Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Doležal

Asymptotické vzorce pro řešení diferenciální rovnice $y'' + f(t)y = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 451--465

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108640`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ASYMPTOTICKÉ VZORCE PRO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + f(t)\,y = 0$

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Došlo dne 3. října 1957) DT: 517.941

V této práci jsou pro řešení diferenciální rovnice (1) odvozeny asymptotické vzorce (2) za předpokladu, že funkce $f \geqq$ konst > 0 a funkce $f^{-\alpha}$, kde α je libovolné číslo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$.

V článku M. Zlámala (viz [2]) byly dokázány pro řešení diferenciální rovnice

$$y'' + f(t)\,y = 0 \tag{1}$$

asymptotické vzorce

$$\begin{aligned} y(t) &= f^{-1/4}(t)\,\{y_0 \sin\,(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)\}\,, \\ y'(t) &= f^{1/4}(t)\,\{y_0 \cos\,(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)\} \end{aligned} \tag{2}$$

za předpokladu, že funkce $f \geqq$ konst > 0 a $f^{-1/4}$ je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$. V článku J. Kurzweila (viz [3]) je uvedeno bez důkazu, že k tomu, aby platily asymptotické vzorce (2), stačí předpokládat, že je konvexní funkce $f^{-\alpha}$, kde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

V této práci je tento důkaz proveden. Jednoduchým způsobem jsou pak odvozeny asymptotické vzorce pro diferenciální rovnici

$$(m(t)\,y')' + q(t)\,y = 0\,. \tag{3}$$

Dále je uveden příklad, že k tomu, aby platily asymptotické vzorce (2), již nestačí předpoklad, že funkce $f^{-1/2}$ je konvexní.

I

Nejprve uvedeme některé **vlastnosti konvexních funkcí**, které budeme v dalším potřebovat.

Buď g konvexní funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ a $0 < g(t) \leqq$ konst. Pak platí:

a) *g je v intervalu* $\langle t_0, \infty)$ *nerostoucí.*

b) *g je v intervalu* (t_0, ∞) *spojitá, má v každém bodě vlastní derivaci zprava a vlastní derivaci zleva. Funkce* g'_+ *a* g'_- *jsou neklesající a platí* $g'_-(t) \leqq g'_+(t)$ *pro každé* $t \in (t_0, \infty)$. *Body, v nichž funkce g nemá vlastní derivaci, tvoří spočetnou množinu* (viz [4] kap. V.).

Protože se nám jedná o asymptotické vlastnosti, můžeme bez újmy obecnosti předpokládat spojitost a existenci vlastní derivace zprava i v bodě t_0.

c) *g je absolutně spojitá na každém intervalu* $\langle a, b\rangle$, *kde* $t_0 \leqq a < b < \infty$.

Důkaz. Podle vlastnosti b) je g spojitá v $\langle a, b\rangle$. Derivovaná čísla $D^+g(c) = D_+g(c) = g'_+(c)$ a tedy platí $g'_+(a) \leqq D^+g(c) \leqq g'_+(b)$ pro $c \in \langle a, b\rangle$. To stačí (viz [4] str. 198 pozn. 14), aby g byla absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$.

d) $g'_+(t) \leqq 0$ *pro* $t \in \langle t_0, \infty)$.

Důkaz. Kdyby pro $a > t_0$ bylo $g'_+(a) = c > 0$, pak pro všechny body $t > a$ by platilo $g'_+(t) \geqq c$ a (viz [5], věta 154)

$$g(t) = \int_{g(a)}^{g(t)} ds + g(a) = \int_a^t g'_+(s)\, ds + g(a) \geqq c(t-a) + g(a) \to \infty$$

a to je spor.

e) $\lim\limits_{t\to\infty} g'_+(t) = 0$.

Důkaz. Funkce g'_+ je monotonní, omezená, tedy $\lim\limits_{t\to\infty} g'_+(t)$ existuje. Podle předcházející vlastnosti je nekladná. Kdyby $\lim\limits_{t\to\infty} g'_+(t) = -d^2$, $d \neq 0$, pak pro všechna $t \in \langle t_0, \infty)$ je $g'_+(t) \leqq -d^2$ a

$$g(t) = \int_{g(t_0)}^{g(t)} ds + g(t_0) = \int_{t_0}^t g'_+(s)\, ds + g(t_0) \leqq -d^2(t-t_0) + g(t_0) \to -\infty\,,$$

což je spor.

Pomocná věta 1. *Buď g konvexní funkce definovaná na intervalu* $\langle t_0, \infty)$ *taková, že pro každé* $t \in \langle t_0, \infty)$ *je* $0 < g(t) \leqq$ konst. *Pak ke každému* $\eta > 0$ *existuje funkce* $\bar{g}$ *mající spojitou nezápornou druhou derivaci* $(0 < \bar{g}(t) \leqq g(t_0))$ *taková, že*

$$|g(t) - \bar{g}(t)| < \eta$$

pro všechna $t \in \langle t_0, \infty)$ *a*

$$|\bar{g}'(t)| \leqq p(t)\,,$$

kde $p(t) = |g'_+(t-2)|$ *pro* $t \in \langle t_0 + 2, \infty)$ *a* $p(t) = |g'_+(t_0)|$ *pro* $t \in \langle t_0, t_0 + 2\rangle$.

Důkaz. Budeme aproximovat funkci g'_+ funkcí $\bar{g}'$. Zvolme $\eta > 0$. Zřejmě lze zvolit body τ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ tak, že τ_i jsou body spojitosti funkce g'_+ (g'_+ je spojitá skoro všude) a že

$$\begin{gathered}\tau_i - \tau_{i-1} < \tfrac{3}{2}\,, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots \to \infty\,, \\ (g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))\,(\tau_{i+1} - \tau_i) < \eta\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Funkci $\bar{g}'$ sestrojíme v každém intervalu $\langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle$ následujícím způsobem: Buď je $g'_+(\tau_i) = g'_+(\tau_{i+1})$, pak položíme $\bar{g}'(t) = g'_+(t)$, nebo je $g'_+(\tau_i) < g'_+(\tau_{i+1})$. V tom případě určíme nejprve číslo $d > 0$ tak, aby

$$(g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))\, d = -\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g'_+(s)\,\mathrm{d}s + g'_+(\tau_{i+1})\,(\tau_{i+1} - \tau_i)\,.$$

Je $0 < d < \tau_{i+1} - \tau_i$. Položme $d_0 = \tau_i$, $d_2 = \tau_i + d$, $d_4 = \tau_{i+1}$, $d_1 = d_2 - \min(d_4 - d_2, d_2 - d_0)$, $d_3 = d_2 + \min(d_4 - d_2, d_2 - d_0)$. Platí $d_3 - d_2 = d_2 - d_1 = \frac{1}{2}(d_3 - d_1)$.

A nyní definujeme

$$\bar{g}'(t) = g'_+(\tau_i) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_0, d_1 \rangle\,,$$

$$\bar{g}'(t) = \frac{2(g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))}{(d_3 - d_1)^2}\,(t - d_1)^2 + g'_+(\tau_i) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_1, d_2 \rangle\,,$$

$$\bar{g}'(t) = -\frac{2(g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))}{(d_3 - d_1)^2}\,(t - d_3)^2 + g'_+(\tau_{i+1}) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_2, d_3 \rangle\,,$$

$$\bar{g}'(t) = g'_+(\tau_{i+1}) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_3, d_4 \rangle\,.$$

Je zřejmé, že takto definovaná funkce $\bar{g}'$ má všude spojitou nezápornou derivaci. Podle vlastnosti d) je $\bar{g}'(t) < 0$. Z konstrukce dále plyne, že

$$|\bar{g}'(t)| \leqq p(t)\,,$$

kde p je funkce definovaná ve znění věty. Podle vlastnosti e) plyne, že

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 0\,.$$

Definujme nyní funkci $\bar{g}$ vztahem

$$\bar{g}(t) = \int_{t_0}^{t} \bar{g}'(s)\,\mathrm{d}s + g(t_0)\,.$$

Pak $\bar{g}$ má spojitou nezápornou druhou derivaci, je nerostoucí a shora omezená $\bar{g}(t) \leqq \bar{g}(t_0) = g(t_0)$.

Snadno se spočítá, že

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g'_+(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{g}'(s)\,\mathrm{d}s\,, \tag{5}$$

a tedy pro $t \in \langle \tau_j, \tau_{j+1} \rangle$ platí

$$|g(t) - \bar{g}(t)| = \left|\int_{\tau_j}^{t} g'_+(s)\,\mathrm{d}s - \int_{\tau_j}^{t} \bar{g}'(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq \int_{\tau_j}^{t} |g'_+(s) - \bar{g}'(s)|\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \int_{\tau_j}^{t} (\bar{g}'_+(\tau_{j+1}) - \bar{g}'_+(\tau_j))\,\mathrm{d}s\,,$$

což je podle (4) menší než η.

Zbývá dokázat, že $\bar{g}(t) > 0$ pro $t \in \langle t_0, \infty)$. Nechť existuje $c \in \langle t_0, \infty)$ takové, že $\bar{g}(c) = 0$. Pak existuje číslo r tak, že $c \in \langle \tau_{r-1}, \tau_r \rangle$. Podle (5) platí $\bar{g}(\tau_r) = g(\tau_r) > 0$. To je spor, neboť $\bar{g}$ je nerostoucí.

Pomocná věta 2. *Buď f funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ taková, že pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$ je $f(t) \geqq$ konst > 0. Nechť f má spojitou druhou derivaci. Nechť existuje reálné číslo α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ takové, že $f^{-\alpha}$ je konvexní v $\langle t_0, \infty)$. Pak integrál*

$$\int_{t_0}^{\infty} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''| \, ds$$

konverguje a platí pro $t \geqq t_0$

$$\int_t^{\infty} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''| \, ds \leqq c(f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} |(f^{-\alpha}(t))| ,$$

kde konstanta c závisí jen na čísle α.

Důkaz. Z rovnosti

$$\tfrac{1}{2}(f^{-1/2}(t))'' = \{f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'\}' = (f^{-1/4}(t))'^2 + f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))''$$

plyne

$$|f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))| \leqq \tfrac{1}{2}|(f^{-1/2}(t))''| + (f^{-1/4}(t))'^2 .$$

Platí

$$(f^{-1/2}(t))' = \frac{1}{2\alpha} (f^{-\alpha}(t))^{\frac{1}{2\alpha}-1} (f^{-\alpha}(t))' .$$

Funkce $(f^{-\alpha})^{\frac{1}{2\alpha}-1}$ je omezená a nerostoucí v $\langle t_0, \infty)$ (neboť $f^{-\alpha}$ je nerostoucí a $\frac{1}{2\alpha} - 1 > 0\Big)$. Funkce $(f^{-\alpha})'$ je neklesající a omezená v $\langle t_0, \infty)$. Obě funkce mají tedy konečnou variaci a tedy i funkce $(f^{-1/2})'$ má konečnou variaci a zřejmě platí

$$\int_t^{\infty} |(f^{-1/2}(s))''| \, ds = \operatorname*{var}_{\langle t, \infty)} (f^{-1/2}(s))' \leqq \frac{1}{\alpha} (f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} |(f^{-\alpha}(t))'| .$$

Dále platí

$$(f^{-1/4}(t))'^2 = \frac{1}{16\alpha^2} (f^{-\alpha}(t))^{\frac{1}{2\alpha}-2} (f^{-\alpha}(t))'^2 .$$

Z rovnosti

$$\int_{f^{-\alpha}(t)}^{f^{-\alpha}(\infty)} x^{\frac{1}{2\alpha}-2} \, dx = \int_t^{\infty} (f^{-\alpha}(s))^{\frac{1}{2\alpha}-2} (f^{-\alpha}(s))' \, ds$$

plyne konvergence integrálu vpravo, a protože je $(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0} \leqq (f^{-\alpha}(t))' \leqq 0$, i konvergence integrálu $\int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))'^2 \, ds$. Snadno se spočte, že

$$\int_t^\infty (f^{-1/4}(s))'^2 \, ds \leqq \frac{1}{8\alpha} \cdot \frac{1}{1-2\alpha} (f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} \, |(f^{-\alpha}(t))'| \, .$$

Tím je věta dokázána.

V dalším budeme potřebovat ještě následující tvrzení (viz [1] str. 46):

Pomocná věta 3. *Buďte φ, ψ nezáporné spojité funkce, c kladná konstanta. Nechť pro $t \geqq t_0$ platí*

$$\varphi(t) \leqq c + \int_{t_0}^t \varphi(s) \, \psi(s) \, ds \, .$$

Potom je pro $t \geqq t_0$

$$\varphi(t) \leqq c \exp \left(\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) .$$

II

Věta 1. *Buď f funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ taková, že pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$ je $f(t) \geqq$ konst > 0. Nechť existuje reálné číslo α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ takové, že $f^{-\alpha}$ je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$. Potom pro obecné řešení diferenciální rovnice* (1) *platí následující asymptotické vzorce:*

$$\begin{aligned} y(t) &= f^{-1/4}(t) \, \{y_0 \sin \left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \varphi_0\right) + \gamma(t)\} \, , \\ y'(t) &= f^{1/4}(t) \, \{y_0 \cos \left(\int_{t_0}^t f(s)^{1/2} \, ds + \varphi_0\right) + \delta(t)\} \, , \end{aligned} \tag{6}$$

kde $\gamma(t) \to 0$, $\delta(t) \to 0$ pro $t \to \infty$, a platí pro $t \geqq t_0$

$$|\gamma(t+2)| \leqq \text{konst} \, |(f^{-\alpha}(t))'_+| \, ; \quad |\delta(t+2)| \leqq \text{konst} \, |(f^{-\alpha}(t))'_+| \, .$$

Není-li y nulové řešení, pak $y_0 \neq 0$.

Důkaz. Větu dokážeme nejprve za předpokladu, že funkce f má spojitou druhou derivaci.

Diferenciální rovnici

$$z'' + \{f(t) - f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))''\} \, z = 0 \tag{7}$$

převedeme na soustavu

$$\mathbf{v}' = \begin{Vmatrix} 0 \, , & 1 \\ -f(t) + f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'' , & 0 \end{Vmatrix} \mathbf{v} \, , \tag{8}$$

která má obecné řešení

$$\mathbf{v}(t) = \begin{Vmatrix} z_0 f^{-1/4}(t) \sin\left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \psi_0\right) \\ z_0 (f^{-1/4}(t))' \sin\left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \psi_0\right) + z_0 f^{1/4}(t) \cos\left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \psi_0\right) \end{Vmatrix} . \tag{9}$$

Podobně rovnici (1) převedeme na soustavu dvou lineárních rovnic a upravíme takto

$$\mathbf{u}' = \begin{Vmatrix} 0 & , 1 \\ -f(t) + f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'', & 0 \end{Vmatrix} \mathbf{u} + \begin{Vmatrix} 0 & , 0 \\ -f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'', & 0 \end{Vmatrix} \mathbf{u} . \qquad (10)$$

Rovnice (10) je vlastně rovnice (8) s pravou stranou. Její obecné řešení je dáno vzorcem (viz [1], kap. I, věta 3)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) + \int_{t_0}^{t} V(t)\, V^{-1}(s)\, B(s)\, \mathbf{u}(s)\, \mathrm{d}s .$$

V je matice, kde prvním sloupcem je řešení rovnice (8) dané počáteční podmínkou $v_1^{(1)}(t_0) = 1$, $v_2^{(1)}(t_0) = 0$; druhým sloupcem je řešení rovnice (8) dané počáteční podmínkou $v_1^{(2)}(t_0) = 0$, $v_2^{(2)}(t_0) = 1$. Determinant matice V je (viz [1], kap. I, věta 2) roven jedné.

V^{-1} je matice inversní k matici V

$$V^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} v_2^{(2)}(t), & -v_1^{(2)}(t) \\ -v_2^{(1)}(t), & v_1^{(1)}(t) \end{Vmatrix},$$

B je matice

$$B(t) = \begin{Vmatrix} 0 & , 0 \\ -f^{1/4}(t)(f(t)^{-1/4})'', & 0 \end{Vmatrix}.$$

Snadno se nyní spočítá

$$V(t)\, V^{-1}(s)\, B(s)\, \mathbf{u}(s) =$$

$$= \begin{Vmatrix} -f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(s))''(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r)\, u_1(s) \\ -\{f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(s))''(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r) + (f^{-1/4}(t))'(f^{-1/4}(s))''(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r)\}\, u_1(s) \end{Vmatrix}$$

a odtud plyne, že

$$u_1(t) = f^{-1/4}(t)\, \{z_0 \sin(\int_{t_0}^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r + \psi_0) - \int_{t_0}^t (f^{-1/4}(s))''\, (\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r)\, u_1(s)\, \mathrm{d}s\} ,$$

$$(11)$$

$$u_2(t) = f^{1/4}(t)\, \{z_0 \cos\, (\int_{t_0}^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r + \psi_0) - \int_{t_0}^t (f^{-1/4}(s))''\, (\cos \int_{t_0}^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r)\, u_1(s)\, \mathrm{d}s\} +$$

$$+ (f^{-1/4}(t))'\, \{z_0 \sin\, (\int_{t_0}^t f^{1/2}(t)\, \mathrm{d}r + \psi_0) - \int_{t_0}^t (f^{-1/4}(s))''\, (\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, \mathrm{d}r)\, u_1(s)\, \mathrm{d}s\} .$$

Z vyjádření (11) je vidět, že

$$|f^{1/4}(t)\, u_1(t)| \leqq |z_0| + \int_{t_0}^t |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''| \,.\, |f^{1/4}(s)\, u_1(s)|\, \mathrm{d}s ,$$

a tedy podle pomocných vět 2 a 3 je

$$|f^{1/4}(t)\, u_1(t)| \leqq |z_0| \exp \left(\int_{t_0}^{t} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''|\, ds\right) \leqq$$
$$\leqq |z_0| \exp \{c(f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1}\, |(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}|\} . \tag{12}$$

Použijeme-li tento výsledek, obdržíme, že integrály

$$\int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\,,$$
$$\int_{t}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\,, \quad \int_{t}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds$$

konvergují pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$.

Dokážeme, že vektor

$$\left\| \begin{array}{l} f^{-1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds \\ f^{1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\, + \\ \qquad + (f^{-1/4}(t))' \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dt\right) u_1(s)\, ds \end{array} \right\|$$

je řešením soustavy (8).

Označíme-li

$$(f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s) = g_1(s, t) \text{ a } (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s) = g_2(s, t)\,,$$

pak obě funkce $g_1(s, t)$, $g_2(s, t)$ jsou integrovatelné pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$, parciální derivace $\frac{\partial g_1}{\partial t}, \frac{\partial g_2}{\partial t}$ existují pro všechny body $(s, t) \in \langle t_0, \infty) \times \langle t_0, \infty)$ a mají integrovatelné majoranty. Můžeme derivovat za integračním znamením (viz [5], věta 108). Dosazením do soustavy (8) se pak snadno přesvědčíme o správnosti našeho tvrzení.

Tedy můžeme psát

$$f^{-1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds = f^{-1/4}(t)\, Z_0 \sin \left(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\, ds + \Psi_0\right),$$
$$f^{1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\, + \tag{13}$$
$$+ (f^{-1/4}(t))' \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds = Z_0 f^{1/4}(t) \cos \left(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(r)\, dr + \Psi_0\right) +$$
$$+ (f^{-1/4}(t))'\, Z_0 \sin \left(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\, ds + \Psi_0\right).$$

Položíme-li

$$y_0 = \sqrt{z_0^2 + Z_0^2 - 2z_0 Z_0 \cos(\psi_0 - \Psi_0)}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{z_0 \sin\psi_0 - Z_0 \sin\Psi_0}{z_0\cos\psi_0 - Z_0\cos\Psi_0}\,,$$

pak vztahy (11) můžeme přepsat takto:

$$u_1(t) = f^{-1/4}(t)\,\{y_0 \sin(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \int_t^\infty (f^{-1/4}(s))''\,(\sin\int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\}\,,$$

$$u_2(t) = f^{1/4}(t)\,\{y_0\cos(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s) + \varphi_0) + \int_t^\infty (f^{-1/4}(s))''\,(\cos\int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\} +$$
$$+ (f^{-1/4}(t))'\,\{y_0\sin(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \int_t^\infty (f^{-1/4}(s))''\,(\sin\int_s^t f^{1/2}(r)\,dr) u_1(s)\,ds\}\,.$$

Označíme

$$\gamma(t) = \int_t^\infty (f^{-1/4}(s))''\,(\sin\int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\,,$$

$$\delta(t) = f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'\,y_0\sin(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \int_t^\infty (f^{-1/4}(s))''(\cos\int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)ds +$$
$$+ f^{-1/4}(t)\,(f^{-1/4}(t))'\int_t^\infty (f^{-1/4}(s))''\,(\sin\int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\,.$$

Použijeme-li nyní vztahu

$$f^{-1/4}(t)\,(f^{-1/4}(t))' = \frac{1}{2}\,(f^{-1/2}(t))' = \frac{1}{4\alpha}\,(f^{-\alpha}(t))^{\frac{1}{2\alpha}-1}\,(f^{-\alpha}(t))',$$

pomocné věty 2 a odhadu (12), obdržíme

$$\gamma(t) \to 0\,, \quad \delta(t) \to 0 \text{ pro } t \to \infty\,, \quad |\gamma(t+2)| \leqq \text{konst}\,|(f^{-\alpha}(t))'|\,,$$
$$|\delta(t+2)| \leqq \text{konst}\,|(f^{-\alpha}(t))'|\,.$$

Dokážeme, že pro nenulové řešení je $y_0 \neq 0$. Zřejmě je $z_0 \neq 0$. Stačí dokázat, že $z_0 \neq Z_0$. Podle vlastnosti e) k libovolně malému $\eta > 0$ lze zvolit t_0 tak, aby

$$|(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}| < \eta\,.$$

Zvolíme-li vhodně η, obdržíme ze vztahů (13), že $Z_0^2 \leqq \frac{1}{2}z_0^2$.

Tím je první část důkazu hotova.

Nyní dokážeme asymptotické vzorce (6) bez doplňujících předpokladů o funkci f. Podle pomocné věty 1 lze na intervalu $\langle t_0, \infty)$ sestrojit k funkci $f^{-\alpha}$ stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí $\bar{g}_n = f_n^{-\alpha}$ takových, že mají nezápornou spojitou derivaci a pro všechna n platí

$$0 < f_n^{-\alpha}(t) \leqq f_n^{-\alpha}(t_0) = f^{-\alpha}(t_0)\,, \quad |(f_n^{-\alpha}(t))'| \leqq p(t)\,,$$

kde $p(t+2) = |(f^{-\alpha}(t))'_+|$.

Funkce f_n mají spojitou druhou derivaci, pro $t \in \langle t_0, \infty)$ platí $0 < \text{konst} \leqq f_n(t)$. Funkce f_n konvergují stejnoměrně k f na každém ohraničeném intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, kde $t_0 < t_1 < \infty$.

Pro obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + f_n(t)\, y = 0$ platí asymptotické vzorce (6).

Podle obecné věty o závislosti řešení systému diferenciálních rovnice na parametru platí: Buď y_n řešení rovnice $y'' + f_n(t)\, y = 0$ a y_n' jeho derivace, určené počáteční podmínkou

$$y_n(t_0) = a\,, \quad y_n'(t_0) = b\,.$$

Potom $y_n(t)$, $y_n'(t)$ jsou na každém ohraničeném intervalu stejně omezené a

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)\,, \quad \lim_{n\to\infty} y_n'(t) = y'(t)\,,$$

kde $y(t_0) = a$, $y'(t_0) = b$ a y je řešení rovnice (1).

Pro y_n platí asymptotické vzorce

$$y_n(t) = f_n^{-1/4}(t)\,\{y_{0,n} \sin\,(\int_{t_0}^{t} f_n^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_{0,n}) + \gamma_n(t)\}\,,$$

$$y_n'(t) = f_n^{1/4}(t)\,\{y_{0,n} \cos\,(\int_{t_0}^{t} f_n^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_{0,n}) + \delta_n(t)\}\,.$$

φ_{0n} je zřejmě možné volit vždy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a můžeme tedy vybrat posloupnost $y_{n,i}(t)$ tak, že $\varphi_{0,n_i} \to \varphi_0$. Z konstrukce funkcí f_n je vidět, že $(f_n^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} = (f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1}$; $(f_n^{-\alpha}(t))'_{t=t_0} = (f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}$. Ze vzorce (11) plyne, že z_0 nezávisí na n.

Je tedy

$$|\gamma_n(t)| \leqq |z_0| \int_t^\infty |(f_n^{-1/4}(s))''\, f_n^{-1/4}(s)|\,\mathrm{d}s \exp\{c(f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1}\, |(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}|\} \leqq \text{konst}\; p(t)\,.$$

Posloupnost $y_{0,n}$ je omezená a lze tedy vybrat $y_{n_i}(t)$ tak, že $y_{0,n_i} \to y_0$.

Protože $y_n(t)$ konverguje k $y(t)$ a $f_n^{-1/4}(t)\, y_{0,n} \sin\,(\int_{t_0}^{t} f_n^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_{0,n})$ konverguje k $f^{-1/4}(t)\, y_0 \sin\,(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0)$ pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$, musí $\gamma_n(t)$ konvergovat bodově k funkci $\gamma(t)$, která splňuje vztah

$$|\gamma(t)| \leqq \text{konst}\; p(t)\,.$$

Podobně, protože $y_n'(t)$ konverguje k $y'(t)$, musí také $\delta_n(t)$ konvergovat bodově k funkci $\delta(t)$, o které opět platí

$$|\delta(t)| \leqq \text{konst}\; p(t)\,.$$

Řešení y má tedy asymptotické vyjádření (6). Stejně jako v první části důkazu se dokáže, že $y_0 \neq 0$ pro každé nenulové řešení.

Diferenciální rovnice $(m(t)\,y')' + q(t)\,y = 0$ se dá substitucí $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{m(s)}\,\mathrm{d}s$ převést na tvar (1). Pak z věty 1 plyne následující tvrzení.

Věta 2. *Buď m funkce mající spojitou derivaci, q spojitá funkce na intervalu $\langle t_0, \infty)$. Buď $m(t)\,q(t) \geqq$ konst > 0 a nechť*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{m(s)} \to \infty\,.$$

Utvořme k funkci x funkci inversní a označme

$$m^*(x) = m(t(x))\,, \quad q^*(x) = q(t(x))\,.$$

Buď α libovolné číslo takové, že $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Nechť $(m^*(x)\,q^*(x))^{-\alpha}$ je konvexní pro $x \in \langle 0, \infty)$. Potom pro obecné řešení diferenciální rovnice

$$(m(t)\,y')' + q(t)\,y = 0$$

platí následující asymptotické vzorce:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{m(t)\,q(t)}} \left\{y_0 \sin\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{m(s)}}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right\},$$

$$y'(t) = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{m^3(t)}} \left\{y_0 \cos\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{m(s)}}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right\}.$$

III

Ve větě 1 jsou dokázány asymptotické vzorce pro řešení diferenciální rovnice (1) za předpokladu, že $f \geqq$ konst > 0 a $f^{-\alpha}$ je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$ pro nějaké α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$. Následující příklad ukáže, že nelze předpokládat $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$.

Sestrojíme nejprve na intervalu $\langle 0, \infty)$ funkci φ takto: Zvolme $\varphi(0) = 1$. Pak existuje právě jedno číslo $0 < a_1 < 1$ tak, že

$$\frac{a_1 - 1}{16} \lg a_1 = 5\pi\,,$$

neboť funkce $D_1(x) = \frac{x - 1}{16} \lg x$ je v intervalu $(0, 1\rangle$ spojitá, klesající a platí $D_1(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} D_1(x) = \infty$. Definujeme $\varphi_1(t) = \frac{a_1 - 1}{2} t + 1$ pro $t \in \left\langle 0, \frac{2}{1 - a_1} \right\rangle$. Rovnice $y'' + \frac{1}{\varphi_1^2} y = 0$ má řešení určené počáteční podmínkou $y(0) = 0, y'(0) \neq 0$:

$$y(t) = \sqrt{\varphi_1(t)}\, y_0^{(1)} \sin \left(\frac{\sqrt{4 - k_1^2}}{2k_1} \lg \varphi_1(t) \right),$$

kde $k_1 = \frac{a_1 - 1}{2} < 0$.

Zvolme $t_1 \geqq 2$ tak, aby $y(t_1) = 0$ a $y(t) \neq 0$ pro $t \in \langle 2, t_1)$. Označíme $y'(t_1) = c_1$ a definujeme $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ pro $t \in \langle 0, t_1 \rangle$.

Nyní zvolíme $0 < a_2 < \varphi(t_1)$ tak, že

$$\frac{a_2 - \varphi(t_1)}{16} \lg \frac{a_2}{\varphi(t_1)} = 5\pi .$$

To opět lze, neboť funkce $D_2(x) = \frac{x - \varphi(t_1)}{16} \lg \frac{x}{\varphi(t_1)}$ je v intervalu $(0, \varphi(t_1)\rangle$ spojitá, klesající a platí $\lim\limits_{x \to 0+} D_2(x) = +\infty$, $D_2(\varphi(t_1)) = 0$. Definujeme $\varphi_2(t) = \frac{a_2 - \varphi(t_1)}{2} (t - t_1) + \varphi(t_1)$ pro $t \in \left\langle t_1, t_1 + \frac{2}{\varphi(t_1) - a_2} \right\rangle$. Zřejmě $\varphi_2(t_1) = \varphi(t_1)$. Rovnice $y'' + \frac{1}{\varphi_2^2} y = 0$ má řešení určené počátečními podmínkami $y(t_1) = 0$, $y'(t_1) = c_1$:

$$y(t) = \sqrt{\varphi_2(t)}\, y_0^{(2)} \sin \left(\frac{\sqrt{4 - k_2^2}}{2k_2} \lg \frac{\varphi_2(t)}{\varphi(t_1)} \right),$$

kde $k_2 = \frac{a_2 - \varphi(t_1)}{2} < 0$, $|y_0^{(2)}| = |y_0^{(1)}| \frac{\sqrt{4 - k_1^2}}{\sqrt{4 - k_2^2}}$.

Zvolíme t_2 tak, aby $t_2 - t_1 \geqq 2$, $y(t_2) = 0$, $y(t) \neq 0$ pro $t \in \langle t_1 + 2, t_2)$, a definujeme $\varphi(t) = \varphi_2(t)$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$.

Stejným způsobem pokračujeme dále. Tím máme v celém intervalu $\langle 0, \infty)$ definovanou funkci φ jakožto lomenou čáru spojující body $[t_n, \varphi(t_n)]$. Zřejmě je $1 \geqq \varphi(t) > 0$ pro $t \in \langle t_0, \infty)$.

Dokážeme, že funkce φ je konvexní. K tomu stačí, aby derivace zleva φ'_- a derivace zprava φ'_+ byly neklesající. To plyne z nerovnosti

$$0 > k_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \varphi(t_n)}{2} > \frac{a_n - \varphi(t_{n-1})}{2} = k_n .$$

Kdyby totiž bylo $\frac{a_{n+1} - \varphi(t_n)}{2} \leqq \frac{a_n - \varphi(t_{n-1})}{2}$, pak $a_{n+1} + \varphi(t_{n-1}) \leqq a_n + \varphi(t_n) \leqq 2a_n$. To je spor, protože funkce $D_n(x) = \frac{x - \varphi(t_{n-1})}{2} \lg \frac{x}{\varphi(t_{n-1})}$ je v intervalu $(0, \varphi(t_{n-1})\rangle$ spojitá, klesající a platí

$$D_n(\varphi(t_{n-1})) = 0\,, \quad D_n(a_n) = 5\pi\,, \quad \lim_{x\to 0_+} D_n(x) = +\infty\,,$$

$$D_n\left(\frac{1}{2}\,\varphi(t_{n-1})\right) = \frac{\varphi(t_{n-1})}{32}\lg 2 < 5\pi = D_n(a_n) \text{ a tedy } \varphi(t_{n-1}) > 2a_n\,.$$

Funkci f definujeme předpisem $f = \dfrac{1}{\varphi^2}$. Pak $f(t) \geqq 1$ pro všechna $t \in \langle 0, \infty)$ a $f^{-1/2}$ je konvexní, neboť $f^{-1/2} = \varphi$. Jestliže věta 1 platí i pro $\lambda = \frac{1}{2}$, pak pro každé řešení rovnice (1), kde f je právě definovaná funkce, by platilo asymptotické vyjádření

$$t \in \langle t_n, t_{n+1}\rangle \Rightarrow y(t) = \sqrt{\varphi(t)}\left\{y_0 \sin\left(\int_{t_n}^{t}\frac{1}{\varphi(r)}\,\mathrm{d}r + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{\varphi(r)}\,\mathrm{d}r + \varphi_0\right) + o(1)\right\} =$$

$$= \sqrt{\varphi(t)}\left\{y_0 \sin\left(\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{k_{i+1}}\lg\frac{\varphi(t_{i+1})}{\varphi(t_i)} + \varphi_0\right) + o(1)\right\},$$

kde $k_{i+1} = \dfrac{a_{i+1} - \varphi(t_i)}{2}$.

Ovšem rovnice (1) má v našem případě řešení

$$t \in \langle t_n, t_{n+1}\rangle \Rightarrow y(t) = \sqrt{\varphi(t)}\,y_0^{(n+1)} \sin\left(\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)}\right), \tag{14}$$

kde $|y_0^{(n+1)}| = |y_0^{(1)}|\dfrac{\sqrt{4 - k_1^2}}{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}$. Zřejmě $|y_0^{(n+1)}| > c > 0$ pro všechna n.

Zvolme nyní interval $\langle t_n, t_{n+1}\rangle$ a určeme na tomto intervalu počet nulových bodů funkce $y(t)$ vyjádřené vzorcem (14). Funkce $y(t) = 0$, právě když

$$\sin\left(\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)}\right) = 0\,.$$

Body t_n, t_{n+1} jsou nulové body funkce $y(t)$ a tedy na intervalu $\langle t_n, t_{n+1}\rangle$ je právě

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} + 1$$

nulových bodů funkce $y(t)$.

Avšak platí

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} + 1 \leqq \left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k_{n+1}} - \frac{k_{n+1}}{8}\right)\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right] + 1 \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} - \frac{1}{\pi}\frac{k_{n+1}}{8}\lg\frac{a_{n+1}}{\varphi(t_n)}\right] + 1 = \left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right] - 4\,,$$

kde $[a]$ značí celou část čísla a.

Všimněme si nyní asymptotického vyjádření. Protože

$$\sin\left(\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{k_{i+1}}\lg\frac{\varphi(t_{i+1})}{\varphi(t_i)}+\varphi_0\right)$$

má na intervalu $\langle t_n, t_{n+1}\rangle$ nejméně

$$\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right]$$

nulových bodů, má každé řešení y podle tohoto vyjádření na intervalu $\langle t_n, t_{n+1}\rangle$ nejméně

$$\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right]-2$$

nulových bodů. Tedy počet nulových bodů řešení y a počet nulových bodů asymptotického vyjádření se liší. Asymptotický vzorec není správný, větu 1 nelze rozšířit pro $\alpha = \frac{1}{2}$.

LITERATURA

[1] *R. Bellman:* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Moskva, 1954. (Ruský překlad knihy „Stability Theory of Differential Equations".)

[2] *M. Zlámal:* Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, Czechoslovak Mathematical Journal *81* (1956), 75—91.

[3] *J. Kurzweil:* Sur l'equation $\ddot{x} + f(t)\,x = 0$. Časopis pro pěstování matematiky *82* (1957), 218—226.

[4] *V. Jarník:* Diferenciální počet II, Praha 1953.

[5] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''+f(t)y = 0$

ВЛАДИМИР ДОЛЕЖАЛ (Vladimír Doležal), Прага

(Поступило в редакцию 3/X 1957 г.)

В этой работе доказана теорема:

Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Пусть* $f(t) \geqq$ konst > 0, *и пусть функция* $f^{-\alpha}$ *выпукла в* $\langle t_0, \infty)$. *Тогда для общего решения уравнения*

$$y'' + f(t)\,y = 0 \tag{1}$$

справедливы асимптотические формулы

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f^{-1/4}(t)\{y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + \gamma(t)\}\,,\\
y'(t) &= f^{1/4}(t)\{y_0 \cos (\int_{t_0}^{t} (f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + \delta(t)\}\,,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\gamma(t) \to 0$, $\delta(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и*

$$|\gamma(t + 2)| \leqq \text{konst}\ |(f^{-\alpha}(t))'_+|\,, \quad |\delta(t + 2)| \leqq \text{konst}\ |(f^{-\alpha}(t))'_+|\,.$$

Если y *является ненулевым решением* (1), *то* $y_0 \neq 0$.

Докажем теорему, считая сначала что функция f имеет непрерывную вторую производную. Мы знаем решения дифференциального уравнения

$$z'' + \{f(t) - f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t)'')\}\, z = 0\,. \tag{7}$$

Уравнение (1) перепишем в виде уравнения (7) с правой частью. Решение уравнения (1) тогда находится по знакомой формуле (см. [1], глава 1, теорема 3). Оттуда вытекают асимптотические формулы (6).

В общем случае мы построим к функции f последовательность функций f_n, которые имеют непрерывную вторую производную и используем теорему о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра.

В дальнейшем на примере показано, что предположение о выпуклости функции $f^{-1/2}$ не является достаточным условием справедливости асимптотических формул (6).

Zusammenfassung

DIE ASYMPTOTISCHEN FORMELN FÜR DIE LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + f(t)\,y = 0$

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Eingelangt am 3. Oktober 1957)

In dieser Arbeit wird folgender Satz bewiesen:

Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Es sei* $f(t) \geqq \text{konst} > 0$ *und die Funktion* $f^{-\alpha}$ *sei konvex in* $\langle t_0, \infty)$. *Dann gelten für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$y'' + f(t)\,y = 0 \tag{1}$$

folgende asymptotische Formeln:

$$y(t) = f^{-1/4}(t)\,\{y_0 \sin(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\, ds + \varphi_0) + \gamma(t)\}\,,$$
$$y'(t) = f^{1/4}(t)\,\{y_0 \cos(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\, ds + \varphi_0) + \delta(t)\}\,, \tag{6}$$

wo $\gamma(t) \to 0$, $\delta(t) \to 0$ *für* $t \to \infty$ *und*

$$|\gamma(t+2)| \leqq \text{konst}\, |(f^{-\alpha}(t))'_+|\,, \quad |\delta(t+2)| \leqq \text{konst}\, |(f^{-\alpha}(t))'_+| \text{ } \textit{ist.}$$

Ist y *nicht die Null-Lösung von* (1), *dann ist* $y_0 \neq 0$.

Der Beweis ist zuerst für den Fall, wenn die Funktion f eine stetige zweite Ableitung hat, ausgeführt. Wir kennen die Lösung der Differentialgleichung

$$z'' + \{f(t) - f^{1/4}(t)\,(f^{-1/4}(t))''\}\, z = 0\,. \tag{7}$$

Die Gleichung (1) drücken wir als die Gleichung (7) mit der rechten Seite aus. Die Lösung der Gleichung (1) ist dann durch die bekannte Formel gegeben (siehe [1], Kap. I, Satz 3). Hieraus können die asymptotischen Formeln (6) abgeleitet werden.

Im allgemeinen Falle konstruieren wir zur Funktion f eine Funktionenfolge f_n mit stetiger zweiten Ableitung und benützen den Satz über die Abhängigkeit der Lösung der Differentialgleichungen vom Parameter.

Endlich wird an einem konstruierten Beispiel gezeigt, dass die Voraussetzung, dass die Funktion $f^{-1/2}$ konvex ist, schon nicht mehr dazu genügt, dass die asymptotischen Formeln (6) gelten.