Časopis pro pěstování matematiky

Ludvík Janoš

Principy aproximace funkcionálů lineárními funkcionály

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 469--472

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108634`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958) Praha

REFERÁTY

PRINCIPY APROXIMACE FUNKCIONÁLŮ LINEÁRNÍMI FUNKCIONÁLY

(Vlastní referát L. JANOŠE o přednášce konané v matematické obci pražské dne 3. března 1958)

V technických vědách se často setkáváme s úlohou stanovit veličiny závislé na jedné nebo více funkcích. Takovou veličinu nazýváme funkcionálem. Pro jednoduchost se omezíme na funkcionály s jedním funkcionálním argumentem. Definiční obor bude tedy určitá množina funkcí. Jako příklad uveďme nosník délky $l = 1$, zatížený příčnými silami. Algebraický součet všech sil na intervalu $\langle 0, s \rangle$ označíme $Q(s)$; $Q(s)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Je-li $\Gamma(x, s)$ příčinková funkce nosníku, pak průhyb nosníku $y(x)$ v bodě x je dán vztahem

$$y(x) = \int_0^1 \Gamma(x, s) \, dQ(s) .$$

Při pevném x je veličina $y(x)$ závislá na rozložení sil podél nosníku a je tedy funkcionálem definovaným na množině funkcí $Q(s)$ s konečnou variací na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tato množina je lineárním prostorem (modulem nad tělesem reálných čísel) a je tedy možno mluvit o lineárnosti nebo nelineárnosti funkcionálů na něm definovaných. Veličina $y(x)$ je očividně lineárním funkcionálem. Definujeme nyní funkcionál $\varphi(Q)$ předpisem

$$\varphi(Q) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} \left| \int_0^1 \Gamma(y, s) \, dQ(s) \right| .$$

Funkcionál $\varphi(Q)$ značí maximální průhyb vyvolaný silami $Q(s)$ a je to příklad nelineárního funkcionálu.

Jako další příklad uveďme určení vlastních frekvencí $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ příčných kmitů pružných kontinuí (nosníky, hřídele, struny) v závislosti na rozložení hmot. Položíme-li $\lambda_i = \dfrac{1}{\omega_i^2}$, značí-li $\Gamma(x, s)$ příčinkovou funkci kontinua (délka kontinua buď rovna jedné) a je-li $M(x)$ celková hmota rozložená na intervalu $\langle 0, x \rangle$, jsou veličiny λ_i vlastními čísly integrální rovnice

$$\int_0^1 \Gamma(x, s) \, y(s) \, dM(s) = \lambda_i \, y(x) .$$

Každé vlastní číslo λ (fixujeme index i a píšeme prostě $\lambda = \lambda[M]$ místo λ_i) závisí na rozložení hmot a je tedy funkcionálem na množině $\mathfrak{S}$ všech neklesajících nezáporných funkcí $M(x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Na rozdíl od předchozího příkladu není množina $\mathfrak{S}$ modulem, nýbrž pouze semimodulem.

Je nasnadě prozkoumat otázku aproximability funkcionálu $\lambda[M]$ lineárními funkcionály na $\mathfrak{S}$, tedy výrazy typu $\int_0^1 V(x) \, dM(x)$, kde $V(x)$ je vhodná spojitá funkce. Za nepřesnost aproximace $\int_0^1 V(x) \, dM(x)$ pokládáme číslo

$$N[V] = \sup_{M \in \mathfrak{S}} \left| \frac{\int V \, dM}{\lambda[M]} - 1 \right| .$$

Jak patrno, nepřesnost $N[V]$ je sama funkcionálem definovaným na množině $C(0, 1)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Stanovme číslo

$$\alpha(\lambda) = \inf_{V \in C(0,1)} N[V] .$$

Toto číslo pak udává nejmenší možnou chybu aproximace funkcionálu $\lambda[M]$ lineárními funkcionály typu $\int_0^1 V \, \mathrm{d}M$.

V práci „Aproximace první vlastní hodnoty integrální rovnice lineárním funkcionálem", Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), 304—330 jsem ukázal, že pro funkcionál $\lambda[M] = \lambda_1[M]$ je možno udat nejlepší aproximaci (a to jedinou), na níž je realisováno minimum nepřesnosti. Příslušná váhová funkce $V^*(x)$ je dána vztahem $V^*(x) = \beta\, \Gamma(x, x)$, kde $\beta = \dfrac{2}{2 + N[\Gamma(x, x)]}$.

Popsané metody bylo použito ke stanovení kritických otáček turbinových hřídelů. Minimální chyba $\alpha(\lambda_1)$ dává v tomto případě hodnotu $\frac{1}{7}$, jde-li o prismatický hřídel uložený ve dvou ložiskách. To znamená, že první kritické otáčky ω_1 jsou určeny s relativní nepřesností $\frac{1}{14}$, což značí, že chyba je asi 7%. V praxi se žádá, aby chyba nepřesahovala hodnoty 2%. Bylo proto nutno hledat lepší aproximaci.

Jak bylo uvedeno, číslo $\alpha(\lambda)$ je definováno předpisem

$$\alpha(\lambda) = \inf_{V \in C(0,1)} \left\{ \max_{M \in \mathfrak{S}} \left| \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right| \right\} .$$

Jak patrno, číslo $\alpha(\lambda)$ se může zmenšit, přejdeme-li od množiny $\mathfrak{S}$ k nějaké její podmnožině $\mathfrak{S}'$. Vzniká tedy myšlenka aproximovat funkcionál $\lambda[M]$ lineárním funkcionálem $\int_0^1 V \, \mathrm{d}M$ nikoli na celé množině $\mathfrak{S}$, nýbrž na určité její „technické" podmnožině, jejímiž prvky by byla jen v praxi přicházející rozložení hmoty. Aby bylo možno dosažené výsledky co nejpohodlněji přenést na nové hledisko, bylo přirozené žádat, aby se algebraická struktura množiny $\mathfrak{S}'$ nelišila od $\mathfrak{S}$. Zvolíme proto za $\mathfrak{S}'$ nějaký subsemimodul modulu $\mathfrak{S}$ (což znamená podmnožinu uzavřenou vůči sčítání a násobení nezápornými čísly).

Budiž nyní $C(x)$ libovolná funkce spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Za množinu $\mathfrak{S}'$ vezmeme všechna rozložení $M \in \mathfrak{S}$ splňující nerovnost

$$\int_0^1 C(x) \, \mathrm{d}M(x) \geqq 0 .$$

Je zřejmé, že $\mathfrak{S}'$ je subsemimodul. $\mathfrak{S}'$ závisí na volbě funkce $C(x)$. Bude-li funkce $C(x)$ např. u krajů záporná a ve středu kladná, budou v $\mathfrak{S}'$ jen taková rozložení, která mají většinu své hmoty ve střední části intervalu, čímž je dána „techničnost" subsemimodulu $\mathfrak{S}'$.

Jde nyní o to, stanovit číslo

$$N'[V] = \max_{M \in \mathfrak{S}'} \left| \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right| .$$

Zřejmě je $N'[V] \leqq N[V]$. Aby bylo možno $N'[V]$ stanovit podobnou metodou jako $N[V]$ (metoda je vyložena ve zmíněné práci), bylo odvozeno lemma, které je samo o sobě zajímavé:

Buďtež $A(x)$ $B(x)$ spojité funkce na $\langle 0, 1\rangle$ všude kladné a $C(x)$ spojitá. Jde o to, stanovit

$$\sup_{M \in \mathfrak{S}} \int_0^1 A(x) \, \mathrm{d}M(x)$$

při vedlejších podmínkách

$$\int_0^1 B(x) \, \mathrm{d}M(x) = 1 \,, \quad \int_0^1 C(x) \, \mathrm{d}M(x) = 0 \,.$$

Tomuto problému budeme říkat problém I.

Označme nyní J množinu všech čísel t takových, že $B(x) + t\,C(x) > 0$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Je zřejmé, že množina J je intervalem. Zvolme nyní libovolné $t \in J$ a řešme problém stanovit

$$\sup \int_0^1 A(x) \, \mathrm{d}M(x)$$

při jediné vedlejší podmínce

$$\int_0^1 [B(x) + t\,C(x)] \, \mathrm{d}M(x) = 1 \,,$$

což je triviální problém, který označíme jako problém II.

Označíme-li S_I nalezené suppremum problému I a $S_{II}(t)$ problému II, pak platí

$$S_I = \inf_{t \in J} S_{II}(t) \,.$$

Dosavadní úvahy lze aplikovat také na libovolný funkcionál homogenní prvního řádu na $\mathfrak{S}$. Nyní si všimněme funkcionálu $\lambda[M]$, který je největším vlastním číslem integrální rovnice

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s) \, \mathrm{d}M(s) = \lambda\, y(x) \,,$$

kde $\Gamma(x, s)$ je positivně definitní jádro. Tento funkcionál lze pak definovat formulí

$$\lambda[M] = \sup_{y \in C(0,1)} \frac{\int_0^1 \int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(x)\, y(s) \, \mathrm{d}M(x) \, \mathrm{d}M(s)}{y^2(x) \, \mathrm{d}M(x)} \,.$$

Bylo ukázáno, že funkcionál $\lambda[M]$ takto definovaný je subaditivní a dokonce striktně subaditivní, což znamená, že pro $M_1, M_2 \in \mathfrak{S}$ platí

$$\lambda[M_1 + M_2] \leqq \lambda[M_1] + \lambda[M_2] \,,$$

přičemž rovnost může nastat jen v tom případě, že některá z funkcí M_i $(i = 1, 2)$ vznikne násobením druhé nezáporným číslem.

Vlastnosti subaditivity a striktní subaditivity lze využít při stanovení supréma a infima výrazů typu $\dfrac{\lambda[M]}{\int v \, \mathrm{d}M}$ na libovolném subsemimodulu $\mathfrak{S}'$, což vede ke snadnému určení čísla $N'[V]$. Označíme-li totiž K množinu všech M takových, že

$$\int_0^1 V(x) \, \mathrm{d}M(x) = 1$$

a položíme-li $K' = K \cap \mathfrak{S}'$, jde o to, stanovit extrémy funkcionálu $\lambda[M]$ na K'. Zavedeme-li na $\mathfrak{S}$ slabou topologii, pak množiny K a K' jsou kompaktní. Funkcionál $\lambda[M]$ proto nabývá na K' svých extrémních hodnot.

Všimněme si, že množina K' je konvexní, tj. že obsahuje s každými svými dvěma body i úsečku je spojující. (Úsečkou o krajních bodech $M_1, M_2 \in \mathfrak{S}$ rozumíme množinu všech $M \in \mathfrak{S}$ tvaru $M = (1 - t) M_1 + tM_2$, kde $0 \leqq t \leqq 1$.)

Připomeňme ještě pojem vrcholu libovolné konvexní množiny $H \subset \mathfrak{S}$. Element M^* nazýváme vrcholem množiny H, není-li vnitřním bodem žádné úsečky o krajních bodech v množině H.

Nyní můžeme formulovat následující věty o extrémech subaditivních a striktně subaditivních funkcionálů:

1. *Subaditivní funkcionál $\lambda[M]$ nabývá na K' svého maxima alespoň v jednom vrcholu množiny K'. Je-li $\lambda[M]$ striktně subaditivní, pak nabývá svého maxima jen ve vrcholech množiny K'.*

2. *Množina těch $M \in K'$, v nichž subaditivní funkcionál $\lambda[M]$ nabývá svého minima na K', je konvexní podmnožinou $H \subset K'$. Jestliže $\lambda[M]$ je striktně subaditivní, má množina H jediný element.*

Ludvík Janoš, Praha

O KRITICKÝCH GRAFECH

(Vlastní referát K. Čulíka o přednášce proslovené v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 14. 4. 1958 v Brně)

Chromatickým rozkladem **aRS**-grafu $F(\varrho)$ ($\varrho \subset F \times F$ je areflexivní a symetrická binární relace) se rozumí rozklad $\overline{F}$ na množině F, který splňuje podmínku

$$x, y \in P,\ P \in \overline{F} \Rightarrow (x, y) \text{ non} \in \varrho\,. \tag{1}$$

Nejmenší mohutnost $\chi[F(\varrho)]$ ze systému mohutností všech chromatických rozkladů **aRS**-grafu $F(\varrho)$ se nazývá *chromatickým číslem grafu* $F(\varrho)$. Je-li $\chi[F(\varrho)] = \mathfrak{m}$, pak graf $F(\varrho)$ nazýváme $\mathfrak{m}$-*chromatickým grafem.*

Dvojici $x, y \in F$ nazýváme *souhlasnou* příp. *nesouhlasnou* v **aRS**-grafu $F(\varrho)$, jestliže platí

$$\begin{gathered} x \in X,\ y \in Y,\ X, Y \in \overline{F},\ \textit{kde } \overline{F} \textit{ je chromatický rozklad grafu } F(\varrho), \\ \textit{pro který platí } \operatorname{kard} \overline{F} = \chi[F(\varrho)] \Rightarrow X = Y \textit{ příp. } X \neq Y\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Lemma 1. *Je-li x, y souhlasná a y, z nesouhlasná dvojice v* **aRS**-*grafu $F(\varrho)$, pak x, z je nesouhlasná dvojice v $F(\varrho)$.*

Lemma 2. *Je-li σ množina všech nesouhlasných dvojic v* **aRS**-*grafu $F(\varrho)$, pak $\chi[F(\varrho)] = \chi[F(\varrho \cup \sigma)]$.*

Věta 1. *Nechť $F(\varrho)$ je* **aRS**-*graf. Pak binární relace $\sigma \subset F \times F$, definovaná podmínkou: $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow x, y$ je souhlasná dvojice v $F(\varrho)$, je ekvivalencí.*

Věta 2. *Dvojice $x, y \in F$ je souhlasná v* **aRS**-*grafu $F(\varrho)$, který má konečné chromatické číslo, právě tehdy, když $\chi[F(\varrho)] < \chi[F(\varrho')]$, kde $\varrho' = \varrho \cup \{(x, y), (y, x)\}$.* Z věty 2 plyne, že každý kritický $(m + 1)$-chromatický **aRS**-graf (viz G. A. Dirac: *A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger*, Proc. London Math. Soc. 7 (1957), 161—195) pro každé přirozené číslo m vznikne z vhodného m-chromatického **aRS**-grafu obsahujícího alespoň jednu souhlasnou dvojici x, y tím, že k němu přidáme hrany $(x, y), (y, x)$.