Časopis pro pěstování matematiky

Ernest Jucovič
Poznámka o cestách v štvoruholníkových polyédrických grafoch

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 1, 69--72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108658

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

POZNÁMKA O CESTÁCH V ŠTVORUHOLNÍKOVÝCH POLYÉDRICKÝCH GRAFOCH

ERNEST JUCOVIČ, Košice

(Došlo dňa 10. októbra 1966)

Pod polyédrickým grafom budeme rozumieť taký graf, ktorého uzly a hrany je možné realizovať ako vrcholy a hrany konvexného mnohostena v E^3. – V posledných rokoch viacerí autori študovali vlastnosti ciest polyédrických grafov a okrem iného tento problém: *Nech G_n je množina všetkých polyédrických grafov s n vrcholmi; pre $G \in G_n$ nech $p(G)$ značí maximálny počet uzlov grafu G, ktoré patria tej istej ceste. Čomu sa rovná $p(n) = \min p(G)$, $G \in G_n$?* – Odhady pre $p(n)$ sa nachádzajú u T. A. BROWN [1], B. GRÜNBAUM - T. S. MOTZKIN [2], J. W. MOON - L. MOSER [3]. Uvedenú otázku je ale možné položiť pre užšie skupiny polyédrických grafov, napr. pridaním nejakej požiadavky regularity. Pre polyédrické grafy, ktorých všetky steny (oblasti) sú trojuholníky, dostaneme príslušné odhady zhora v prácach [1], [2], [3]. V tejto našej poznámke podáme odhad zhora pre polyédrické grafy, ktorých všetky steny sú štvoruholníky. Pritom – v duchu jedného upozornenia V. KLEE [4] – nebudeme uvažovať o množine polyédrických grafov s n vrcholmi, ale s n stenami. (Prevedenie vzorcov je celkom jednoduché.) Dôkaz bude vykonaný tak, že zostrojíme triedu polyédrických grafov, z ktorých každý má n stien, je štvoruholníkový a spĺňa nami udaný odhad.

Budeme potrebovať dve dobre známe zobrazenia polyédrických grafov, konjugovanosť a θ-zobrazenie (pozri E. STEINITZ - H. RADEMACHER [5]); ich vlastnosti uvedieme bez dôkazov. Nech G je polyédrický graf s množinou stien S, hrán H, vrcholov V a uhlov U (to sú dvojice hrán, incidujúce so spoločným uzlom a spoločnou stenou). a) Ku grafu G priraďme graf G' s množinou stien S', hrán H', vrcholov V' tak, že sú si navzájom jednoznačne priradené prvky množín $S \leftrightarrow V'$, $V \leftrightarrow S'$, $H \leftrightarrow H'$ so zachovaním incidencie. Graf G' nazveme konjugovaným ku G; je tiež polyédrický a zrejme je jeho k-uholníková stena priradená ku k-valentnému vrcholu grafu G. b) Ku grafu G priraďme graf $\theta(G)$ s množinou stien S'', hrán H'' vrcholov V'' tak, že sú si priradené prvky množín $S \cup V \leftrightarrow S''$, $H \leftrightarrow V''$, $U \leftrightarrow H''$ so zachovaním incidencie priradených dvojíc prvkov. Toto priradenie nazveme θ-zobrazenie a o grafe $\theta(G)$ platí:

1. Je polyédrický.

2. Je pravidelný štvorvalentný (t. zn. každý jeho vrchol inciduje s práve štyrmi hranami).

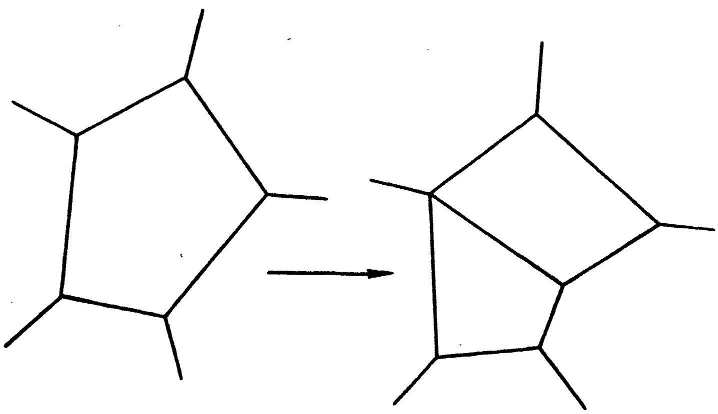
3. Jeho steny je možné rozdeliť do dvoch tried T_1, T_2 tak, že žiadne dve steny tej istej triedy nie sú susedné (nemajú spoločnú hranu).

Veta. *Nech Γ_n^4 je množina všetkých polyédrických grafov, ktoré majú n stien a všetky steny sú štvoruholníky. Pre $H \in \Gamma_n^4$ označme $p(H)$ maximálny počet uzlov grafu H, ktoré patria tej istej ceste. O $p(n)_4 = \min p(H)$, $H \in \Gamma_n^4$ platí*

$$p(n)_4 \leqq \begin{cases} \dfrac{2n+19}{3} & \text{pre} \quad n \equiv 1 \bmod 3 \\[2ex] \dfrac{2n+17}{3} & \text{pre} \quad n \equiv 2 \bmod 3 \\[2ex] \dfrac{2n+15}{3} & \text{pre} \quad n \equiv 0 \bmod 3\,. \end{cases}$$

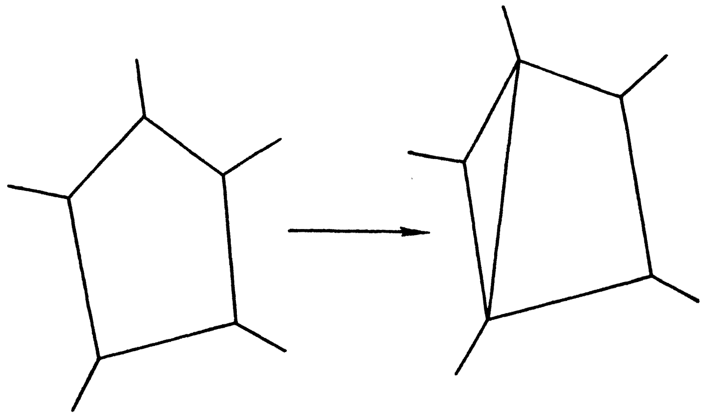
Dôkaz. Najprv pre $n \equiv 0 \bmod 3$, $n \geqq 9$. Nech M je pravidelný trojvalentný polyédrický graf, ktorý má $n = 3k$ hrán; má $2k$ uzlov a $k + 2$ stien (s použitím Eulerovej vety). Graf $\theta(M)$ má $3k$ uzlov a $3k + 2$ stien, rozdelených do dvoch tried s $2k$ resp. $k + 2$ stenami, pričom steny tej istej triedy nie sú susedné. Potom graf $\theta(M)'$, konjugovaný ku $\theta(M)$, má $3k = n$ stien a je párny, pričom v jednotlivých triedach T_1 resp. T_2 je $2k$ resp. $k + 2$ uzlov. Žiadna cesta grafu $\theta(M)'$, ktorého všetky steny sú štvoruholníky, nemôže mať väčšiu dĺžku ako tá cesta, ktorá obsahuje všetkých $k + 2$ uzlov triedy T_2; táto cesta môže potom obsahovať najviac ak $k + 3$ uzlov triedy T_1. Spolu uvažovaná cesta má najviac ak $2k + 5 = \frac{1}{3}(2n + 15)$ uzlov.

Pre $n \equiv 2 \bmod 3$, $n \geqq 8$ vykonajme na pravidelnom trojvalentnom polyédrickom grafe M s $n - 2 = 3k$ hranami jedno štiepenie 2. druhu (obr. 1 — pozri Steinitz-Rademacher [5]). Nový graf, označme ho M_1, má $2k + 1$ uzlov, $k + 3$ stien a $3k + 2$



Obr. 1.

hrán. Ku $\theta(M_1)$ konjugovaný graf $\theta(M_1)'$ má $3k + 2 = n$ štvoruholníkových stien, triedu T_1 s $2k + 1$ uzlami a triedu T_2 s $k + 3$ uzlami, pričom žiadne dva uzly tej istej triedy nie sú spojené hranou. Obdobne ako vyššie má najdlhšia cesta grafu $\theta(M_1)'$ najviac ak $(k + 3) + (k + 4) = \frac{1}{3}(2n + 17)$ uzlov.



Obr. 2.

Pre $n \equiv 1 \bmod 3$, $n \geqq 10$ vykonajme na grafe M, ktorý bol použitý v predchádzajúcich prípadoch, jedno štiepenie 3. druhu (obr. 2); nový graf označme M_2, má $3k + 1$ hrán. Obdobne ako v predchádzajúcich prípadoch nahliadneme, že ku $\theta(M_2)$ konjugovaný graf $\theta(M_2)'$ má n štvoruholníkových stien a jeho najdlhšia cesta neobsahuje viac ako $(k + 3) + (k + 4) = \frac{1}{3}(2n + 19)$ uzlov.

Pre $n < 8$ je tvrdenie vety trivialne.

Poznámka: Z J. W. Moon - L. Moser [3] je možné získať tento odhad zdola pre číslo $p(n)_4$

$$p(n)_4 > \frac{\log_2 (n + 2)}{\log_2 \log_2 (n + 2)} - 1 .$$

Literatúra

[1] *Brown T. A.:* Simple paths on convex polyhedra, Pacific J. Math., *11* (1961), 1211—1214.

[2] *Grünbaum B. - Motzkin T. S.:* Longest simple paths in polyhedral graphs, J. London Math. Soc., *37* (1962), 152—160.

[3] *Moon J. W. - Moser L.:* Simple paths on polyhedra, Pacific J. Math., *13* (1963), 629—631.

[4] *Klee V.:* Paths in Polyhedra I., Math. Note No 372, Boeing scientific research laboratories 1964.

[5] *Steinitz E. - Rademacher H.:* Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934.

Adresa autora: Nám. Februárového víťazstva 9, Košice (Prírodovedecká fakulta UPJŠ).

Summary

REMARK ON SIMPLE PATHS IN QUADRANGULAR POLYHEDRAL GRAPHS

ERNEST JUCOVIČ, Košice

The following theorem is proved:

Let Γ_n^4 be the set of 3-polyhedral graphs all n faces of which are quadrangles. For $H \in \Gamma_n^4$ denote $p(H)$ the greatest number of vertices of H included in a simple path. For $p(n)_4 = \min p(H)$, $H \in \Gamma_n^4$ holds

$$p(n)_4 \leqq \begin{cases} \dfrac{2n + 19}{3} & \text{for} \quad n \equiv 1 \bmod 3 \\ \dfrac{2n + 17}{3} & \text{for} \quad n \equiv 2 \bmod 3 \\ \dfrac{2n + 15}{3} & \text{for} \quad n \equiv 0 \bmod 3\,. \end{cases}$$