Časopis pro pěstování matematiky

Luděk Granát

Metrische Eigenschaften der einparametrigen Systeme von linearen Räumen der Dimension k im Euklidischen Raume E_n

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 1, 32--46

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108668`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

METRISCHE EIGENSCHAFTEN DER EINPARAMETRIGEN SYSTEME VON LINEAREN RÄUMEN DER DIMENSION k IM EUKLIDISCHEN RAUME E_n

LUDĚK GRANÁT, Praha

(Eingegangen am 3. August 1966)

Der Zweck dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung einiger Resultate aus den Arbeiten [4] und [2], in denen die Voraussetzung $n = 2k + 1$ gemacht wurde.

1. Es sei im Euklidischen Raume $\boldsymbol{E}_n$ ein einparametriges System der k-dimensionalen Räume ($k \leqq \frac{1}{2}n$)

(1) $$\boldsymbol{B}_k(t) = [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)], \quad \boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{u}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$ [1])

gegeben. Dieses System werden wir das Monosystem nennen. Es gelte weiter die Beziehung

(2) $$\operatorname{Rang}[\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{u}'_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}'_k(t), \ldots, \boldsymbol{u}_1^{(m)}(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k^{(m)}(t)] = (m+1)k,$$

wo m eine solche größte ganze Zahl ist, daß $(m + 1)\, k \leqq n$ ist und $\boldsymbol{u}'_\alpha(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k^{(m)}(t)$ die Ableitungen erster bis m-ter Ordnung nach t sind. Nur mit solchen Monosystemen werden wir uns in dieser Arbeit befassen. Unsere Hauptaufgabe wird es sein, ein passendes, mit dem gegebenen Monosystem verbundenes, bewegliches Bezugssystem im $\boldsymbol{E}_n$ zu finden. Es sei der Scheitel des Bezugssystems im Punkt $A(t)$ und es sollen die ersten k Kanten des Bezugssystems mit den Vektoren $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_k(t)$, die den Raum $\boldsymbol{B}_k(t)$ bestimmen, zusammenfallen.

Unsere Betrachtungen gelten immer für ein bestimmtes t eines Intervalls Ω. Weiter werden wir t nicht mehr besonders bezeichnen, soweit es nicht gebraucht wird.

Für das gesuchte Bezugssystem $\{A, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ sollen weiter die Beziehungen

(3) $$\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

gelten.

[1]) Die Indizes α, β, γ sollen immer die Werte $1, 2, \ldots, k$ durchlaufen, wenn nichts anderes gesagt wird.

Für die Ableitungen der Vektoren $\boldsymbol{u}_i$ gilt dann

$$\boldsymbol{u}'_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\boldsymbol{u}_j\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Aus der Beziehung (3) folgt

$$\boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{u}_i = 0\,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}''_i\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{u}'_i = 0\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}'_j = 0\,, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}''_i\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}''_j + 2\boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{u}'_j = 0\,. \tag{7}$$

Aus den Skalarprodukten $\boldsymbol{u}'_i\boldsymbol{u}_j = \omega_{ij}$, $\boldsymbol{u}'_j\boldsymbol{u}_i = \omega_{ji}$ und aus (6) folgt

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0\,, \tag{8}$$

d.h., daß die Matrix $\|\omega_{ij}\|$ schiefsymmetrisch ist.

Betrachten wir die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k, \ldots, \boldsymbol{u}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{u}_k^{(i)}$, wo $i \leqq m$ ist; alle mit dem Anfangspunkt A. Diese Vektoren bestimmen einen $(i + 1)\,k$-dimensionalen Raum, den wir $\boldsymbol{B}_{(i+1)k}$ bezeichnen. Dieser Raum hängt von der Auswahl des Bezugssystems im $\boldsymbol{B}_k$ nicht ab. Den k-dimensionalen Raum, der im $\boldsymbol{B}_{(i+1)k}$ zu $\boldsymbol{B}_{ik}$ total senkrecht ist, bezeichnen wir $\boldsymbol{B}_k^{(i)}$. $\boldsymbol{B}_k$ bezeichnen wir auch $\boldsymbol{B}_k^{(0)}$. Den zum Raume $\boldsymbol{B}_{(m+1)k}$ im $\boldsymbol{E}_n$ total senkrechten Raum bezeichnen wir $\boldsymbol{C}_{n-(m+1)k}$. In jedem der Räume $\boldsymbol{B}_k^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ wählen wie ein Orthonormalbezugssystem und seine Vektoren bezeichnen wir $\boldsymbol{u}_{ik+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{(i+1)k}$. Ähnlich wählen wir im $\boldsymbol{C}_{n-(m+1)k}$, wenn $n > (m + 1)\,k$ ist, die Vektoren eines Orthonormalbezugssystems $\boldsymbol{u}_{(m+1)k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Da alle Vektoren $\boldsymbol{u}'_\alpha$ im Raume $\boldsymbol{B}_{2k}$ liegen, kann man

$$\boldsymbol{u}'_\alpha = \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\boldsymbol{u}_\gamma + \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}\boldsymbol{u}_{k+\gamma}\,, \quad \omega_{\alpha\gamma} = -\omega_{\gamma\alpha} \tag{9}$$

schreiben.

Aus den Beziehungen

$$\boldsymbol{u}''_\alpha = \sum_\gamma \omega'_{\alpha\gamma}\boldsymbol{u}_\gamma + \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\Big(\sum_\beta \omega_{\gamma\beta}\boldsymbol{u}_\beta + \sum_\beta c_{\gamma\beta}\boldsymbol{u}_{k+\beta}\Big) + \sum_\gamma c'_{\alpha\gamma}\boldsymbol{u}_{k+\gamma} + \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}\boldsymbol{u}'_{k+\gamma}$$

folgt, daß die Vektoren $\boldsymbol{u}'_{k+\gamma}$ im Raume $\boldsymbol{B}_{3k}$ liegen und wir dürfen mit Anbetracht der Relation (8) die Beziehung

$$\boldsymbol{u}'_{k+\alpha} = -\sum_\gamma c_{\gamma\alpha}\boldsymbol{u}_\gamma + \sum_\gamma \omega_{k+\alpha,k+\gamma}\boldsymbol{u}_{k+\gamma} + \sum_\gamma c_{k+\alpha,k+\gamma}\boldsymbol{u}_{2k+\gamma}\,, \tag{10}$$

wo $\omega_{k+\alpha,k+\gamma} = -\omega_{k+\gamma,k+\alpha}$ ist, schreiben.

Weiter können wir auf ähnliche Weise fortfahren. Durch die weitere Ableitung kommen wir zu dem Resultat, daß der Vektor $u_\alpha^{(j+1)}$ $(0 < j < m)$ eine Linearkombination der Vektoren des Raumes $B_{(j+1)k}$ und der Vektoren $u'_{jk+\gamma}$ ist. In Anbetracht dieser Beziehungen und der Relation (8), können wir das ganze System der Ableitungen der Vektoren des beweglichen Bezugssystems des Monosystems V_{k+1} ausdrücken:

(11)
$$\begin{aligned}
u'_\alpha &= \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} u_\gamma + \sum_\gamma c_{\alpha\gamma} u_{k+\gamma}\,,\\
u'_{k+\alpha} &= -\sum_\gamma c_{\gamma\alpha} u_\gamma + \sum_\gamma \omega_{k+\alpha,k+\gamma} u_{k+\gamma} + \sum_\gamma c_{k+\alpha,k+\gamma} u_{2k+\gamma}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u'_{(m-1)k+\alpha} &= -\sum_\gamma c_{(m-2)k+\gamma,(m-2)k+\alpha} u_{(m-2)k+\gamma} +\\
&\quad + \sum_\gamma \omega_{(m-1)k+\alpha,(m-1)k+\gamma} u_{(m-1)k+\gamma} +\\
&\quad + \sum_\gamma c_{(m-1)k+\alpha,(m-1)k+\gamma} u_{mk+\gamma}\,,\\
u'_{mk+\alpha} &= -\sum_\gamma c_{(m-1)k+\gamma,(m-1)k+\alpha} u_{(m-1)k+\gamma} +\\
&\quad + \sum_\gamma \omega_{mk+\alpha,mk+\gamma} u_{mk+\gamma} + \sum_{i=1}^{n-(m+1)k} s_{\alpha,i} u_{(m+1)k+i}\,,\\
u'_{(m+1)k+i} &= -\sum_\gamma s_{\gamma,i} u_{mk+\gamma} + \sum_{j=(m+1)k+1}^{n} \omega_{(m+1)k+i,j} u_j\,,
\end{aligned}$$
$$i = 1, \ldots, n - (m+1)\,k\,, \quad \omega_{r,s} = -\omega_{s,r}\,, \quad r, s = 1, \ldots, n\,.$$

2. Betrachten wir die Räume $B_k^{(0)}(t)$ und $B_k^{(0)}(t+h)$. Diese Räume schließen k Winkel φ_α[2]), für welche $\cos^2 \varphi_\alpha = \lambda_\alpha$ gilt, wo λ_α die Wurzel des charakteristischen Polynoms der quadratischen Matrix $A_k A'_k$ $(A_k = \|u_\alpha(t+h)\, u_\beta(t)\|)$ und A'_k die Transponierte von A_k ist, ein.

---

[2]) Die Definition der Winkel zweier linearer Unterräume E_r und E_s in E_n siehe [5].

Wenn $(a_1, \ldots, a_r)$ eine orthonormale Basis in E_r, $(b_1, \ldots, b_s)$ eine orthonormale Basis in E_s ist und ein Einheitsvektor a den Raum E_r durchläuft, dann ist das System der Gleichungen

(i)
$$\sum_{i=1}^{s} (ab_i)\,(a_l b_i) - \lambda(aa_l) = 0\,, \quad l = 1, \ldots, r\,,$$

die Bedingung für die Extreme des Winkels $\sphericalangle(a, E_r)$. Die Determinante dieses Systems muß gleich Null sein. Die Bedingung für diese Beziehung ist äquivalent mit der Bedingung

(ii)
$$|AA' - \lambda I_r| = 0\,,$$

wo A die Matrix $\|a_k b_i\|$, $k = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, s$, A' die Transponierte von A und I_r die Einheitsmatrix der Ordnung r ist.

Die Winkel des Raumes E_r mit dem Raume E_s kann man dann als die Zahlen $\varphi_i = \arccos\sqrt{\lambda_i}$ definieren, wo λ_i die Wurzeln der Gleichung (ii) sind.

Den Zahlen $\lambda_{\alpha,h}$ entsprechen die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_{\alpha,h}$ des Raumes $\boldsymbol{B}_k^{(0)}(t)$, die hinsichtlich des Raumes $\boldsymbol{B}_k^{(0)}(t+h)$ eigen sind.[3]) Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, wo die Zahlen $\lim\limits_{h\to 0}\lambda_{\alpha,h}$ verschieden sind. Dann wählen wir die Vektoren $\lim\limits_{h\to 0}(\boldsymbol{v}_{\alpha,h}(t)/|\boldsymbol{v}_{\alpha,h}(t)|)$ als Vektoren des Bezugssystems im $\boldsymbol{B}_k^{(0)}(t)$.

Es gilt

$$\boldsymbol{u}_\alpha(t+h) = \boldsymbol{u}_\alpha(t) + h\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t) + \tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{u}''_\alpha(t) + o(h^2)\,, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}_\alpha(t+h)\,\boldsymbol{u}_\alpha(t) = 1 - \tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t) + o(h^2)\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{u}_\alpha(t+h)\,\boldsymbol{u}_\beta(t) = h\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}_\beta(t) + \tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{u}''_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}_\beta(t) + o(h^2)\,, \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{14}$$

$$\{\boldsymbol{u}_\alpha(t+h)\,\boldsymbol{u}_\alpha(t)\}^2 = 1 - h^2\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t) + o(h^2)\,, \tag{15}$$

$$\{\boldsymbol{u}_\alpha(t+h)\,\boldsymbol{u}_\beta(t)\}^2 = h^2\{\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}_\beta(t)\}^2 + o(h^2)\,, \quad \alpha \neq \beta\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{u}_\alpha(t+h)\,\boldsymbol{u}_\alpha(t)\}\,\{\boldsymbol{u}_\beta(t+h)\,\boldsymbol{u}_\alpha(t)\} &= \\ = h\,\boldsymbol{u}'_\beta(t)\,\boldsymbol{u}_\alpha(t) + \tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{u}''_\beta(t)\,\boldsymbol{u}_\alpha(t) + o(h^2)\,, &\quad \alpha \neq \beta\,,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{u}_\alpha(t+h)\,\boldsymbol{u}_\gamma(t)\}\,\{\boldsymbol{u}_\beta(t+h)\,\boldsymbol{u}_\gamma(t)\} &= \\ = h^2\{\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}_\gamma(t)\}\,\{\boldsymbol{u}'_\beta(t)\,\boldsymbol{u}_\gamma(t)\} + o(h^2)\,, &\quad \alpha \neq \beta\,, \quad \alpha \neq \gamma\,, \quad \beta \neq \gamma\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Die Elemente $a_{\alpha\alpha}$ der Hauptdiagonalen der Matrix $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}'_k$ haben die Form

$$a_{\alpha\alpha} = 1 - h^2\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}'_\alpha(t) + h^2\sum_\beta\{\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}_\beta(t)\}^2 + o(h^2)\,. \tag{19}$$

Die übrigen Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}'_k$ haben die Form

$$a_{\alpha\beta} = -h^2\{\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}'_\beta(t)\} + h^2\sum_\gamma\{\boldsymbol{u}'_\alpha(t)\,\boldsymbol{u}_\gamma(t)\}\,\{\boldsymbol{u}'_\beta(t)\,\boldsymbol{u}_\gamma(t)\} + o(h^2)\,, \quad \alpha \neq \beta\,. \tag{20}$$

Aus der Beziehung (9) folgt

$$\boldsymbol{u}'_\alpha\boldsymbol{u}_\beta = \omega_{\alpha\beta}\,, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u}'_\alpha\boldsymbol{u}'_\beta = \sum_\gamma(\omega_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma} + c_{\alpha\gamma}c_{\beta\gamma})\,. \tag{22}$$

Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}'_k$ haben die Form

$$a_{\alpha\alpha} = 1 - h^2\sum_\gamma c^2_{\alpha\gamma} + o(h^2)\,, \tag{23}$$

$$a_{\alpha\beta} = -h^2\sum_\gamma c_{\alpha\gamma}c_{\beta\gamma} + o(h^2)\,, \quad \alpha \neq \beta\,. \tag{24}$$

---

[3]) Den Vektor, der die Lösung des Systems (i) für irgendein $\lambda = \cos^2\varphi$ ist, nennt man den Eigenvektor des Raumes $\boldsymbol{E}_r$, der hinsichtlich $\boldsymbol{E}_s$ eigen ist.

Die Matrix $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}'_k$ ist symmetrisch und man kann diese als eine Summe zweier symmetrischer Matrizen schreiben. Für die Elemente dieser Matrizen gilt $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + h^3 q_{\alpha\beta}$, wo $b_{\alpha\alpha} = 1 - h^2 \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}^2$, $b_{\alpha\beta} = -h^2 \sum_\gamma c_{\alpha\gamma} c_{\beta\gamma}$, $\alpha \neq \beta$ ist und $\|q_{\alpha\beta}\|$ eine symmetrische Matrix ist.

In diesem Fall sind die Eigenwerte $\lambda_{\alpha,h}$ und die Vektoren $\boldsymbol{v}_{\alpha,h}$ stetige und differenzierbare Funktionen von h.[4]) Wenn wir zum Grenzwert für $h \to 0$ übergehen, dann gehen die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}'_k$ zu den Eigenwerten der Matrix, die durch die Elemente $b_{\alpha\beta}$ gegeben ist, über. Diesen Eigenwerten – wir beschränken uns auf die Fälle, wo die Zahlen $\lim_{h\to 0} \lambda_{\alpha,h}$ veschieden sind – entsprechen die Vektoren $\boldsymbol{v}_\alpha = \lim_{h\to 0} (\boldsymbol{v}_{\alpha,h}/|\boldsymbol{v}_{\alpha,h}|)$, die als Vektoren des Bezugssystems in $\boldsymbol{B}_k$ angenommen werden. Das kann man durchführen, nachdem die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_{\alpha,h}$ des Raumes $\boldsymbol{B}_k^{(0)}(t)$, die hinsichtlich $\boldsymbol{B}_k^{(0)}(t + h)$ eigen sind, nach [5] Satz 4 untereinander senkrecht sind. Wenn wir die ursprünglichen Vektoren durch die normierten Vektoren $\boldsymbol{v}_\alpha$ ersetzen, dann muß für die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}'_k$, die nach diesem Austausch berechnet wird, für $\alpha \neq \beta$ die Beziehung $a_{\alpha\beta} = o(h^2)$ gelten, d. h. es muß

$$(25) \qquad \sum_\gamma c_{\alpha\gamma} c_{\beta\gamma} = 0$$

gelten.

Bezeichnen wir $d_\alpha = \sqrt{\sum_\gamma c_{\alpha\gamma}^2}$. Dieser Ausdruck ist von Null verschieden, sonst wäre die Bedingung (2) nicht erfüllt. Dann kann man die Beziehung (9), wenn wir $\boldsymbol{u}_\alpha$ die normierten Vektoren $\boldsymbol{v}_\alpha$ bezeichnen, in der Form

$$(26) \qquad \boldsymbol{u}'_\alpha = \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \boldsymbol{u}_\gamma + d_\alpha \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}^* \boldsymbol{u}_{k+\gamma}$$

schreiben, wo $c_{\alpha\gamma}^* = c_{\alpha\gamma}/d_\alpha$ ist und $\|c_{\alpha\gamma}^*\|$ eine orthogonale Matrix ist.

Wenn $m > 1$ ist, betrachten wir die Räume $\boldsymbol{B}_{2k}(t)$ und $\boldsymbol{B}_{2k}(t + h)$.Berechnen wir die Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{A}'_{2k}$, wo $\boldsymbol{A}_{2k} = \|\boldsymbol{u}_i(t + h)\, \boldsymbol{u}_j(t)\|$, $i, j = 1, \ldots, 2k$ und A'_{2k} die Transponierte von $\boldsymbol{A}_{2k}$ ist.

Die Beziehungen (12) bis (20) gelten auch für den Fall, daß die Indizes α, β, γ die Werte $1, \ldots, 2k$ durchlaufen. Es gelten die Beziehungen (21), (22) und (weiter sollen die Indizes α, β, γ wieder nur die Werte $1, \ldots, k$ durchlaufen):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_\alpha \boldsymbol{u}_{k+\beta} &= c_{\alpha\beta} \\
\boldsymbol{u}'_\alpha \boldsymbol{u}'_{k+\beta} &= -\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} c_{\gamma\beta} + \sum_\gamma \omega_{k+\beta,k+\gamma} c_{\alpha\gamma} \\
\boldsymbol{u}'_{k+\alpha} \boldsymbol{u}'_{k+\beta} &= \sum_\gamma \left(c_{\gamma\alpha} c_{\gamma\beta} + \omega_{k+\alpha,k+\gamma} \omega_{k+\beta,k+\gamma} + c_{k+\alpha,k+\gamma} c_{k+\beta,k+\gamma}\right) \\
\boldsymbol{u}'_{k+\alpha} \boldsymbol{u}_{k+\beta} &= \omega_{k+\alpha,k+\beta} \\
\boldsymbol{u}'_{k+\alpha} \boldsymbol{u}_\beta &= -c_{\beta\alpha}\,.
\end{aligned}$$

---

[4]) Siehe [1], Nachtrag II.

Daraus folgen für die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{A}'_{2k}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\alpha} &= 1 + o(h^2) \\
a_{k+\alpha,k+\alpha} &= 1 - h^2 \sum_\gamma c^2_{k+\alpha,k+\gamma} + o(h^2) \\
a_{\alpha\beta} &= o(h^2)\,, \quad \alpha \neq \beta \\
a_{k+\alpha,\beta} &= o(h^2) \\
a_{k+\alpha,k+\beta} &= -h^2 \sum_\gamma c_{k+\alpha,k+\gamma} c_{k+\beta,k+\gamma} + o(h^2)\,, \quad \alpha \neq \beta\,.
\end{aligned}$$

Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{A}'_{2k}$ zeigen, daß diese Matrix symmetrisch ist, und daß man ihre Elemente in der Form $a_{ij} = b_{ij} + h^3 q_{ij}$, wo $b_{ij} = b_{ji}$, $q_{ij} = q_{ji}$ und $b_{\alpha\alpha} = 1$, $b_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$, $b_{k+\alpha,\beta} = 0$, $b_{k+\alpha,k+\alpha} = 1 - h^2 \sum_\gamma c^2_{k+\alpha,k+\gamma}$, $b_{k+\alpha,k+\beta} = -h^2 \sum_\gamma c_{k+\alpha,k+\gamma} c_{k+\beta,k+\gamma}$ für $\alpha \neq \beta$, schreiben kann.

Wenn wir zum Grenzwert für $h \to 0$ übergehen, streben die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{A}'_{2k}$ zu den Eigenwerten der Matrix, die durch die Elemente b_{ij} gegeben ist. Es gibt hier einen k-maligen Eigenwert $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1$. Den übrigen k Eigenwerten $\lambda_{k+\alpha}$ – wir beschränken uns auf den Fall, wo sie verschieden sind – entsprechen dann die Vektoren $\boldsymbol{v}_{k+\alpha} = \lim_{h\to 0} \boldsymbol{v}_{k+\alpha,h}$, wo $\boldsymbol{v}_{k+\alpha,h}$ die Eigenvektoren, die den Eigenwerten $\lambda_{k+\alpha,h}$ der Matrix $\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{A}'_{2k}$ entsprechen, sind. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_{k+\alpha}/|\boldsymbol{v}_{k+\alpha}|$ kann man als Vektoren $\boldsymbol{u}_{k+\alpha}$ des Bezugssystems in $\boldsymbol{B}^{(1)}_k$ auffassen. Für die Matrix $\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{A}'_{2k}$, die nach diesem Tausch berechnet wird, muß dann für $\alpha \neq \beta$ die Beziehung $a_{k+\alpha,k+\beta} = o(h^2)$ gelten, d. h. es muß

$$\sum_\gamma c_{k+\alpha,k+\gamma} c_{k+\beta,k+\gamma} = 0 \tag{27}$$

gelten.

Bezeichnen wir $d_{k+\alpha} = \sqrt{(\sum_\gamma c^2_{k+\alpha,k+\gamma})}$. Dieser Ausdruck ist von Null verschieden, sonst wäre die Bedingung (2) nicht erfüllt. Die Beziehung (10) können wir in der Form

$$\boldsymbol{u}'_{k+\alpha} = -\sum_\gamma c^*_{\gamma\alpha} d_\gamma \boldsymbol{u}_\gamma + \sum_\gamma \omega_{k+\alpha,k+\gamma} \boldsymbol{u}_{k+\gamma} + d_{k+\alpha} \sum_\gamma c^*_{k+\alpha,k+\gamma} \boldsymbol{u}_{2k+\gamma} \tag{28}$$

schreiben, wo $c^*_{k+\alpha,k+\gamma} = c_{k+\alpha,k+\gamma}/d_{k+\alpha}$ ist und wo $\|c^*_{k+\alpha,k+\gamma}\|$ eine orthogonale Matrix ist.

Ähnlich können wir weiter fortfahren. Man kann nachrechnen, daß man die Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{A}_{\mu k}\boldsymbol{A}'_{\mu k}$ ($0 < \mu \leqq m$, m von der Beziehung (2)), wo $\boldsymbol{A}_{\mu k} = \|\boldsymbol{u}_i(t+h)\, \boldsymbol{u}_j(t)\|$, $i, j = 1, \ldots, \mu k$ und $\boldsymbol{A}'_{\mu k}$ die Transponierte von $\boldsymbol{A}_{\mu k}$ ist, in der Form $a_{ij} = b_{ji} + h^3 q_{ij}$ schreiben kann, wo $b_{ij} = b_{ji}$, $q_{ij} = q_{ji}$, $b_{rr} = 1$ für $r = 1, \ldots, (\mu - 1)\,k$,

$$\begin{aligned}
b_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\alpha} = 1 - h^2 \sum_\gamma c^2_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma}\,, \quad b_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\beta} = \\
= -h^2 \sum_\gamma c_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma} c_{(\mu-1)k+\beta,(\mu-1)k+\gamma}
\end{aligned}$$

für $\alpha \neq \beta$ und $b_{ij} = 0$ für alle übrigen Elemente gilt.

Wenn wir wieder zum Grenzwert für $h \to 0$ übergehen, bekommen wir einen $(\mu - 1)\,k$-maligen Eigenwert $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{(\mu-1)k} = 1$. Den übrigen k Eigenwerten $\lambda_{(\mu-1)k+1}, \ldots, \lambda_{\mu k}$ entsprechen dann die Vektoren $\boldsymbol{v}_{(\mu-1)k+\alpha}$. Beschränken wir uns auf den Fall, wo diese Eigenwerte verschieden sind und die entsprechenden Vektoren $\boldsymbol{v}_{(\mu-1)k+\alpha}$ linear unabhängig sind. Nach der Normierung können wir sie als die Vektoren $\boldsymbol{u}_{(\mu-1)k+\alpha}$ des Bezugssystems in $\boldsymbol{B}_k^{(\mu-1)}$ wählen.

Bezeichnen wir $d_{(\mu-1)k+\alpha} = \sqrt{\left(\sum_\gamma c^2_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma}\right)}$ – dieser Ausdruck muß von Null verschieden sein – können wir für $0 < \mu \leqq m$

$$(29) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{u}'_{(\mu-1)k+\alpha} = & -\sum_\gamma d_{(\mu-2)k+\gamma} c^*_{(\mu-2)k+\gamma,(\mu-2)k+\alpha} \boldsymbol{u}_{(\mu-2)k+\gamma} + \\ & + \sum_\gamma \omega_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma} \boldsymbol{u}_{(\mu-1)k+\gamma} + \\ & + d_{(\mu-1)k+\alpha} \sum_\gamma c^*_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma} \boldsymbol{u}_{\mu k+\gamma} \end{aligned}$$

schreiben, wo

$$c^*_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma} = c_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma} / d_{(\mu-1)k+\alpha}$$

ist und wo $\left\| c^*_{(\mu-1)k+\alpha,(\mu-1)k+\gamma} \right\|$ eine orthogonale Matrix ist.

Auf diese Weise können die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{mk}$ bestimmt werden.

Betrachten wir weiter k Vektoren $\sum_\gamma c^*_{(m-1)k+\alpha,(m-1)k+\gamma} \boldsymbol{u}_{mk+\gamma}$. Diese Vektoren sind untereinander senkrechte Einheitsvektoren. Wir können diese als die Vektoren $\boldsymbol{u}_{mk+\alpha}$ nehmen. Im Falle $n = (m + 1)\,k$ sind wir fertig.

Im Falle $n = (m + 1)\,k + 1$ nehmen wir als $\boldsymbol{u}_n$ den Einheitsvektor, der zum Raume $\boldsymbol{B}_{(m+1)k}$ senkrecht ist. In den übrigen Fällen sollen wir zur Bestimmung des Bezugssystems der Mannigfaltigkeit V_{k+1} noch die Vektoren $\boldsymbol{u}_{(m+1)k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ festlegen. D. h. wir sollen das Bezugssystem im Raume $\boldsymbol{C}_{n-(m+1)k}$ wählen. Der Kürze halber schreiben wir $\kappa = n - (m + 1)\,k$.

Betrachten wir die Räume $\boldsymbol{C}_\kappa(t)$ und $\boldsymbol{C}_\kappa(t + h)$ und berechnen wir die Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{A}_\kappa \boldsymbol{A}'_\kappa$ $(A_\kappa = \|\boldsymbol{u}_i(t + h)\, \boldsymbol{u}_j(t)\|$, $i, j = (m + 1)\,k + 1, \ldots, n$, wo $\boldsymbol{A}'_\kappa$ die Transponierte zu $\boldsymbol{A}_\kappa$ ist. Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}_\kappa \boldsymbol{A}'_\kappa$ zeigen, daß diese Matrix symmetrisch ist und daß für diese Elemente $a_{ij} = b_{ij} + h^3 q_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, \kappa)$ gilt, wo $b_{ij} = b_{ji}$, $q_{ij} = q_{ji}$, $b_{ii} = 1 - h^2 \sum_\gamma s^2_{\gamma i}$, $b_{ij} = -h^2 \sum_\gamma s_{\gamma j} s_{\gamma i}$, $i \neq j$ ist.

Wenn wir zum Grenzwert für $h \to 0$ übergehen, gehen die Eigenwerte $\lambda_{i,h}$ zu Werten $\lambda_i = \lim_{h \to 0} \lambda_{i,h}$ $(i = 1, \ldots, \kappa)$ über. Wenn diese Werte verschieden sind und auf diesen Fall begrenzen wir uns, entsprechen diesen Eigenwerten untereinander senkrechte Eigenwektoren des Raumes $\boldsymbol{C}_\kappa(t)$, die hinsichtlich des Raumes $\boldsymbol{C}_\kappa(t + h)$ eigen sind. Diese Eigenvektoren bezeichnen wir nach der Normierung $\boldsymbol{u}_{(m+1)k+1}, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Daraus folgt

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen*

a) *der Gültigkeit der Beziehung* (2);

b) *der Existenz von k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{(\mu-1)k+\alpha}$ (ohne eines $(\mu-1)$ k-maligen Eigenwertes, der gleich eins ist), der Matrizen, die aus den Matrizen $\mathbf{A}_{\mu k}\mathbf{A}'_{\mu k}$ $(0 < \mu \leqq m)$ durch die Auslassung der Elemente $o(h^2)$ entstehen;*

c) *der Existenz von $\kappa = n - (m+1)k$ verschiedenen Eigenwerten der Matrix, die aus der Matrix $\mathbf{A}_\kappa\mathbf{A}'_\kappa$ durch die Auslassung der Elemente $o(h^2)$ entsteht; gibt es bis auf die Orientierung der Vektoren $\mathbf{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ genau ein solches orthonormales bewegliches Bezugssystem $\{A, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, daß die Vektoren $\mathbf{u}_{ik+\alpha}$ $(0 \leqq i \leqq m)$ in den Räumen $\boldsymbol{B}_k^{(i)}$ liegen und folgende Beziehungen erfüllt sind:*

a) $\mathbf{u}_{jk+\alpha} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{v}_{jk+\alpha,h}}{|\mathbf{v}_{jk+\alpha,h}|} \quad (0 \leqq j < m)$,

wo $\mathbf{v}_{jk+\alpha,h}$ die Eigenvektoren der Räume $\boldsymbol{B}_{(j+1)k}(t)$, die hinsichtlich der Räumen $\boldsymbol{B}_{(j+1)k}(t+h)$ eigen sind, sind; diese Eigenvektoren sollen den Eigenwerten $\lambda_{jk+\alpha}$ entsprechen.

b) *$\mathbf{u}_{mk+\alpha}$ sind die normierten orthogonalen Projektionen der Vektoren $\mathbf{u}'_{(m-1)k+\alpha}$ in den Raum $\boldsymbol{B}_k^{(m)}$;*

c) $\mathbf{u}_{(m+1)k+i} = \lim \dfrac{\mathbf{v}_{(m+1)k+i,h}}{|\mathbf{v}_{(m+1)k+i,h}|} \quad (i = 1, \ldots, \kappa)$,

wo $\mathbf{v}_{(m+1)k+i,h}$ die Eigenvektoren des Raumes $\boldsymbol{C}_\kappa(t)$, die hinsichtlich des Raumes $\boldsymbol{C}_\kappa(t+h)$ eigen sind, sind.

Für die Ableitungen der Vektoren des Bezugssystems gilt

$$
\begin{aligned}
(30)\quad \mathbf{u}'_\alpha &= \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\mathbf{u}_\gamma + d_\alpha \sum_\gamma c^*_{\alpha\gamma}\mathbf{u}_{k+\gamma} \\
\mathbf{u}'_{k+\alpha} &= -\sum_\gamma d_\gamma c^*_{\gamma\alpha}\mathbf{u}_\gamma + \sum_\gamma \omega_{k+\alpha,k+\gamma}\mathbf{u}_{k+\gamma} + d_{k+\alpha}\sum_\gamma c^*_{k+\alpha,k+\gamma}\mathbf{u}_{2k+\gamma} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{u}'_{jk+\alpha} &= -\sum_\gamma d_{(j-1)k+\gamma}c^*_{(j-1)k+\gamma,(j-1)k+\alpha}\mathbf{u}_{(j-1)k+\gamma} + \\
&\quad + \sum_\gamma \omega_{jk+\alpha,jk+\gamma}\mathbf{u}_{jk+\gamma} + d_{jk+\alpha}\sum_\gamma c^*_{jk+\alpha,jk+\gamma}\mathbf{u}_{(j+1)k+\gamma} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{u}'_{(m-2)k+\alpha} &= -\sum_\gamma d_{(m-3)k+\gamma}c^*_{(m-3)k+\gamma,(m-3)k+\alpha}\mathbf{u}_{(m-3)k+\gamma} + \\
&\quad + \sum_\gamma \omega_{(m-2)k+\alpha,(m-2)k+\gamma}\mathbf{u}_{(m-2)k+\gamma} + \\
&\quad + d_{(m-2)k+\alpha}\sum_\gamma c^*_{(m-2)k+\alpha,(m-2)k+\gamma}\mathbf{u}_{(m-1)k+\gamma}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{u}'_{(m-1)k+\alpha} = -\sum_\gamma d_{(m-2)k+\gamma} c^*_{(m-2)k+\gamma,(m-2)k+\alpha} \boldsymbol{u}_{(m-2)k+\gamma} + $$
$$+ \sum_\gamma \omega_{(m-1)k+\alpha,(m-1)k+\gamma} \boldsymbol{u}_{(m-1)k+\gamma} + d_{(m-1)k+\alpha} \boldsymbol{u}_{mk+\alpha}$$

$$\boldsymbol{u}'_{mk+\alpha} = -d_{(m-1)k+\alpha} \boldsymbol{u}_{(m-1)k+\alpha} + \sum_\gamma \omega_{mk+\alpha,mk+\gamma} \boldsymbol{u}_{mk+\gamma} + \sum_{i=1}^{\kappa} s_{\alpha,i} \boldsymbol{u}_{(m+1)k+i}$$

$$\boldsymbol{u}'_{(m+1)k+j} = -\sum_\gamma s_{\gamma,j} \boldsymbol{u}_{mk+\gamma} + \sum_{i=(m+1)k+1}^{n} \omega_{(m+1)k+j,i} \boldsymbol{u}_i \,, \quad j = 1, \ldots, \kappa \,,$$

(31) $\omega_{rs} = -\omega_{s,r}\,, \quad r, s = 1, \ldots, n.$

$\|c^*_{jk+\alpha,jk+\beta}\|$, $j = 0, \ldots, m-2$ *sind orthogonale Matrizen,*

$\sum_\gamma s_{\gamma i} s_{\gamma j} = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, \kappa, \ i \neq j.$

3. In folgendem zeigen wir die geometrische Bedeutung einiger Invarianten von den Beziehungen (30).

Satz 2. *Es sei $\varphi_{\alpha,\mu,h}$ der Winkel der Räume $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t)$ und $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t+h)$, $\mu = 1, \ldots, m$. Dann gilt bei passender Numerierung der Winkel*

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{\sin \varphi_{\alpha,\mu,h}}{h}\right| = d_{(\mu-1)k+\alpha}\,. \tag{32}$$

Beweis. Nach [5] gill $\cos^2 \varphi_{\alpha,\mu,h} = \lambda_{\alpha,\mu,h}$, wo $\lambda_{\alpha,\mu,h}$ die Wurzeln des charakteristischen Polynomes der quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}_{\mu k}\boldsymbol{A}'_{\mu k}$ ($\boldsymbol{A}_{\mu k} = \|\boldsymbol{u}_i(t+h)\,\boldsymbol{u}_j(t)\|$, $i, j = 1, \ldots, \mu k$, $\boldsymbol{A}'_{\mu k}$ die Transponierte von $\boldsymbol{A}_{\mu k}$) sind. Aus der Wahl der Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, der Beziehungen (30) und der vorhergehenden Betrachtungen folgt, daß $\cos^2 \varphi_{\alpha,\mu,h} = 1 - h^2 d^2_{(\mu-1)k+\alpha} + o(h^2)$ ist. Die Symmetrie der Matrix $\boldsymbol{A}_{\mu k}\boldsymbol{A}'_{\mu k}$ hat zufolge, daß die Eigenwerte $\lambda_{\alpha,\mu,h}$ stetige und differenzierbare Funktionen von h sind (siehe [1], Nachtrag II), und daraus daß

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{\sin \varphi_{\alpha,\mu,h}}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_{\alpha,\mu,h})}}{h} = d_{(\mu-1)k+r}$$

ist.

Satz 3. *Es sei $\varphi_{i,h}$ der Winkel der Räume $C_\kappa(t)$ und $C_\kappa(t+h)$, $\kappa = n - (m+1)k$, $i = 1, \ldots, \kappa$. Dann gilt bei passender Numerierung der Winkel*

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{\sin \varphi_{i,h}}{h}\right| = \sqrt{\sum_\gamma s^2_{\gamma i}} \tag{33}$$

Beweis. Suchen wir die Wurzeln $\lambda_{i,h}$ des charakteristischen Polynoms der Matrix $\boldsymbol{A}_\kappa \boldsymbol{A}'_\kappa$ ($\boldsymbol{A}_\kappa = \|\boldsymbol{u}_g(t+h)\,\boldsymbol{u}_j(t)\|$, $g, j = (m+1)k+1, \ldots, n$). Die Elemente der Hauptdiagonale dieser symmetrischen Matrix sind $a_{ii} = 1 - h^2 \sum_\gamma s^2_{\gamma,i} + o(h)^2$, die übrigen Elemente sind $o(h^2)$.

$$\cos^2 \varphi_{ih} = \lambda_{ih} = 1 - h^2 \sum_\gamma s_{\gamma,i}^2 + o(h^2)$$

und weiter

$$(\sin^2 \varphi_{ih})/h^2 = \sum_\gamma s_{\gamma,i}^2 + o(1)\,.$$

Mittels des Grenzüberganges $h \to 0$ ergibt sich die Beziehung (33).

Die Projektionen der Vektoren $\mathbf{u}'_{\mu k+\alpha}$ $(\mu = 0, \ldots, m-2)$ in den Raum $\boldsymbol{B}_k^{(\mu+1)}$ bezeichnen wir $\mathbf{w}_{\mu k+\alpha}$. Ihre Längen sind $d_{\mu k+\alpha}$. Aus der Beziehung

$$\mathbf{u}'_{\mu k+\alpha}\mathbf{u}_{(\mu+1)k+\beta} = d_{\mu k+\alpha}c^*_{\mu k+\alpha,\mu k+\beta}\,,$$

resp.

$$\mathbf{w}_{\mu k+\alpha}\mathbf{u}_{(\mu+1)k+\beta} = d_{\mu k+\alpha}c^*_{\mu k+\alpha,\mu k+\beta}$$

folgt

Satz 4. *Die Koeffizienten $c^*_{\mu k+\alpha,\mu k+\beta}$ $(\mu = 0, \ldots, m-2)$ bestimmen die Längen der orthogonalen Projektionen der Vektoren $\mathbf{w}_{\mu k+\alpha}/d_{\mu k+\alpha}$ in die Vektoren $\mathbf{u}_{(\mu+1)k+\beta}$ des Bezugssystems des Raumes $\boldsymbol{B}_k^{(\mu+1)}$.*

Damit wir weiter die Resultate aus [3] ausnützen können, wählen wir in $\boldsymbol{B}_k(t)$ s. g. ein natürliches Bezugssystem $\{A(t), \mathbf{z}_1(t), \ldots, \mathbf{z}_k(t)\}$, d. h. ein solches Bezugssystem, wo außer $\mathbf{z}_\alpha(t)\, \mathbf{z}_\beta(t) = \delta_{\alpha\beta}$ noch $\mathbf{z}'_\alpha(t)\, \mathbf{z}_\beta(t) = 0$ gilt. Setzen wir weiter voraus, daß das Monosystem V_{k+1} nicht abwickelbar ist, d. h., daß die Vektoren $A'(t), \mathbf{z}_1(t), \ldots, \mathbf{z}_k(t), \mathbf{z}'_1(t), \ldots, \mathbf{z}'_k(t)$ linear unabhängig sind.

Wählen wir jetzt als $A(t)$ die Kehllinie des Monosystems V_{k+1}, d. i. die Menge der Punkte $A(t)$, für welche $A'(t)\, \mathbf{z}'_\alpha(t) = 0$ gilt.

Für das Bezugssystem $\{A(t), \mathbf{z}_1(t), \ldots, \mathbf{z}_n(t)\}$, $\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, wo die k ersten Kanten die Vektoren des erwähnten natürlichen Bezugssystems sind, gilt dann

$$A' = \sum_\alpha \bar{p}_\alpha \mathbf{z}_\alpha + \sum_{i=2k+1}^{n} \bar{p}_i \mathbf{z}_i\,. \tag{34}$$

Wenn wir zum anderen orthogonalen Bezugssystem in $\boldsymbol{B}_k$ übergehen, dann gilt für alle bewegliche orthonormale Bezugssysteme $\{A, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, wo $A(t)$ die Kehllinie des Monosystems, $\{A, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ein Bezugssystem in $\boldsymbol{B}_k$, $\{A, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2k}\}$ ein Bezugssystem in $\boldsymbol{B}_{2k}$ ist, die Beziehung

$$A' = \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \sum_{i=2k+1}^{n} p_i \mathbf{v}_i\,. \tag{35}$$

Das folgt aus der Unabhängigkeit der Räume $\boldsymbol{B}_{2k}$ und $\boldsymbol{B}_k^{(1)}$ von der Wahl des Bezugssystems in $\boldsymbol{B}_k$. Der Vektor $\sum_\alpha p_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ ist die orthogonale Projektion des Vektors A' in den Raum $\boldsymbol{B}_k$. Seine Länge ist von der Wahl des orthonormalen Bezugssystems in $\boldsymbol{B}_k$.

unabhängig. Es gilt also

$$\sum_\alpha p_\alpha^2 = \sum_\alpha \bar{p}_\alpha^2 . \tag{36}$$

Wählen wir noch den Parameter t so, daß $|\mathrm{d}A/\mathrm{d}t| = 1$ ist. Dann gilt

$$\sum_{i=2k+1}^{n} p_i^2 = 1 - \sum_\alpha p_\alpha^2 . \tag{37}$$

Für die Ableitungen des Ausdrucks $A(t)$ und der Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vom Satz 1 (nur solche werden wir mit diesen Symbolen bezeichnen) gelten also die Relationen (35) und (30) gemeinsam mit (37) und (31). Beschränken wir uns auf die Fälle $p_\alpha \neq 0$. Die Orientierung der Vektoren $\boldsymbol{u}_\alpha$, $\boldsymbol{u}_i$, $i = (m+1)k+1 \ldots, n$, wählen wir so, daß $p_\alpha > 0$, $p_i > 0$ gilt. Die Orientierung der Vektoren $\boldsymbol{u}_{jk+\alpha}$ $(j = 1, \ldots, m)$ wählen wir so, daß diese Vektoren mit den orthogonalen Projektionen $\boldsymbol{w}_{(j-1)k+\alpha}$ der Vektoren $\boldsymbol{u}'_{(j-1)k+\alpha}$ in die Räume $\boldsymbol{B}_k^{(j)}$ spitze Winkel oder Nullwinkel bilden. Im Falle, daß der Vektor $\boldsymbol{w}_{(j-1)k+\alpha}$ zum Vektor $\boldsymbol{u}_{jk+\alpha}$ senkrecht ist, soll dieser Vektor den Nullwinkel oder einen spitzen Winkel mit dem erstem der Vektoren $\boldsymbol{w}_{(j-1)k+\alpha+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{jk}, \boldsymbol{w}_{(j-1)k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{(j-1)k+\alpha-1}$, zu dem er nicht senkrecht ist, bilden. Wir werden solche Intervalle betrachten, wo die Orientierung stetig ist.

Satz 5. *Die Funktionen p_i, ω_{ij}, c_{ij}^*, d_i, s_{ij} in den Beziehungen* (35), (30) *in Anbetracht der Beziehungen* (31), (37) *sind eineindeutig bestimmt. Sie sind also die Invarianten des betrachteten Monosystems.*

Satz 6. *Die Winkel, die die Kehllinie $A(t)$ mit den Richtungen der Vektoren des Bezugssystems $\boldsymbol{u}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k, 2k+1, \ldots, n)$ bildet, bezeichnen wir $\alpha_i(t)$. Es gilt* $\cos\alpha_i = p_i$.

Beweis. $A'(t)$, $\boldsymbol{u}_i(t)$ sind die Einheitsvektoren. $\cos\alpha_i(t) = A'(t)\,\boldsymbol{u}_i(t) = p_i$.

Satz 7. *Es sei h der Bogen der Kehllinie, der vom Punkte t_0 gemessen und wie der Parameter orientiert ist. Es sei $k > 1$, $j = 0, \ldots, m$. Es sei $\boldsymbol{u}_{jk+\alpha}(t_0) = \boldsymbol{z}_{jk+\alpha}(t_0)$. Es seien $\boldsymbol{z}_{jk+\alpha}(t)$ bzw. $\boldsymbol{z}_{(m+1)k+1}(t), \ldots, \boldsymbol{z}_n(t)$ die Vektoren des natürlichen Bezugssystems des Raumes $\boldsymbol{B}_k^{(j)}(t)$ bzw. $\boldsymbol{C}_\kappa(t)$, d. h. ein solches Bezugssystem in $\boldsymbol{B}_k^{(j)}(t)$ bzw. $\boldsymbol{C}_\kappa(t)$, für welches $\boldsymbol{z}'_{jk+\alpha}(t)\,\boldsymbol{z}_{jk+\beta}(t) = 0$ bzw. $\boldsymbol{z}'_r(t)\,\boldsymbol{z}_s(t) = 0$ $(r, s = (m+1)k+1, \ldots$ $\ldots, n)$ gilt. Wenn wir $\psi_{\alpha\beta}^{(j)}(t)$ bzw. $\psi_{rs}(t)$ den Winkel der Vektoren $\boldsymbol{u}_{jk+\alpha}(t)\,\boldsymbol{z}_{jk+\beta}(t)$ bzw. $\boldsymbol{u}_r(t)\,\boldsymbol{z}_s(t)$ bezeichnen, gelten die Beziehungen*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos\psi_{\alpha\beta}^{(j)}(t_0+h)}{h} = \omega_{jk+\alpha,jk+\beta}(t_0), \quad \alpha \neq \beta \tag{38}$$

bzw.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos\psi_{rs}(t_0+h)}{h} = \omega_{rs}(t_0), \quad r \neq s . \tag{39}$$

Beweis. Wir setzen $\mathbf{u}_{jk+\beta}(t_0) = \mathbf{z}_{jk+\beta}(t_0)$ voraus. Im Punkte t_0 gelten die Beziehungen (30) und (31),

$$\mathbf{z}'_{jk+\beta} = -\sum_{\gamma} \bar{c}_{(j-1)k+\gamma,(j-1)k+\beta} \mathbf{u}_{(j-1)k+\gamma} + \sum_{\gamma} \bar{C}_{jk+\beta,jk+\gamma} \mathbf{u}_{(j+1)k+\gamma}, \ (j-1)k + \gamma \leqq n \,,$$

wo $\bar{c}_{(j-1)k+\gamma,(j-1)k+\beta}$ und $\bar{C}_{jk+\beta,jk+\gamma}$ sind begrenzt. Da

$$\mathbf{u}_{jk+\alpha}(t_0 + h) = \mathbf{u}_{jk+\alpha}(t_0) + h\, \mathbf{u}'_{jk+\alpha}(t_0) + o(h)\,,$$
$$\mathbf{z}_{jk+\beta}(t_0 + h) = \mathbf{u}_{jk+\beta}(t_0) + h\, \mathbf{z}'_{jk+\beta}(t_0) + o(h)$$

ist, gilt für $\alpha \neq \beta$

$$\cos \sphericalangle\, \mathbf{u}_{jk+\alpha}(t_0 + h)\, \mathbf{z}_{jk+\beta}(t_0 + h) = h\, \mathbf{u}'_{jk+\alpha}(t_0)\, \mathbf{u}_{jk+\beta}(t_0) + o(h)$$

und daraus folgt die Beziehung (38).

Die Beziehung (39) beweist man ähnlich; man benützt nur andere Indizes.

Das gemeinsame Lot zweier windschiefer linearer Räume $\boldsymbol{E}_r$ und $\boldsymbol{E}_s$, das mit jedem dieser Räume genau einen gemeinsamen Punkt hat, nennen wir die Achse dieser Räume. Den Abstand der Schnittpunkte der gegebenen Räume mit ihrer Achse nennen wir die Länge dieser Achse.

Satz 8. *Es sei x_h die Länge der Achse der Räume $\boldsymbol{B}_k(t)$ und $\boldsymbol{B}_k(t + h)$. Dann gilt*

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_h}{h} = \sqrt{\left(1 - \sum_{\alpha} p_\alpha^2\right)}\,.$$

Beweis. Aus [3] folgt[5])

$$Q(h) - P(h) = h \sum_{i=2k+1}^{n} \bar{p}_i \mathbf{z}_i + o(h)$$

und daraus

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_h}{h} = \lim \frac{\sqrt{|Q(h) - P(h)|}}{h} = \sqrt{\sum_{i=2k+1}^{n} \bar{p}_i^2}\,.$$

Dieser Ausdruck ist nach (36) und (37) $\sqrt{(1 - \sum_{\alpha} p_\alpha^2)}$ gleich.

Wenn wir als Drall μ-ter Ordnung ($\mu = 1, \ldots, m$) den Ausdruck $\lim_{h \to 0} |x_h/\varphi_{\alpha,\mu,h}|$, wo x_h die Länge der Achse der Räume $\boldsymbol{B}_k(t)$ und $\boldsymbol{B}_k(t + h)$ und $\varphi_{\alpha,\mu,h}$ der Winkel der Räume $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t)$ und $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t + h)$ ist, bezeichnen, dann gilt

Satz 9. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes* 1 *erfüllt sind, hat das nichtabwickelbare Monosystem V_{k+1} für jedes t k Dralle μ-ter Ordnung* ($\mu = 1, \ldots, m$)

---

[5]) Vergleiche [2], Satz 1.

$P_{\alpha,\mu}$:

$$P_{\alpha\mu} = \frac{\sqrt{(1 - \sum_\alpha p_\alpha^2)}}{d_{(\mu-1)k+\alpha}}. \tag{40}$$

Beweis.

$$P_{\alpha,\mu} = \lim_{h\to 0} \left|\frac{x_h}{\varphi_{\alpha,\mu,h}}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{x_h}{h} \frac{h}{\sin \varphi_{\alpha,\mu,h}} \frac{\sin \varphi_{\alpha,\mu,h}}{\varphi_{\alpha,\mu,h}}\right| = \frac{\sqrt{(1 - \sum_\alpha p_\alpha^2)}}{d_{(\mu-1)k+\alpha}}.$$

4. Die Spezialfälle. Die zwei folgende Spezialfälle sind interessant:

A. Die Regelflächen. In diesem Fall ist $k = 1$. Die Beziehungen (11) bzw. (30) und (35) kann man dann in der Form

$$\begin{aligned} A' &= p_1 \mathbf{u}_1 + \sum_{i=3}^{n} p_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_1' &= d_1 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2' &= -d_1 \mathbf{u}_1 + d_2 \mathbf{u}_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{u}_\mu' &= -d_{\mu-1} \mathbf{u}_{\mu-1} + d_\mu \mathbf{u}_{\mu+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{u}_{n-1}' &= -d_{n-2} \mathbf{u}_{n-2} + d_{n-1} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_n' &= -d_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} \end{aligned} \tag{41}$$

schreiben.

Die Regelfläche hat $n - 1$ Dralle

$$P_i = \frac{\sqrt{(1 - p_1^2)}}{d_i}, \quad i = 1, \ldots, n - 1. \tag{42}$$

B. Die Monosysteme V_{k+1} mit $n = 2k + 1$.[6]) Die Beziehungen (30) und (35) kann man dann in der Form

$$\begin{aligned} A' &= \sum_\alpha p_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \sqrt{(1 - \sum_\alpha p_\alpha^2)}\, \mathbf{u}_{2k+1} \\ \mathbf{u}_\alpha' &= \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta + d_\alpha \mathbf{u}_{k+\alpha} \\ \mathbf{u}_{k+\alpha}' &= -d_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \sum_\beta \omega_{k+\alpha,k+\beta} \mathbf{u}_{k+\alpha} + s_\alpha \mathbf{u}_{2k+1} \\ \mathbf{u}_{2k+1}' &= -\sum_\alpha s_\alpha \mathbf{u}_{k+\alpha} \end{aligned} \tag{43}$$

schreiben.

[6]) Ausführlicher siehe [4] und [2].

Dieses Monosystem hat k Dralle erster Ordnung

$$P_\alpha = \frac{\sqrt{(1 - \sum_\alpha p_\alpha^2)}}{d_\alpha}. \tag{44}$$

Literatur

[1] *И. М. Гельфанд:* Лекции по линейной алгебре. Москва—Ленинград 1951.

[2] *L. Granát:* Metrické vlastnosti nerozvinutelných monosystémů V_{n+1} v eukleidovském prostoru E_{2n+1}. Časopis pro pěstování matematiky, *91* (1966), 412—422.

[3] *M. Jůza:* Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée. Чех. мат. журнал, *12* (*87*), (1962), 243—250.

[4] *A. Jůzová:* Eukleidovské invarianty monosystémů. Časopis pro pěstování matematiky, *88* (1963), 1—13.

[5] *Č. Vitner:* O úhlech lineárních podprostorů v E_n. Časopis pro pěstování matematiky, *87* (1962), 415—422.

Anschrift des Verfassers: Loretánské nám. 3, Praha 1 (Výzkumný ústav matematických strojů).

Výtah

METRICKÉ VLASTNOSTI JEDNOPARAMETRICKÝCH SOUSTAV LINEÁRNÍCH PROSTORŮ DIMENSE k V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU E_n

LUDĚK GRANÁT, Praha

Mějme v eukleidovském prostoru $\boldsymbol{E}_n$ jednoparametrickou soustavu k-rozměrných prostorů (1), $k \leqq \frac{1}{2}n$, kterou nazveme monosystémem V_{k+1}. Nechť platí vztah (2), kde m je největší číslo celé takové, že $(m + 1)\, k \leqq n$ a $\boldsymbol{u}'_\alpha, \ldots, \boldsymbol{u}^{(m)}_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ jsou derivace prvního až m-tého řádu podle t. Dále předpokládáme, že monosystém V_{k+1} je nerozvinutelný, tj. že vektory A', $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k$ jsou lineárně nezávislé.

Uvažujme vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k, \ldots, \boldsymbol{u}^{(i)}_1, \ldots, \boldsymbol{u}^{(i)}_k$, kde $i \leqq m$, všechny s počátečním bodem A. Ty určují $(i + 1)\, k$-rozměrný prostor, který označíme $\boldsymbol{B}_{(i+1)k}$. k-rozměrný prostor, který je v $\boldsymbol{B}_{(i+1)k}$ totálně kolmý na $\boldsymbol{B}_{ik}$, označme $\boldsymbol{B}^{(i)}_k$. $\boldsymbol{B}_k$ označme též $\boldsymbol{B}^{(0)}_k$.

Pak v E_n lze určit k danému monosystému V_{k+1} pohyblivý repér $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)\}$, $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, kde $A(t)$ je strikční křivka monosystému a vektory $\boldsymbol{u}_{ik+\alpha}$ $(0 \leqq i \leqq m,\ \alpha = 1, \ldots, k)$ leží v prostorech $\boldsymbol{B}^{(i)}_k$ tak, že platí vztahy (35), (30) spolu s (37) a (31).

Dále je v práci uváděn geometrický význam některých invariantů, daných koeficienty soustavy (35) a (30). Na příklad se uvažuje zobecnění distribučního parametru přímkové plochy. Společnou kolmici dvou mimoběžných lineárních prostorů,

která má s každým z těchto prostorů právě jeden bod společný, nazveme osou těchto prostorů. Nazveme-li distribučním parametrem μ-tého řádu ($\mu = 1, \ldots, m$) $\lim_{h\to 0} |x_h/\varphi_{\alpha,\mu,h}|$, kde x_h je vzdálenost průsečíků prostorů $\boldsymbol{B}_k(t)$ a $\boldsymbol{B}_k(t + h)$ s jejich osou a $\varphi_{\alpha,\mu,h}$ úhel prostorů $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t)$ a $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t + h)$ (definici viz [5]), pak nerozvinutelný monosystém V_{k+1} má k distribučních parametrů μ-tého řádu ($\mu = 1, \ldots, m$) daných výrazem (40).

Резюме

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ РАЗМЕРНОСТИ k В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n

ЛУДЕК ГРАНАТ (Luděk Granát), Прага

Пусть в евклидовом пространстве E_n дана однопараметрическая система k-размерных пространств (1), $k \leqq \frac{1}{2}n$, которую мы назовем моносистемой V_{k+1}. Пусть имеет место соотношение (2), где m наибольшее целое число такое, что $(m + 1)\, k \leqq n$ и $\boldsymbol{u}'_\alpha, \ldots, \boldsymbol{u}^{(m)}_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, k$) являются производными по t от первого до m-ого порядка. Далее мы предполагаем, что моносистема V_{k+1} является неразвертывающейся, т. е. что векторы A', $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k$ линейно независимы.

Пусть векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k, \ldots, \boldsymbol{u}^{(i)}_1, \ldots, \boldsymbol{u}^{(i)}_k$ ($i \leqq m$, все с началом в точке A) определяют $(i + 1)\, k$-размерное пространство, которое мы обозначим $\boldsymbol{B}_{(i+1)k}$. k-размерное пространство, которое является в $\boldsymbol{B}_{(i+1)k}$ тотально перпендикулярным к $\boldsymbol{B}_{ik}$, обозначим $\boldsymbol{B}^{(i)}_k$. $\boldsymbol{B}_k$ обозначим тоже $\boldsymbol{B}^{(0)}_k$.

Тогда можно в $\boldsymbol{E}_n$ определить к данной моносистеме V_{k+1} подвижной репер $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)\}$, $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \ldots, n$), где $A(t)$ является стрикционной кривой и векторы $\boldsymbol{u}_{ik+\alpha}$ ($0 \leqq i \leqq m$, $\alpha = 1, \ldots, k$) лежат в пространствах $\boldsymbol{B}^{(i)}_k$ так, что справедливы соотношения (35), (30), (37) и (31).

Далее приводится в работе геометрический смысл некоторых инвариантов данных коэффициентами системы (35) и (30). Рассматривается обобщение параметра распределения линейчатой поверхности. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся линейных пространств, который имеет с каждым из этих пространств одну и только одну общую точку, мы будем называть осью этих пространств. Если называть параметром распределения μ-того порядка ($\mu = 1, \ldots, m$) выражение $\lim_{h\to 0} |x_h/\varphi_{\alpha,\mu,h}|$, где x_h — расстояние точек пересечения пространств $\boldsymbol{B}_k(t)$ и $\boldsymbol{B}_k(t + h)$ с их осью и $\varphi_{\alpha,\mu,h}$ — угол пространств $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t)$ и $\boldsymbol{B}_{\mu k}(t + h)$ (определение см. [5]), то можно моносистеме V_{k+1} сопоставить k параметров распределения μ-того порядка ($\mu = 1, \ldots, m$) данных соотношением (40).