungen der Krümmungskreise, der Schmiegparabeln, der Affinnormalen, der hyperoskulierenden Kegelschnitte und der fünfpunktig berührenden Kegelschnitte der Polbahnen im augenblicklichen Pol untereinander bzw. zum Wendekreis, zur Kreispunktkurve, zum Ballschen Punkt und zu den Burmester Punkten.

Von vorneherein haben wir somit eine enge Verbindung zu den (als symmetrisch nachzuweisenden) Polbahnen.

In der vorliegenden Note werden u. a. *Charakterisierungen der symmetrischen Rollung bewiesen, die sich nur auf die Kreispunktkurven* bzw. mittels deren abgeleiteter geometrisch-kinematischer Gebilde *stützen*, so dass wir uns von der engen Beziehung zu den Polbahnen lösen.

Von diesen Kennzeichnungen wollen wir folgende (Satz 3) hervorheben: *Die symmetrischen Rollungen sind dadurch charakterisiert, dass das Fokalzentrum die Ballsche Kurve beschreibt.*

1. Zwei euklidische Ebenen e, e' seien durch eine Bewegung $\beta(t) : e \mapsto e'$ aufeinander abgebildet. Die Bewegung $\beta(t)$ sei dadurch festgelegt, dass in $e(t)$ ein kartesisches Koordinatensystem $\{0(t); e_1(t), e_2(t)\}$ und in e' dessen Bild $\{0'; e_{1'}, e_{2'}\}$ gegeben ist.

Denken wir uns die beiden Ebenen zusammenfallend und fassen die Komponenten des Ortsvektors $\overrightarrow{O'X} := x' = x^{i'}e_{i'}$ bzw. $\overrightarrow{OX} := x = x^i e_i$ eines beliebigen Punktes X zur einspaltigen Matrix

$$\boldsymbol{x}' := \begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

*) Die Grundlagen zur vorliegenden Arbeit entstanden 1972 während meines Aufenthaltes an der Escola Politécnica da Universidade Federal de Paraiba, Campina Grande, Brasil.

zusammen, so lässt sich der *einparametrige Bewegungsvorgang* $\beta(t)$ bezüglich des *Rastsystems* $\{0'; e_{i'}\}$ durch die Matrixgleichung

$$(1) \qquad x' = C'(t)(x - c) \quad \text{mit} \quad C'(t) := \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$

darstellen, wobei $c := \overrightarrow{OO'}$ gesetzt wurde und $\theta(t)$ den von $e_1(t)$ und $e_{1'}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet[1]).

Nach [8] gilt die *Gangpolbahn* $\mathscr{P}$ das DGL-System

$$(2) \qquad \ddot{p} = \sigma\dot{p} - \frac{1}{1-m} B\dot{p},$$

wobei $\sigma = \sigma(t)$ eine „willkürliche" Funktion ist, m das Verhältnis der Krümmungen der Rast- und Gangpolbahn bezeichnet und für die infinitesimale Bewegungsmatrix $B(t)$

$$(3) \qquad B := C\dot{C}' = \dot{\theta}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad CC' := E = \text{Einheitsmatrix}$$

gesetzt wurde.

2. Für das folgende benötigen wir einige mit der Kreis- bzw. Mittelpunktkurve[2]) zusammenhängende Begriffsbildungen. Der Ort der momentanen Bahnscheitel — die *Kreispunktkurve* $\mathscr{K}_{1,2}(t, x)$ — hat die Gleichung (vgl. z. B. [9], S. 282)[3])

$$(1) \qquad K_{1,2} \equiv (\varrho - 1)\left\{[B(x-p), x-p] + \frac{3}{\varrho - 1}[\dot{p}, x-p]\right\}[B\dot{p}, x-p] + \\ + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)[B(x-p), x-p][\dot{p}, x-p] = 0,$$

wobei wir die Grundgleichung (1.2) berücksichtigt und abkürzend

$$\varrho := (m-1)^{-1}$$

gesetzt haben. Analog gilt für die Kreispunktkurve des zugehörigen inversen Bewegungsvorganges — die *Mittelpunktkurve* $\mathscr{M}_{1,2}(t, x)$ — die Darstellung

$$(2) \qquad M_{1,2} \equiv \{(\varrho + 2)[B(x-p), x-p] + 3[\dot{p}, x-p]\}[B\dot{p}, x-p] + \\ + \left(\sigma - \left(\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\right)[B(x-p), x-p][\dot{p}, x-p] = 0.$$

[1]) Natürlich setzen wir voraus, dass der Bewegungsvorgang hinreichend oft stetig differenzierbar ist.

[2]) In der technischen Literatur spricht man statt von der Kreis- bzw. Mittelpunkturve nach M. GRÜBLER von der *Kreisungs-* bzw. *Angelpunktkurve* [2].

[3]) Unter $[a, b]$ verstehen wir die Determinante der Spaltenvektoren a, b.

Diese Kurven sind vielfach untersuchte „*Fokalkurven*" mit jeweils einem Doppelpunkt. Wir setzen im folgenden voraus, dass die Kreispunktkurven im betrachteten Parameterintervall *nicht zerfallen*[4]).

Bei ihrer Erzeugung spielen die *Fokalachsen* bzw. *Fokalzentren* eine entscheidende Rolle. Mit [3], S. 42 entnimmt man den Formeln (1) und (2) für die Fokalachse $\mathscr{F}_1$ bzw. $\mathscr{F}_1^*$ des Bewegungsvorganges bzw. des zugehörigen inversen Bewegungsvorganges die Darstellung

$$\mathscr{F}_1 : (\varrho - 1)\,[B\dot{p}, x - p] + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)[\dot{p}, x - p] = 0 \tag{3}$$

bzw.

$$\mathscr{F}_1^* : (\varrho + 2)\,[B\dot{p}, x - p] + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)[\dot{p}, x - p] = 0\,.$$

Analog bestimmen sich die Fokalzentren F_1 bzw. F_1^* zu

$$f_1 = p - \frac{3}{2}\left\{(\varrho - 1)^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right\}^{-1}\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\dot{p} - (\varrho - 1)\,B\dot{p}\Bigg\} \tag{4}$$

bzw.

$$f_1^* = p - \frac{3}{2}\left\{(\varrho + 2)^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right\}^{-1}\left\{\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\dot{p} - (\varrho + 2)\,B\dot{p}\Bigg\}\,. \tag{4'}$$

Im weiteren benötigen wir eine berühmte *Erzeugungsweise der* (nicht zerfallenden) *Kreispunktkurve* $\mathscr{K}_{1,2}(t, x)$. Man betrachtet hierzu die Bahntangenten der Punkte von $\mathscr{K}_{1,2}(t, x)$ (für ein festes t) und frägt nach deren Evolute $\mathscr{E}_p$. Sie ist eine Parabel. Im lokalen (affinen) Koordinatensystem

$$y = p + y_1\dot{p} + y_2 B\dot{p} \tag{5}$$

gilt für die Parabel $\mathscr{E}_p$ die Darstellung (vgl. [6], S. 64)

$$\mathscr{E}_p : \left\{3 + (\varrho - 1)\,\dot{\theta}^2 y_2 - \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) y_1\right\}^2 = 4\dot{\theta}^2(1 - \varrho)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) y_1 y_2\,. \tag{6}$$

Die Kreispunktkurve selbst ist dann bekanntlich *Fusspunktkurve* der Parabel $\mathscr{E}_p$ zum Pol P.

3. Unter einer ebenen *symmetrischen Rollung* versteht man einen einparametrigen Bewegungsvorgang, bei dem die Krümmungen der Gang- und Rastpolbahn ständig entgegengesetzt gleiche Werte annehmen. Diese im Anschluss an R. Bereis [1] von O. Bottema [4] und dem Verf. [7, 8, 9] genauer untersuchten Bewegungsvorgänge gestatten eine sinnvolle *Verallgemeinerung*: Man spricht nach [8] von einem

[4]) Zerfallsbedingungen werden z. B. in [6], S. 103f. und [2], S. 124f. untersucht.

$S^{(m)}$-*Bewegungsvorgang*, wenn das Verhältnis der Krümmungen der Rast- und Gangpolbahn auf dem betrachteten Parameterintervall konstant $(= m \neq 1)$ ist.

In der kinematischen Abbildung von W. BLASCHKE und J. GRÜNWALD [3, 5] *bedeutet dies, dass die Quasiwindung der Bildkurve des Bewegungsvorganges* im quasielliptischen Parameterraum *konstant* $(= (1 + m)/(1 - m))$ *ist.*

Die symmetrischen Rollungen sind somit $S^{(-1)}$-Bewegungsvorgänge, während nach [8] die *Trochoidenbewegungen* unter den $S^{(m)}$-Bewegungsvorgängen durch

$$(1) \qquad \sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = 0$$

gekennzeichnet sind.

Diese $S^{(m)}$-Bewegungsvorgänge gestatten eine einfache Charakterisierung. Dazu bestimmen wir uns das Doppelverhältnis D, das die Fokalachsen mit den Doppelpunktstangenten $d_1([\dot{p}, x - p] = o)$ und $d_2([B\dot{p}, x - p] = o)$ der Kreispunktkurve bilden. Mit (2.3) findet man sofort

$$(2) \qquad D := DV(d_1, d_2; \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_1^*) = \frac{2 - m}{2m - 1}.$$

Somit hängt das Verhältnis der Krümmungen der Gang- und Rastpolbahnen mit dem Doppelverhältnis D durch eine *projektive Transformation* zusammen. Insbesondere haben wir damit in Ergänzung zu den in [8] gegebenen Untersuchungen den

Satz 1. *Unter den Bewegungsvorgängen, für die die Kreispunktkurven nicht zerfallen, sind die* $S^{(m)}$*-Bewegungsvorgänge dadurch charakterisiert, dass die Fokalalchsen mit den Doppelpunktstangenten der Kreispunktkurven stets ein konstantes Doppelverhältnis bilden.*

4. Obiger Satz erhellt bereits die Bedeutung der Fokalachsen für die symmetrische Rollung. Zunächst ergibt sich das

Korollar. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen dadurch gekennzeichnet, dass die Fokalachsen von den Doppelpunktstangenten der Kreispunktkurve stets harmonisch getrennt werden.*

Nach einem in [3] (S. 42) gezeigten Sachverhalt liegt das Fokalzentrum F_1 somit für symmetrische Rollungen auf der Fokalachse $\mathscr{F}_1^*$ des inversen Bewegungsvorganges. Ist dies kennzeichnend? Mit (2.3) und (2.4) folgt, dass F_1 genau dann mit $\mathscr{F}_1^*$ inzidiert, wenn

$$(1) \qquad (2\varrho + 1)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) = \dot{0}.$$

Für Bewegungsvorgänge mit (3.1) zerfallen die Kreispunktkurven. Übrigens entspricht diesen Bewegungsvorgängen in der kinematischen Abbildung ein *windschiefer Kreis*. Also gilt

Satz 2. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallender Kreispunktkurve sind die symmetrischen Rollungen dadurch charakterisiert, dass das Fokalzentrum stets auf der Fokalachse des zugehörigen inversen Bewegungsvorganges liegt.*

Diese Aussage lässt sich – auch hinsichtlich *praktischer Anwendungen* – noch wesentlich verschärfen! Nach [8] gilt nämlich für die Gleichung des *Wendekreises*

$$[B(x - p), x - p] - [\dot{p}, x - p] = 0\,, \tag{2}$$

so dass *das Fokalzentrum genau dann auf dem Wendekreis liegt, wenn es sich um eine symmetrische Rollung handelt.* In Verbindung mit Satz 2 haben wir somit den bemerkenswerten

Satz 3. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen dadurch gekennzeichnet, dass das Fokalzentrum die Ballsche Kurve beschreibt.*

Den Gleichungen (2.1) und (2.2) entnimmt man ferner den

Satz 4. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen dadurch charakterisiert, dass die Mittelpunktkurve und die Kreispunktkurve beständig zur Polbahntangente spiegelsymmetrisch sind.*

Etwas stärkere Aussagen lassen sich über die Fokalzentren gewinnen! Für den Verbindungsvektor der beiden Fokalzentren gilt mit (2.4) und (2.4′)

$$f_1^* - f_1 = \tfrac{9}{2}(2\varrho + 1)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\dot{\theta}^2 \left\{\left[(\varrho - 1)^2\,\dot{\theta}^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right]\left[(\varrho + 2)^2\,\dot{\theta}^2 + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)^2\right]\right\}\dot{p}$$

mod $B\dot{p}$ und somit wegen (2.4), (2.4′) der

Satz 5. *Unter den Bewegungsvorgängen mit nicht zerfallenden Kreispunktkurven sind die symmetrischen Rollungen durch beständig zur Polbahntangente symmetrisch gelegene Fokalzentren gekennzeichnet.*

Man wird sich fragen, ob die *Affinnormale der Gangpolbahn*

$$\left[\left\{\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) - \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\right\}\dot{p} + 3\varrho B\dot{p},\, y - p\right] = 0$$

für spezielle Bewegungsvorgänge stets mit der Fokalachse zusammenfallen kann. Mit (2.3) ergibt sich die dafür notwendige und hinreichende Bedingung zu

$$(2\varrho + 1)\left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right) = (1 - \varrho)\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \tag{3}$$

und hiermit insbesondere folgender auch *konstruktiv verwertbarer* Sachverhalt:

Satz 6. *Unter den $S^{(m)}$-Bewegungsvorgägen mit nicht zerfallender Kreispunktkurve sind die symmetrischen Rollungen dadurch charakterisiert, dass die Fokalachse die Affinnormale der Gangpolbahn ist.*

Die Gleichung (3) liefert noch mehr! Nach (2.6) hat die Parabel $\mathscr{E}_p$ die Achsenrichtung

$$(1 - \varrho)\dot{\theta}^2\dot{\boldsymbol{p}} + \left(\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)B\dot{\boldsymbol{p}}\ .$$

Somit ergibt sich der

Satz 7. *Die Affinnormale der Gangpolbahn fällt genau dann mit der Fokalachse zusammen, wenn sie zur Achse der von den Bahntangenten der Kreispunktkurve eingehüllten Parabel orthogonal ist.*

Da für den *Brennpunkt B_p der Parabel $\mathscr{E}_p$* gemäss (2.4) und (2.6) die Darstellung

$$\boldsymbol{b}_p = 3\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{f}_1 \tag{4}$$

gilt, haben wir noch den

Satz 8. *Die symmetrischen Rollungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Fokalachse des zugehörigen inversen Bewegungsvorgages stets durch den Brennpunkt derjenigen Parabel geht, in bezug auf welche die Kreispunktkurve Fusspunktkurve zum Momentanpol ist.*

Bemerkung. Nach Satz 3 und dem in [7] (S. 323, Korollar) bewiesenen Sachverhalt verdienen unter den *symmetrischen Rollungen* jene besondere Aufmerksamkeit, *für welche die Schmiegparabel der Gangpolbahn mit der von den Bahntangenten der Kreispunktkurve eingehüllten Parabel kongruent ist.* Man findet für diese symmetrische Rollungen

$$\sigma - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = \pm\frac{3}{4}\ . \tag{5}$$

Hiermit lässt sich (1.2) integrieren. Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Bereis:* Symmetrische Rollung, Österr. Ing.-Arch. *7* (1953), 243—246.
[2] *R. Beyer:* Kinematische Getriebelehre, Berlin 1953.
[3] *W. Blaschke* u. *H. R. Müller:* Ebene Kinematik, München 1956.
[4] *O. Bottema:* Characteristic properties of the symmetric plane motion, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. *75* (1972), 145—151.
[5] *J. Grünwald:* Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Sb. Ak. Wiss. Wien (math.-nat. Kl) *80* (1911), 677—741.
[6] *M. Krause:* Analysis der ebenen Bewegung, Leipzig 1920.
[7] *J. Tölke:* Symmetrische Rollung bei den nicht parabolischen M-Affinitätsvorgängen, Arch. Math. *21* (1970), 317—325.
[8] *J. Tölke:* Spezielle Bewegungsvorgänge I, Arch. Math. 21 (1970), 429—436.
[9] *J. Tölke:* Kennzeichnungen der symmetrischen Rollung höherer Ordnung, Mech. Mach. Theory *7* (1972), 277—290.

Anschrift des Verfassers: Universität, D-7 Stuttgart - 80, Pfaffenwaldring 57, BRD.