Vratislav Pudej

O vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} + p(x)y'' + q(x)y = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 201--216

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108580`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

O VLASTNOSTECH ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y^{(4)} + p(x)\ y'' + q(x)\ y = 0$

VRATISLAV PUDEI, Pardubice

(Došlo dne 19. dubna 1967)

V této práci jsou vyšetřovány vlastnosti reálných řešení a vlastnosti derivací prvního a druhého řádu reálných řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + p(x) \,.\, y'' + q(x) \,.\, y = 0\,, \quad p(x) \leqq 0\,, \quad q(x) < 0\,. \tag{1}$$

Koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ jsou reálné funkce spojité v intervalu (a, ∞), kde $-\infty \leqq a$.

Ukázalo se, že řešení rovnice (1) mají mnoho vlastností společných s derivacemi prvního a druhého řádu některých řešení této rovnice. Mají také mnoho společných vlastností s řešeními samoadjungované diferenciální rovnice $(r(x) \,.\, y'')'' + p(x) \,.\, y = 0$, $r(x) > 0$, $p(x) < 0$, což je vyšetřováno v práci [1].

A. ÚVOD

Uvažujme nejdříve diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + a_1(x) \,.\, y''' + a_2(x) \,.\, y'' + a_3(x) \,.\, y' + a_4(x) \,.\, y = 0\,, \tag{2}$$

kde koeficienty $a_1(x) \leqq 0$, $a_2(x) \leqq 0$, $a_3(x) \leqq 0$, $a_4(x) \leqq 0$ jsou reálné a spojité funkce v intervalu (a, ∞).

Lemma 1. *Nechť řešení $y(x)$ rovnice (2) vyhovuje v libovolném bodě $b \in (a, \infty)$ počátečním podmínkám: $y(b) \geqq 0$, $y'(b) \geqq 0$, $y''(b) \geqq 0$, $y'''(b) > 0$. Potom je*

$$y(x) > 0\,, \quad y'(x) > 0\,, \quad y''(x) > 0\,, \quad y'''(x) > 0 \tag{3}$$

a funkce $y^{(4)}(x) \geqq 0$ pro všechna $x \in (b, \infty)$. Odtud pak vyplývá: $\lim\limits_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, 2$, a funkce $y'''(x)$ neklesá v intervalu (b, ∞).

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f(x) = y \,.\, y' \,.\, y'' \,.\, y'''$ vymizí v některém bodě intervalu (b, ∞). Potom, podle věty o střední hodnotě, existuje aspoň jeden bod

$c \in (b, \infty)$ tak, že $y'''(c) = 0$. Nechť $x = c$ je první takový bod napravo od bodu b. (Funkce $y(x)$ má v intervalu (a, ∞) spojité derivace až do 4. řádu.) Tedy nerovnosti (3) platí v intervalu (b, c). Integrací metodou "per partes" funkce $f(x)$ od b do c dostaneme (když položíme $u_1 = y$, $u_2' = y'$, $u_3 = y''$, $u_4 = y'''$):

$$0 < \int_b^c y \cdot y' \cdot y'' \cdot y''' \, dx = - [y^2 \cdot y'' \cdot y''']_{x=b} -$$

$$- \int_b^c y' \cdot y \cdot y'' \cdot y''' \, dx - \int_b^c y^2 (y''')^2 \, dx +$$

$$+ \int_b^c y^2 \cdot y''(a_1(x)\, y''' + a_2(x)\, y'' + a_3(x)\, y' + a_4(x)\, y) \, dx < 0 ,$$

což je spor. Za posledním integračním znakem jsme dosadili za $y^{(4)}(x)$ příslušný výraz z rovnice (2). Uvedený spor dokazuje, že nerovnosti (3) platí v celém intervalu (b, ∞). Přímo z rovnice (2) a z nerovností (3) potom vyplývá, že $y^{(4)}(x) \geqq 0$ pro všechna $x \in (b, \infty)$. Věta je dokázána.

Zavedeme nyní substituci $x = b + d - t$, kde d je libovolné číslo větší než a, t je nová nezávisle proměnná. Položíme $z(t) = y(b + d - t)$. Rovnice (2) se touto substitucí transformuje v rovnici

$$z^{(4)}(t) + b_1(t) \cdot z'''(t) + b_2(t) \cdot z''(t) + b_3(t) \cdot z'(t) + b_4(t) \cdot z(t) = 0 ,$$

kde koeficienty $b_1(t) \geqq 0$, $b_2(t) \leqq 0$, $b_3(t) \geqq 0$, $b_4(t) \leqq 0$ jsou spojité funkce (reálné) pro $t < b + d - a$. Počáteční podmínky (v bodě $t = d$) pak mají tento tvar: $z(d) \geqq 0$, $z'(d) \leqq 0$, $z''(d) \geqq 0$, $z'''(d) < 0$. Je-li $z \geqq b$, je $t \leqq d$ a tedy pro $t < d$ platí nerovnosti: $z(t) > 0$, $z'(t) < 0$, $z''(t) > 0$, $z'''(t) < 0$ a $z^{(4)}(t) \geqq 0$. Na základě těchto úvah dostáváme větu:

Lemma 2. *Nechť pro koeficienty rovnice (2) platí nerovnosti: $a_1(x) \geqq 0$, $a_2(x) \leqq 0$, $a_3(x) \geqq 0$, $a_4(x) \leqq 0$ a nechť jsou spojité pro $x \in (a, \infty)$. Nechť řešení $y(x)$ této rovnice splňuje v libovolném bodě $b \in (a, \infty)$ počáteční podmínky: $y(b) \geqq 0$, $y'(b) \leqq 0$, $y''(b) \geqq 0$, $y'''(b) < 0$. Potom jest $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) > 0$, $y'''(x) < 0$ a $y^{(4)}(x) \geqq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.*

B. OBECNÉ VLASTNOSTI ŘEŠENÍ ROVNICE (1)

Z lemmatu 1 vyplývá bezprostředně následující věta:

Lemma 3. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1), které v libovolném bodě $b \in (a, \infty)$ splňuje počáteční podmínky: $y(b) \geqq 0$, $y'(b) \geqq 0$, $y''(b) \geqq 0$ a $y'''(b) \geqq 0$*

(alespoň jedna z těchto hodnot je různá od nuly). Potom jest

(4) $$y(x) > 0\,, \quad y'(x) > 0\,, \quad y''(x) > 0\,, \quad y'''(x) > 0\,, \quad y^{(4)}(x) > 0$$

pro všechna $x \in (b, \infty)$.

Odtud pak vyplývá: $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, 2$, *funkce* $y'''(x)$ *roste pro* $x > b$.

Z lemmatu 2 vyplývá další tvrzení:

Lemma 4. *Nechť netriviální řešení* $y(x)$ *rovnice* (1) *splňuje v libovolném bodě* $b \in (a, \infty)$ *počáteční podmínky:* $y(b) \geqq 0$, $y'(b) \leqq 0$, $y''(b) \geqq 0$, $y'''(b) \leqq 0$ *(alespoň jedna z těchto hodnot je různá od nuly). Potom je*

(5) $$y(x) > 0\,, \quad y'(x) < 0\,, \quad y''(x) > 0\,, \quad y'''(x) < 0\,, \quad y^{(4)}(x) > 0$$

pro $x \in (a, b)$.

Lemma 5. *Buď* $y(x)$ *netriviální řešení rovnice* (1). *Potom* $y(x)$ *splňuje nejvýše v jednom bodě* $x = b$ $(>a)$ *jednu z následujících podmínek:*

1. $y(b) = y'(b) = y''(b) = 0$,
2. $y(b) = y'(b) = y'''(b) = 0$,
3. $y(b) = y''(b) = y'''(b) = 0$,
4. $y'(b) = y''(b) = y'''(b) = 0$,
5. $y(b) = y''(b) = 0$, $\operatorname{sgn} y'(b) = \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0$,
6. $y'(b) = y'''(b) = 0$, $\operatorname{sgn} y(b) = \operatorname{sgn} y''(b) \neq 0$.

Pro $x \in (a, b) \cup (b, \infty)$ *je* $y^{(i)}(x) \neq 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ *a* $\lim_{x\to\infty} |y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, 2$, *funkce* $y'''(x)$ *je ryze monotonní pro* $x > b$.

Důkaz. V případě 1. předpokládejme, že $y'''(b) > 0$. Potom (podle lemmatu 3) platí nerovnosti (4) v intervalu (b, ∞). Z těchto nerovností vyplývá, že $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, 2$. Podle lemmatu 4 platí opačné nerovnosti k (5) v intervalu (a, b). Je-li $y'''(b) < 0$, platí opačné nerovnosti k (4) v intervalu (b, ∞) a tedy pak je $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = -\infty$, $i = 0, 1, 2$. V intervalu (a, b) platí nerovnosti (5). Pro případy 2., 3. a 4. je důkaz analogický. Pro případ 5. nechť je $y'(b) > 0$, $y'''(b) > 0$. Podle lemmatu 3 platí nerovnosti (4) v intervalu (b, ∞) a tedy $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, 2$. Podle lemmatu 4 platí opačné nerovnosti k (5) v intervalu (a, b). Je-li $y'(b) < 0$, $y'''(b) < 0$, platí opačné nerovnosti k (4) v intervalu (b, ∞) a tudíž je $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = -\infty$, $i = 0, 1, 2$. Podle lemmatu 4 platí nerovnosti (5) v intervalu (a, b). Podobně se dokáže tvrzení pro případ 6. této věty.

Poznámka. Místo nulté derivace funkce: $y^{(0)}(x)$, píšeme často jen $y(x)$.

Lemma 6. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice* (1). *Potom $y(x)$ splňuje nejvýše v jednom bodě $x = b$ $(> a)$ jednu z následujících podmínek:*

1. $y(b) = y'(b) = 0,\ 0 \neq \operatorname{sgn} y''(b) \neq \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0,$
2. $y'(b) = y''(b) = 0,\ 0 \neq \operatorname{sgn} y(b) \neq \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0,$
3. $y''(b) = y'''(b) = 0,\ 0 \neq \operatorname{sgn} y(b) \neq \operatorname{sgn} y'(b) \neq 0,$
4. $y(b) = y'''(b) = 0,\ 0 \neq \operatorname{sgn} y'(b) \neq \operatorname{sgn} y''(b) \neq 0,$
5. $y(b) = y'(b) = 0,\ \operatorname{sgn} y''(b) = \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0,$
6. $y'(b) = y''(b) = 0,\ \operatorname{sgn} y(b) = \operatorname{sgn} y'''(b) \neq 0,$
7. $y''(b) = y'''(b) = 0,\ \operatorname{sgn} y(b) = \operatorname{sgn} y'(b) \neq 0,$
8. $y(b) = y'''(b) = 0,\ \operatorname{sgn} y'(b) = \operatorname{sgn} y''(b) \neq 0.$

V případech 1. *až* 4. *je* $y^{(i)}(x) \neq 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ *pro* $x \in (a, b)$. *V případech* 5. *až* 8. *je* $y^{(i)}(x) \neq 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ *pro* $x \in (b, \infty)$ *a* $\lim_{x\to\infty} |y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, 2$. *Funkce* $y'''(x)$ *je ryze monotonní pro* $x > b$.

Důkaz. V případě 1. předpokládejme, že $y''(b) > 0$, $y'''(b) < 0$. Potom (podle lemmatu 4) platí nerovnosti (5) v intervalu (a, b). Vlevo od bodu $x = b$ tedy neexistuje žádný jiný bod, ve kterém jsou splněny uvedené podmínky. Tudíž takový bod je nejvýše jeden. Je-li $y''(b) < 0$, $y'''(b) > 0$, pak v intervalu (a, b) platí nerovnosti opačné k (5). Tedy zase existuje nejvýše jeden bod, ve kterém jsou splněny uvedené podmínky. Pro případy 2., 3. a 4. je důkaz analogický.

V případě 5. předpokládejme $y''(b) > 0$, $y'''(b) > 0$. Potom (podle lemmatu 3) platí nerovnosti (4) v intervalu (b, ∞) a $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = \infty$, $i = 0, 1, 2$. Vpravo od bodu $x = b$ tedy neexistuje žádný jiný bod, ve kterém jsou splněny podmínky podle uvedeného předpokladu. Je-li $y''(b) < 0$, $y'''(b) < 0$, pak v intervalu (b, ∞) platí opačné nerovnosti k (4) a $\lim_{x\to\infty} y^{(i)}(x) = -\infty$, $i = 0, 1, 2$. Tedy existuje zase nejvýše jeden bod, ve kterém jsou splněny podmínky 5. našeho lemmatu. Pro podmínky 6., 7., 8. je důkaz analogický.

Důsledkem lemmatu 5 je

Důsledek 7. *Existuje řešení $y(x)$ rovnice* (1) *takové, že pro všechna $x \in (a, \infty)$ platí jeden z následujících případů:*

a) *jedna z funkcí $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, je různá od nuly,*

b) *funkce $y(x)$ a $y''(x)$ jsou různé od nuly,*

c) *funkce $y'(x)$ a $y'''(x)$ jsou různé od nuly.*

Důkaz je jednoduchý. Například řešení, které splňuje jednu z podmínek 1. až 4. lemmatu 5 je řešením případu *a*), neboť za těchto podmínek je $y^{(i)}(x) \neq 0$, $0 \leqq i \leqq 3$, pro $x \in (a, \infty)$. Případ *b*) resp. *c*) je zase totožný s případem 6. resp. 5. lemmatu 5.

Lemma 8. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1) a nechť pro čísla $b < c < d$ $(a < b)$ platí: $y^{(i)}(b) = y^{(k)}(c) = y^{(l)}(d) = 0$. $0 \leqq k \leqq 2$, $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq l \leqq 3$ celá čísla. Potom je $y^{(k+1)}(c) \neq 0$.*

Poznámka. Vždy existuje řešení (netriviální) rovnice (1), které splňuje v bodech b, c, d podmínky v předpokladu lemma 8. Vskutku, obecné řešení rovnice (1) má tvar $y(x) = c_1 \,.\, y_1(x) + c_2 \,.\, y_2(x) + c_3 \,.\, y_3(x) + c_4 \,.\, y_4(x)$, kde $\{y_n(x)\}_{n=1}^{n=4}$ je fundamentální systém řešení. Z podmínek $y^{(i)}(b) = y^{(k)}(c) = y^{(l)}(c) = 0$ dostaneme soustavu tří lineárních homogenních rovnic pro čtyři neznámé c_n, $n = 1, 2, 3, 4$, která má vždy netriviální řešení.

Důkaz lemmatu 8. Předpokládejme, že $y^{(k)}(c) = y^{(k+1)}(c) = 0$. Nastane-li v bodě $x = c$ jeden z případů 1. až 4. lemmatu 5, je $y \,.\, y' \,.\, y'' \,.\, y''' \neq 0$ pro $x \in (a, c) \cup (c, \infty)$, což je ve sporu s předpokladem $y^{(i)}(b) = y^{(l)}(d) = 0$. Jestliže řešení $y(x)$ splňuje v bodě $x = c$ jednu z podmínek 1., 2., 3. lemmatu 6, je $y \,.\, y' \,.\, y'' \,.\, y''' \neq 0$ pro $x \in \in (a, c)$, což je zase ve sporu s předpokladem $y^{(i)}(b) = 0$ $(a < b < c)$. Konečně, je-li v bodě $x = c$ splněna jedna z podmínek 5., 6. nebo 7. lemmatu 6, je $y \,.\, y' \,.\, y'' \,.\, y''' \neq 0$ pro $x \in (c, \infty)$. Tedy také spor s předpokladem $y^{(l)}(d) = 0$ $(d > c)$. Lemma je dokázáno.

Pro další část této práce je užitečné zavést následující definici:

Definice 1. Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1). Bod $x = x_0$ nazveme jednonásobným nulovým bodem (krátce: nulovým bodem) funkce $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, jestliže $y^{(i)}(x_0) = 0$, $y^{(i-1)}(x_0) \neq 0$, $y^{(i+1)}(x_0) \neq 0$. Bod $x = x_0$ nazveme dvojnásobným nulovým bodem funkce $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, jestliže $y^{(i)}(x_0) = y^{(i+1)}(x_0) = 0$, $y^{(i+2)}(x_0) \neq 0$ a všechny derivace řešení $y(x)$ řádu nižšího než i-tého jsou různé od nuly v bodě x_0. Nulový bod funkce $y(x)$ (i vícenásobný) definujeme obvyklým způsobem.

Důsledek 9. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1). Potom žádná z funkcí $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$, nemá v intervalu (a, ∞) více než dva dvojnásobné nulové body.*

Důkaz. Předpokládejme, že $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$, má tři dvojnásobné nulové body $b < c < d$. Potom (podle lemmatu 8) je $y^{(i+1)}(c) \neq 0$, což je ve sporu s předpokladem $y^{(i+1)}(c) = 0$. Tvrzení je dokázáno.

Později dokážeme (věta 23) existenci řešení $y(x)$ rovnice (1) takových, že jedna z funkcí $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$, má dva dvojnásobné nulové body v intervalu (a, ∞).

Důsledek 10. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1). Má-li funkce $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq \leqq i \leqq 2$, dva dvojnásobné nulové body v bodech $\alpha < \beta$ $(a < \alpha)$, potom všechny ostatní (jednonásobné) nulové body této funkce leží v intervalu (α, β).*

Důkaz. Případy 1. až 4. lemmatu 5 vyloučíme, neboť za těchto podmínek není bod $x = b$ dvojnásobným nulovým bodem žádné z funkcí $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$, (podle definice 1) a také žádná z těchto funkcí nemá nulový bod v intervalu (a, ∞) kromě bodu $x = b$. Je-li v bodě $x = \alpha$ splněna jedna z podmínek 1., 2. nebo 3. lemmatu 6, nemá žádná z funkcí $y^{(i)}(x)$ nulový bod vlevo od bodu $x = \alpha$. Pro bod $x = \beta$ může nastat již jen jeden z případů 5. až 7. (dvojnásobného nulového bodu) lemmatu 6. To znamená zase, že žádná z funkcí $y^{(i)}(x)$ nemá nulový bod vpravo od bodu $x = \beta$. Tím jsme ukázali, že všechny ostatní (jednonásobné) nulové body funkce $y^{(i)}(x)$ leží jen v intervalu (α, β). Poznamenejme ještě, že v případech 3. a 7. lemmatu 6 je skutečně $y^{(4)}(\alpha) \neq 0$ a $y^{(4)}(\beta) \neq 0$, což je zřejmé z rovnice (1). Důkaz je hotov.

Lemma 11. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1). Nechť jsou v bodech $b < c < d$ $(a < b)$ splněny podmínky*

$$y^{(i)}(b) = y^{(k)}(c) = y^{(l)}(d) = 0\,. \tag{6}$$

Potom je $0 \neq \operatorname{sgn} y^{(k-1)}(c) \neq \operatorname{sgn} y^{(k+1)}(c) \neq 0$, kde $k = 1, 2$ a $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq \leqq l \leqq 3$ celá čísla.

Důkaz. Nechť platí (6). Potom (podle lemmatu 8) je $y^{(k+1)}(c) \neq 0$ a také $y^{(k-1)}(c) \neq \neq 0$, $k = 1, 2$. Předpokládejme nyní, že $\operatorname{sgn} y^{(k-1)}(c) = \operatorname{sgn} y^{(k+1)}(c) \neq 0$ a $y^{(k)}(c) = = 0$. Potom (podle lemmatu 3 a lemmatu 4) alespoň v jednom z intervalů (a, c), (c, ∞) je $y \,.\, y' \,.\, y'' \,.\, y''' \neq 0$, což je ve sporu s předpokladem $y^{(i)}(b) = y^{(l)}(d) = 0$, $b \in \in (a, c)$, $d \in (c, \infty)$. Tedy v bodě $x = c$ nastává jediný případ: $0 \neq \operatorname{sgn} y^{(k-1)}(c) \neq \neq \operatorname{sgn} y^{(k+1)}(c) \neq 0$. Lemma je dokázáno.

Věta 12. *Nechť $y(x)$ je netriviální řešení rovnice (1). Potom nulové body funkcí $y^{(i)}(x)$ a $y^{(i+1)}(x)$, $i = 0, 1$, se vzájemně oddělují v intervalu (a, ∞).*

Důkaz. Pro $i = 0$. Dokážeme, že mezi dvěma sousedními (jednonásobnými) nulovými body funkce $y(x)$ leží právě jeden nulový bod funkce $y'(x)$. Buďte $b < d$ $(a < b)$ dva sousední nulové body funkce $y(x)$. Podle Rolleovy věty existuje alespoň jeden bod $c \in (b, d)$ tak, že $y'(c) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $y(x) > 0$ pro $x \in (b, d)$. Tedy $y(c) > 0$ a podle lemmatu 11 je $y''(c) < 0$. Nechť $\alpha < \beta$ jsou dva body intervalu (b, d), pro které platí: $y'(\alpha) = 0$, $y(\alpha) > 0$, $y''(\alpha) < 0$ a $y'(\beta) = 0$, $y(\beta) > 0$, $y''(\beta) < 0$. Potom funkce $y'(x)$ klesá v bodech α, β, přecházejíc od kladných hodnot k záporným. Poněvadž funkce $y'(x)$ je spojitá v intervalu (a, ∞), existuje bod $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tak, že $y'(\gamma) = 0$, $y(\gamma) > 0$, $y''(\gamma) \geqq 0$. To je ale ve sporu s tvrzením lemmatu 11. Tedy v intervalu (b, d) leží nejvýše jeden nulový bod funkce $y'(x)$. Podle předcházejících úvah právě jeden. Jestliže v tomto důkazu zaměníme funkce y, y', y'' postupně funkcemi y', y'', y''', dostaneme tvrzení věty pro $i = 1$. Věta je dokázána.

Z věty 12 dostáváme přímo

Důsledek 13. *Nechť $y(x)$ je netriviální řešení rovnice (1). Potom mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $y'(x)$ leží právě jeden nulový bod funkce $y(x)$ a právě jeden nulový bod funkce $y''(x)$.*

Věta 14. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální řešení rovnice* (1). *Nechť v bodech $b < c < < d$ $(a < b)$ je*

$$(7) \qquad u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(k)}(c) = v^{(k)}(c) = u^{(l)}(d) = v^{(l)}(d) = 0\,,$$

kde $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq k \leqq 3$, $0 \leqq l \leqq 3$ jsou celá čísla. Potom jsou řešení $u(x)$ a $v(x)$ lineárně závislá.

Důkaz. Nechť platí (7) pro $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq l \leqq 3$ a $0 \leqq k \leqq 2$ celá. Podle lemmatu 8 je $u^{(k+1)}(c) \neq 0$ a $v^{(k+1)}(c) \neq 0$. Jsou-li řešení $u(x)$ a $v(x)$ lineárně nezávislá, je $y(x) = u^{(k+1)}(c) \,.\, v(x) - v^{(k+1)}(c) \,.\, u(x)$ netriviální řešení rovnice (1), pro které platí: $y^{(i)}(b) = y^{(k)}(c) = y^{(k+1)}(c) = y^{(l)}(d) = 0$, což je ve sporu s tvrzením lemmatu 8. Tedy $y(x) \equiv 0$, to znamená, že $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně závislá řešení.

Nechť platí (7) pro $k = 3$, $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq l \leqq 3$ celá. Podle lemmatu 8 je $u''(c) \neq 0$ a $v''(c) \neq 0$. Jestliže $u(x)$ a $v(x)$ jsou lin. nezávislá řešení, je $y(x) = u''(c) \,.\, v(x) - v''(c) \,.\, u(x)$ netriviální řešení rovnice (1), pro které zase je: $y^{(i)}(b) = y''(c) = y'''(c) = y^{(l)}(d) = 0$. Toto je ale ve sporu s tvrzením lemmatu 8. Tudíž $u(x)$ a $v(x)$ jsou i v tomto případě lin. závislá řešení. Věta je dokázána.

Věta 15. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální řešení rovnice* (1). *Nechť v bodech $b \neq c$ $(a < b, c)$ je*

$$(8) \qquad \begin{aligned} u^{(i)}(b) &= u^{(i+1)}(b) = u^{(l)}(c) = 0 \quad a \\ v^{(i)}(b) &= v^{(i+1)}(b) = v^{(l)}(c) = 0\,, \end{aligned}$$

kde $0 \leqq i \leqq 2$, $0 \leqq l \leqq 3$ jsou celá čísla. Potom řešení $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně závislá.

Důkaz. Nechť podmínky (8) platí pro $i = 1, 2$ a $0 \leqq l \leqq 3$. Podle lemmatu 5 (případ 1. nebo 4.), je $u^{(i-1)}(b) \neq 0$ a $v^{(i-1)}(b) \neq 0$. Nechť $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (1). Potom $y(x) = u^{(i-1)}(b) \,.\, v(x) - v^{(i-1)}(b) \,.\, u(x)$ je netriviální řešení rovnice (1), pro které platí: $y^{(i-1)}(b) = y^{(i)}(b) = y^{(i+1)}(b) = y^{(l)}(c) = 0$, což je ve sporu s tvrzením lemmatu 5 (případ 1. nebo 4.). Tedy $u(x)$ a $v(x)$ jsou lin. závislá řešení. Platí-li (8) pro $i = 0$, $0 \leqq l \leqq 3$ celé, pak (podle lemmatu 5, případ 1.) je $u''(b) \neq 0$ a $v''(b) \neq 0$. Když $u(x)$ a $v(x)$ jsou lin. nezávislá řešení, je $y(x) = u''(b) \,.\, v(x) - v''(b) \,.\, u(x)$ netriviální řešení rovnice (1), pro něž platí: $y(b) = y'(b) = y''(b) = y^{(l)}(c) = 0$. To je zase spor s tvrzením lemmatu 5 (případ 1.). Tedy $u(x)$ a $v(x)$ jsou i v tomto případě lin. závislá řešení. Věta je dokázána.

Věta 16. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální řešení rovnice* (1). *Mají-li $u(x)$ a $v(x)$ resp. $u'(x)$ a $v'(x)$ tři společné nulové body, pak řešení $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně závislá.*

Důkaz. Buďte b, c, d společné nulové body řešení $u(x)$ a $v(x)$. Předpokládejme, že $b = c = d$ $(a < b)$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti je každé řešení $y(x)$ rovnice (1) jednoznačně určeno (až na násobnou konstantu) počátečními podmínkami $y(b) = y'(b) = y''(b) = 0$, $y'''(b) \neq 0$. Tedy řešení $u(x)$ a $v(x)$ jsou v tomto případě lin. závislá. Je-li $b = c \neq d$ $(a < b, d)$, tj. $u(b) = u'(b) = u(d) = 0$ a $v(b) = v'(b) = v(d) = 0$, tvrzení naší věty vyplývá z věty 15. Když je $b < c < d$, tvrzení vyplývá z věty 14.

Buďte b, c, d společné nulové body funkcí $u'(x)$ a $v'(x)$. Nechť $b = c = d$ $(a < b)$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti je každé řešení rovnice (1) určeno poč. podmínkami $y'(b) = y''(b) = y'''(b) = 0$, $y(b) \neq 0$ jednoznačně (až na násobnou konstantu) a tudíž řešení $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně závislá. Poznamenejme ještě, že $y^{(4)}(b) \neq 0$, což je zřejmé z rovnice (1) a z podmínky $y(b) \neq 0$. Tedy bod $x = b$ je trojnásobným nulovým bodem funkce $y'(x)$. Jestliže $b = c \neq d$, tj. $u'(b) = u''(b) = u(d) = 0$ a $v'(b) = v''(b) = v(d) = 0$, tvrzení věty vyplývá z věty 15. Pro případ $b < c < d$ tvrzení věty vyplývá z věty 14.

C. ODDĚLOVÁNÍ NULOVÝCH BODŮ A OSCILAČNÍ VLASTNOSTI

Vždy existují dvě lineárně nezávislá řešení $u(x)$ a $v(x)$ rovnice (1), pro která je $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(l)}(c) = v^{(l)}(c) = 0$, kde $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq l \leqq 3$ jsou celá čísla a $b < c$ $(a < b)$. Zvolíme-li třetí bod $x = d$ tak, že kromě uvedených podmínek v bodech b, c platí ještě $u^{(i)}(d) = 0$ a $v^{(i)}(d) \neq 0$, jsou řešení $u(x)$ a $v(x)$ jistě lineárně nezávislá. Podle lemmatu 8 je zřejmé, že funkce $u^{(k)}(x)$ a $v^{(k)}(x)$, $0 \leqq k \leqq 2$ celé číslo, mohou mít v intervalu (b, c) jen jednonásobné nulové body.

Věta 17. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (1) taková, že $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = u^{(l)}(c) = v^{(l)}(c) = 0$, kde $b < c$ $(a < b)$ a $0 \leqq i \leqq 3$, $0 \leqq l \leqq 3$ jsou celá čísla. Potom nulové body funkcí $u^{(k)}(x)$ a $v^{(k)}(x)$, $0 \leqq k \leqq 2$ celé číslo, se vzájemně oddělují v intervalu (b, c).*

K důkazu této věty a dalších potřebujeme následující lemma (věta 1 v práci [2]).

Lemma 18. *Buď $u(x)$ funkce, která má v bodě $x = a$ nulový bod řádu $n \geqq 1$ a v bodě $x = b$ nulový bod řádu $m \geqq 1$ a nechť $u(x)$ má konst. znamení $(\neq 0)$ v intervalu (a, b). Buď $v(x)$ funkce, která má v bodě $x = a$ nulový bod řádu $n_1 < n$ a v bodě $x = b$ nulový bod řádu $m_1 < m$ a má také konstantní znamení $(\neq 0)$ v intervalu (a, b). Předpokládejme, že $u(x) \in C_M[a, b]$ a $v(x) \in C_M[a, b]$, kde $M = \max(n_1, m_1)$. Potom existuje lineární kombinace funkcí $u(x)$ a $v(x)$, která má dvojnásobný nulový bod v intervalu (a, b).*

Důkaz věty 17. Především poznamenáme, že funkce $u^{(k)}(x)$ a $v^{(k)}(x)$, $0 \leqq k \leqq 2$, nemají společný nulový bod v intervalu (b, c), neboť v opačném případě řešení $u(x)$ a $v(x)$ by byla lineárně závislá (podle věty 14). Nechť β, γ jsou sousední (jednonásobné) nulové body funkce $u^{(k)}(x)$ takové, že $b < \beta < \gamma < c$. Předpokládejme, že $v^{(k)}(x) > 0$, $0 \leqq k \leqq 2$, pro $x \in [\beta, \gamma]$. Funkce $z(x) = c_1 \,.\, u(x) + c_2 \,.\, v(x)$ $(c_1 \neq 0$,

$c_2 \neq 0$ konstanty) je netriviální řešení rovnice (1). Podle lemmatu 18 existuje funkce $z^{(k)}(x) = c_1 \,.\, u^{(k)}(x) + c_2 \,.\, v^{(k)}(x)$ a bod $x_0 \in (\beta, \gamma)$ tak, že $z^{(k)}(x_0) = z^{(k+1)}(x_0) = 0$. Toto je ale ve sporu s tvrzením lemmatu 8, neboť $z^{(i)}(b) = z^{(l)}(c) = 0$ $(b < x_0 < c)$. To tedy znamená, že mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $u^{(k)}(x)$ v intervalu (b, c) leží alespoň jeden nulový bod funkce $v^{(k)}(x)$. Podobně se dokáže, že mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $v^{(k)}(x)$ v intervalu (b, c) leží alespoň jeden nulový bod funkce $u^{(k)}(x)$. Věta je dokázána.

Věta 19. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální řešení rovnice* (1) *taková, že $u^{(i)}(b) = v^{(i)}(b) = 0$, $0 \leqq i \leqq 3$ celé číslo, a nechť $u^{(l)}(c) = v^{(k)}(d) = 0$, kde $0 \leqq l \leqq 3$, $0 \leqq k \leqq 3$ jsou celá čísla a $b < c < d$ $(a < b)$. Potom existuje řešení $y(x)$ rovnice* (1) *takové, že $y^{(i)}(b) = 0$ a nulové body funkce $y^{(j)}(x)$ v intervalu (b, c) se vzájemně oddělují jak s nulovými body funkce $u^{(j)}(x)$ tak s nulovými body funkce $v^{(j)}(x)$, $0 \leqq j \leqq 2$ celé číslo.*

Důkaz. Jsou-li řešení $u(x)$ a $v(x)$ lineárně závislá, je $v^{(l)}(c) = u^{(k)}(d) = 0$. Můžeme sestrojit řešení $y(x)$, které není konstantním násobkem $u(x)$ a takové, že $y^{(i)}(b) = y^{(l)}(c) = 0$, $y^{(k)}(d) \neq 0$. Podle věty 17 nulové body funkce $y^{(j)}(x)$ v intervalu (b, c) se vzájemně oddělují s nulovými body funkce $u^{(j)}(x)$ (a také s nulovými body funkce $v^{(j)}(x)$). Předpokládejme nyní, že řešení $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně nezávislá. Nechť $v^{(l)}(c) = 0$ (avšak $u^{(k)}(d) \neq 0$). Potom nulové body výše uvedené funkce $y^{(j)}(x)$, $0 \leqq j \leqq 2$, v intervalu (b, c) se vzájemně oddělují jak s nulovými body funkce $u^{(j)}(x)$, tak s nulovými body funkce $v^{(j)}(x)$ (podle věty 17). Je-li $u^{(k)}(d) = 0$ (avšak $v^{(l)}(c) \neq 0$), můžeme zase sestrojit řešení $w(x)$ takové, že $w^{(i)}(b) = w^{(k)}(d) = 0$. Nulové body funkce $w^{(j)}(x)$ v intervalu (b, d) (tedy také v intervalu (b, c)) se vzájemně oddělují jak s nulovými body funkce $u^{(j)}(x)$, tak také s nulovými body funkce $v^{(j)}(x)$. Je-li $v^{(l)}(c) \neq 0$ a $u^{(k)}(d) \neq 0$, sestrojíme řešení $z(x)$ takové, že $z^{(i)}(b) = z^{(l)}(c) = z^{(k)}(d) = 0$. Podle věty 17 nulové body funkce $z^{(j)}(x)$ se vzájemně oddělují s nulovými body funkce $u^{(j)}(x)$ v intervalu (b, c) a s nulovými body funkce $v^{(j)}(x)$ v intervalu (b, d) (a tedy také v intervalu (b, c)), $0 \leqq j \leqq 2$. Věta je dokázána.

Lemma 20. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální lineráně nezávislá řěšení rovnice* (1), *pro která platí: $u^{(i)}(b) = u^{(i+1)}(b) = u^{(l)}(c) = 0$ a $v^{(i)}(b) = v^{(l)}(c) = 0$, kde $b \neq c$ $(a < b, c)$ a $0 \leqq i \leqq 2$, $0 \leqq l \leqq 3$ jsou celá čísla. Nechť $x = \beta \in (b, c)$ resp. $\beta \in (c, b)$ je první nulový bod funkce $u^{(i)}(x)$ vpravo resp. vlevo od bodu b. Potom funkce $v^{(i)}(x)$ má právě jeden nulový bod v intervalu (b, β) resp. v intervalu (β, b).*

Důkaz. Podle věty 14 a věty 15 je $v^{(i+1)}(b) \neq 0$ a $v^{(i)}(\beta) \neq 0$, poněvadž $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení. Předpokládejme, že $b < \beta < c$ a funkce $v^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$, nemá nulový bod v intervalu (b, β). Funkce $w(x) = c_1 \,.\, u(x) + c_2 \,.\, v(x)$ ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ konstanty) je netriviální řešení rovnice (1). Podle lemmatu 18 existuje funkce $w^{(i)}(x) = c_1 \,.\, u^{(i)}(x) + c_2 \,.\, v^{(i)}(x)$ a bod $x_0 \in (b, \beta)$ tak, že $w^{(i)}(x_0) = w^{(i+1)}(x_0) = 0$, což je ve sporu s lemmatem 8, neboť $w^{(i)}(b) = w^{(l)}(c) = 0$, $b <$

$< x_0 < c$. Tedy funkce $v^{(i)}(x)$ má alespoň jeden nulový bod v intervalu (b, β). Poněvadž nulové body funkcí $u^{(i)}(x)$ a $v^{(i)}(x)$ se vzájemně oddělují v intervalu (b, c), má funkce $v^{(i)}(x)$ právě jeden nulový bod v intervalu (b, β). Pro případ $c < \beta < b$ je důkaz analogický.

Lemma 21. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (1). Nechť funkce $u^{(i)}(x)$ má dvojnásobné nulové body v bodech $b < c$ $(a < b)$ a nechť $v^{(i)}(b) = v^{(i)}(c) = 0$, $0 \leqq i \leqq 2$, celé číslo. Nechť β resp. γ je první nulový bod funkce $u^{(i)}(x)$ vpravo od bodu b resp. vlevo od bodu c. Potom funkce $v^{(i)}(x)$ má právě jeden nulový bod v intervalu (b, β) a právě jeden nulový bod v intervalu (γ, c).*

Poznámka. Na rozdíl od lemmatu 20, kde je $\beta \neq c$, v lemmatu 21 může býti $\beta = c$ (což je totéž jako $\gamma = b$).

Důkaz lemmatu 21. Podle věty 15 je $v^{(i+1)}(b) \neq 0$ a $v^{(i+1)}(c) \neq 0$, $0 \leqq i \leqq 2$, poněvadž řešení $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně nezávislá. Je-li $b < \beta < c$ (tedy také $b < \gamma < c$), tvrzení lemmatu vyplývá přímo z lemmatu 20. Nechť $\beta = c$ (tedy také $\gamma = b$). Potom je $u^{(i)}(x) \neq 0$ pro $x \in (b, c)$. Podle předpokladu lemmatu je $u^{(i)}(b) = u^{(i+1)}(b) = u^{(i)}(c) = u^{(i+1)}(c) = 0$ a $v^{(i)}(b) = v^{(i)}(c) = 0$. Předpokládejme, že funkce $v^{(i)}(x)$ nemá nulový bod v intervalu (b, c). Potom (podle lemmatu 18) existuje funkce $w^{(i)}(x) = c_1 \,.\, u^{(i)}(x) + c_2 \,.\, v^{(i)}(x)$ $(c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0$ konstanty) a bod $\alpha \in (b, c)$ tak, že $w^{(i)}(\alpha) = w^{(i+1)}(\alpha) = 0$, což je ve sporu s lemmatem 8, neboť jest $w^{(i)}(b) = w^{(i)}(c) = 0$ a funkce $w(x) = c_1 \,.\, u(x) + c_2 \,.\, v(x)$ je netriviální řešení rovnice (1). Tedy funkce $v^{(i)}(x)$ má alespoň jeden nulový bod v intervalu (b, c). Podle věty 17 nulové body funkcí $u^{(i)}(x)$ a $v^{(i)}(x)$ se vzájemně oddělují v intervalu (b, c) a tedy $v^{(i)}(x)$ má právě jeden nulový bod v tomto intervalu. Lemma je dokázáno.

Z věty 17 a lemmatu 21 vyplývá přímo následující

Důsledek 22. *Buďte $u(x)$ a $v(x)$ netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (1). Nechť funkce $u^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$, má dvojnásobné nulové body v bodech $b < c$ $(a < b)$ a nechť $v^{(i)}(b) = v^{(i)}(c) = 0$. Potom funkce $u^{(i)}(x)$ má n $(\geqq 0)$ nulových bodů v intervalu (b, c) tehdy a jen tehdy, když funkce $v^{(i)}(x)$ má $n + 1$ nulový bod v tomtéž intervalu.*

Věta 23. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1). Nechť funkce $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$ celé číslo, má jednonásobný nebo dvojnásobný nulový bod v bodě $x = b_i$ $(a < b_i)$ a nejméně $n + 3$ $(n \geqq 1)$ nulové body v intervalu $[b_i, \infty)$. Potom existuje n bodů $\eta_1^i, \eta_2^i, \ldots, \eta_n^i$ $(b_i < \eta_1^i < \eta_2^i < \ldots < \eta_n^i)$ a n řešení $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ rovnice (1), která mají následující vlastnosti:*

1. *funkce $y_k^{(i)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ má dvojnásobné nulové body v bodech $x = b_i$ a $x = \eta_k^i$,*

2. *funkce $y_k^{(i)}(x)$ má právě $k + 3$ nulové body v intervalu $[b_i, \eta_k^i]$ (dvojnásobný nulový bod počítáme jako dva nulové body),*
3. *je-li $u(x)$ netriviální řešení rovnice (1), které není konstantním násobkem $y_k(x)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ a takové, že $u^{(i)}(b_i) = 0$, má funkce $u^{(i)}(x)$ méně než $k + 3$ nulové body v intervalu $[b_i, \eta_k^i]$, $0 \leqq i \leqq 2$.*

Každé řešení rovnice (1), které má tytéž vlastnosti jako řešení $y_k(x)$ je konstantním násobkem $y_k(x)$.

Důkaz. Nechť $y(x)$ je netriviální řešení rovnice (1) takové, že funkce $y^{(i)}(x)$, $(0 \leqq i \leqq 2)$, má v intervalu $[x_1^i, \infty)$ $(a < x_1^i)$ první $n + 3$ (jednonásobné) nulové body $x_1^i < x_2^i < \ldots < x_{n+3}^i$. Můžeme sestrojit řešení $g(x)$ rovnice (1) tak, že $g^{(i)}(x_1^i) = g^{(i+1)}(x_1^i) = g^{(i)}(x_{n+3}^i) = 0$. (Podle lemmatu 5, lemmatu 6 a definice 1 je bod x_1^i dvojnásobným nulovým bodem funkce $g^{(i)}(x)$). Podle věty 17 a lemmatu 20 má funkce $g^{(i)}(x)$ nejméně tolik nulových bodů v intervalu $[x_1^i, x_{n+3}^i]$ jako funkce $y^{(i)}(x)$ v tomtéž intervalu. Položíme $b_i = x_1^i$. Existuje tedy řešení $u(x)$ rovnice (1) takové, že funkce $u^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$, má v intervalu $[b_i, \infty)$ první $n + 3$ nulové body: $b_1^i = b_2^i < b_3^i < \ldots < b_{n+3}^i$, kde $b_i = b_1^i$. Tedy je $u^{(i)}(b_i) = u^{(i+1)}(b_i) = u^{(i)}(b_3^i) = \ldots = u^{(i)}(b_{n+3}^i) = 0$. Můžeme sestrojit další řešení $v(x)$ rovnice (1), které není konstantním násobkem $u(x)$ a takové, že $v^{(i)}(b_i) = v^{(i+1)}(b_i) = 0$, $v^{(i)}(x) \neq 0$ pro $x > b_i$, $0 \leqq i \leqq 2$. Například řešení, která splňují v bodě b_i podmínky 1. až 4. lemmatu 5 jsou taková řešení. Potom funkce $w(x) = c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)$ $(c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ konstanty) je netriviální řešení rovnice (1) a je $w^{(i)}(b_i) = w^{(i+1)}(b_i) = 0$. Podle lemmatu 18 existuje funkce $w^{(i)}(x) = c_1 \cdot u^{(i)}(x) + c_2 \cdot v^{(i)}(x)$ a bod $\beta_i \in (b_{n+2}^i, b_{n+3}^i)$ tak, že $w^{(i)}(\beta_i) = w^{(i+1)}(\beta_i) = 0$ (β_i a b_i jsou dvojnásobné nulové body funkce $w^{(i)}(x)$). Sestrojíme další řešení $z(x)$ rovnice (1), které není konstantním násobkem $u(x)$ ani $v(x)$ a takové, že $z^{(i)}(b_i) = z^{(i)}(\beta_i) = z^{(i)}(b_{n+3}^i) = 0$ $(b_i < \beta_i < b_{n+3}^i)$. Podle věty 15 je $z^{(i+1)}(b_i) \neq 0$ a podle lemmatu 8 je $z^{(i+1)}(\beta_i) \neq 0$. Podle věty 17 nulové body funkcí $z^{(i)}(x)$ a $u^{(i)}(x)$ se vzájemně oddělují v intervalu (b_i, b_{n+3}^i). Podle lemmatu 20 první (jednonásobný) nulový bod funkce $z^{(i)}(x)$ v intervalu (b_i, β_i) leží před prvním nulovým bodem funkce $u^{(i)}(x)$ v tomto intervalu. Poslední nulový bod funkce $z^{(i)}(x)$ v intervalu (b_i, β_i) leží před posledním nulovým bodem funkce $u^{(i)}(x)$ v tomtéž intervalu, tj. před bodem $x = b_{n+2}^i$. Tedy funkce $z^{(i)}(x)$ má v intervalu (b_i, β_i) $n(\geqq 1)$ nulových bodů (stejný počet jako funkce $u^{(i)}(x)$ v tomtéž intervalu). Poněvadž funkce $z(x)$ a $w(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (1), podle důsledku 22 má funkce $w^{(i)}(x)$ právě $n + 3$ nulové body v intervalu $[b_i, \beta_i]$ (dvojnásobné nulové body b_i a β_i počítáme jako čtyři nulové body). Podle důsledku 10 nemá funkce $w^{(i)}(x)$ žádné jiné nulové body v intervalu (a, ∞). Předpokládejme nyní, že existuje ještě jedno řešení $r(x)$ rovnice (1), které není konstantním násobkem $w(x)$, takové, že $r^{(i)}(b_i) = r^{(i)}(\beta_i) = 0$ a má $n + 3$ nulové body v intervalu (b_i, β_i). Podle věty 15 je $r^{(i+1)}(b_i) \neq 0$ a $r^{(i+1)}(\beta_i) \neq 0$; v opačném případě by byla řešení $w(x)$ a $r(x)$ lineárně závislá. Avšak potom má funkce $r^{(i)}(x)$ jen $n + 2$ nulové body v intervalu $[b_i, \beta_i]$ (podle důsledku 22). Z výše uvedených úvah vyplývá následující: Je-li $\varphi(x)$ netriviální řešení rovnice (1), které není konstantním násobkem $w(x)$ a pro něž platí $\varphi^{(i)}(b_i) = 0$, má funkce $\varphi^{(i)}(x)$ méně než $n + 3$ nulové body v intervalu $[b_i, \beta_i]$. Bod β_i je ve větě označen symbolem η_n^i. Věta je dokázána.

Podobně jako v práci [1] zavedeme definici:

Definice 2. Bod $x = \eta_n^i$ (ve větě 23) budeme značit symbolem $\eta_n^i(b_i)$ a nazveme jej n-tým (pravým) konjugovaným bodem s bodem b_i. Funkci $y_n^{(i)}(x)$ nazveme extrémální funkcí sdruženou s n-tým konjugovaným bodem $\eta_n^i(b_i)$, $0 \leqq i \leqq 2$ celé číslo. Je-li přímo řešení $y_n(x)$ (tj. pro $i = 0$) extrémální funkcí, nazýváme je také extrémálním řešením (sdruženým s n-tým konjugovaným bodem $x = \eta_n^0(b_0)$).

Lemma 24. *Buď $w_n^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$ celé, extrémální funkce sdružená s n-tým konjugovaným bodem $x = \eta_n^i(b_i)$. Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1) takové, že funkce $y^{(i)}(x)$ má dvojnásobný nulový bod v bodě $x = b_i$ a alespoň n (jednonásobných) nulových bodů v intervalu (b_i, ∞). Jsou-li řešení $y(x)$ a $w_n(x)$ lineárně nezávislá, má funkce $y^{(i)}(x)$ právě těchto n nulových bodů v intervalu $(b_i, \eta_n^i(b_i))$, $b_i > a$.*

Důkaz. Podle věty 23 (vlastnost 3.) nemá funkce $y^{(i)}(x)$ více než n nulových bodů v intervalu $J = (b_i, \eta_n^i(b_i))$. Poněvadž řešení $y(x)$ a $w_n(x)$ jsou lineárně nezávislá, je (podle věty 15) $y^{(i)}(\eta_n^i(b_i)) \neq 0$. Předpokládejme, že funkce $y^{(i)}(x)$ má $n - 1$ nulových bodů v intervalu J. To znamená, že následující n-tý nulový bod x_n funkce $y^{(i)}(x)$ leží vpravo od n-tého konjugovaného bodu $\eta_n^i(b_i)$. Sestrojíme nyní řešení $z(x)$ rovnice (1) takové, že funkce $z^{(i)}(x)$ má (jednonásobné) nulové body v bodech $x = b_i$, $\eta_n^i(b_i)$, x_n a které není konstantním násobkem $y(x)$ ani $w_n(x)$. Extrémální funkce $w_n^{(i)}(x)$ má (podle věty 23) $n - 1$ nulových bodů ($n \geqq 1$) v intervalu J a tedy (podle důsledku 22) má funkce $z^{(i)}(x)$ n nulových bodů v intervalu J. Podle věty 17 a lemmatu 20 má funkce $y^{(i)}(x)$ také n nulových bodů v intervalu J, což je ve sporu s předpokladem. Tedy funkce $y^{(i)}(x)$ má právě n nulových bodů v intervalu J. Lemma je dokázáno.

Z lemma 24 bezprostředně vyplývá

Věta 25. *Buď $y(x)$ netriviální řešení rovnice (1) takové, že funkce $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$ celé číslo, má dvojnásobný nulový bod v bodě $x = b_i$. Potom mezi každými dvěma sousedními nulovými body funkce $y^{(i)}(x)$ v intervalu (b_i, ∞) leží právě jeden konjugovaný bod $x = \eta_k^i(b_i)$. (Je-li poslední nulový bod funkce $y^{(i)}(x)$ dvojnásobný, shoduje se s konjugovaným bodem $\eta_n^i(b_i)$.)*

Definice 3. Nechť $y(x)$ je netriviální řešení rovnice (1). Funkci $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$ celé, nazveme oscilující, jestliže množina jejích nulových bodů v intervalu (a, ∞) je nekonečná a shora neomezená. V každém jiném případě nazveme tuto funkci neoscilující.

Rovnici (1) nazveme oscilující, má-li alespoň jedno oscilující řešení a neoscilující, jsou-li všechna její řešení neoscilující.

Věta 26. *Nechť $y(x)$ je netriviální řešení rovnice* (1). *Potom funkce $y^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2$, mají týž oscilační charakter (tj. jsou buď všechny oscilující anebo žádná z nich není oscilující).*

Tvrzení této věty vyplývá přímo z důsledku 13.

Věta 27. *Rovnice* (1) *je oscilující tehdy a jen tehdy, existuje-li pro libovolné $b \in (a, \infty)$ a pro každé $i = 0, 1, 2$ nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^i(b)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že rovnice (1) je oscilující. Nechť $y(x)$ je její oscilující řešení (tedy také funkce $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, jsou oscilující). Nechť n je libovolné přirozené číslo a $x = b$ libovolné číslo větší než číslo a. Můžeme určit číslo c ($> b$) tak, že v intervalu (b, c) má funkce $y^{(i)}(x)$, $0 \leqq i \leqq 2$ celé, n nulových bodů. Nechť $x = c$ je nulový bod funkce $y^{(i)}(x)$. Nechť $u(x)$ je řešení rovnice (1) takové, že funkce $u^{(i)}(x)$ má dvojnásobný nulový bod v bodě b a $u^{(i)}(c) = 0$. Podle věty 19 (kde nerovnost $b < c < d$ můžeme zaměnit nerovností $d < c < b$ a interval (b, c) intervalem (c, b)) a lemmatu 20 má funkce $u^{(i)}(x)$ nejméně $n - 1$ nulový bod v intervalu $(b, c]$. Je-li také bod $x = b$ nulovým bodem funkce $y^{(i)}(x)$, má funkce $u^{(i)}(x)$ nejméně n nulových bodů v intervalu $(b, c]$ (podle věty 17 a lemmatu 20). Poněvadž n je libovolné přirozené číslo, podle věty 25 existuje nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^i(b)$ pro každé $i = 0, 1, 2$.

Předpokládejme nyní, že existuje nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^0(b)$ s libovolným bodem $b \in (a, \infty)$. Nechť $u(x)$ a $v(x)$ jsou (lin. nezávislá) netriviální řešení rovnice (1) taková, že

$$(9) \qquad \begin{aligned} u(b) = u'(b) = u''(b) &= 0\,, \quad u'''(b) = 1\,, \\ v(b) = v'(b) = v'''(b) &= 0\,, \quad v''(b) = 1\,. \end{aligned}$$

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost čísel z intervalu (a, ∞) taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ a pro všechna přirozená n platí nerovnost $x_n \geqq \eta_n^0(b)$. Sestrojíme řešení $z_n(x) = a_n \,.\, v(x) + b_n \,.\, u(x)$ (a_n, b_n konstanty) rovnice (1), které splňuje podmínky

$$(10) \qquad z_n(x_n) = 0\,,$$

$$(11) \qquad z_n''^2(b) + z_n'''^2(b) = 1\,.$$

Podle (9), (10) a lemmatu 5 (případ 1.), řešení $z_n(x)$ má dvojnásobný nulový bod v bodě $x = b$ a jest $z_n''(b) = a_n$, $z_n'''(b) = b_n$. Z podmínky (11) pak dostáváme rovnost

$$(12) \qquad a_n^2 + b_n^2 = 1\,.$$

Z této rovnosti je zřejmé, že řešení $z_n(x)$ není triviální a číselné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené. Existují tedy z těchto posloupností vybrané konvergentní posloupnosti $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{b_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Nechť $\lim\limits_{i\to\infty} a_{k_i} = A$, $\lim\limits_{i\to\infty} b_{k_i} = B$. Z rovnosti (12) potom vyplývá:

$$\lim_{i \to \infty} (a_{k_i}^2 + b_{k_i}^2) = A^2 + B^2 = 1 \tag{13}$$

a tedy $\lim_{i \to \infty} z_{k_i}(x) = \lim_{i \to \infty} [a_{k_i} \,.\, v(x) + b_{k_i} \,.\, u(x)] = A \,.\, v(x) + B \,.\, u(x) = z(x)$. Z rovnosti (13) vyplývá, že funkce $z(x) = A \,.\, v(x) + B \,.\, u(x)$ je řešení netriviální. Omezenost každého řešení rovnice (1) zaručuje, že vybraná posloupnost $\{z_{k_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k řešení $z(x)$ v intervalu (a, ∞). Podle věty 19 existuje řešení rovnice (1), jehož nulové body v intervalu $(b, \eta_j^0(b))$ se vzájemně oddělují jak s nulovými body extrémálního řešení sdruženého s konjugovaným bodem $\eta_j^0(b)$, tak s nulovými body řešení $z_{k_i}(x)$, kde j, k_i jsou přirozená čísla a $j < k_i$. Podle věty 25 má každé řešení $z_{k_i}(x)$ právě jeden nulový bod mezi každými dvěma sousedními konjugovanými body $\eta_{j-1}^0(b)$, $\eta_j^0(b)$ $(j < k_i)$. Limitní řešení $z(x)$ má také mezi každými dvěma sousedními konjugovanými body právě jeden nulový bod (v bodě $x = b$ má dvojnásobný nulový bod) a tudíž řešení $z(x)$ má nekonečně mnoho nulových bodů v intervalu (a, ∞). Odtud vyplývá (podle první části tohoto důkazu), že existuje nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^i(b)$ pro každé $i = 1, 2$.

Předpokládejme, že existuje nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^1(b)$ s libovolným bodem $b \in (a, \infty)$. Nechť $g(x)$ a $h(x)$ jsou (lin. nezávislá) netriviální řešení rovnice (1). Podmínky (9) zaměníme nyní podmínkami:

$$\begin{aligned} g(b) &= g'(b) = g''(b) = 0\,, \quad g'''(b) = 1\,, \\ h'(b) &= h''(b) = h'''(b) = 0\,, \quad h(b) = 1\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Nechť pro rostoucí posloupnost čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z intervalu (a, ∞) platí: $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ a $x_n \geqq \eta_n^1(b)$ pro všechna přirozená n. Sestrojíme rešení $y_n(x) = c_n \,.\, h(x) + d_n \,.\, g(x)$ (c_n, d_n konstanty), které splňuje podmínky:

$$\begin{aligned} y_n'(x_n) &= 0\,, \\ y_n^2(b) + y_n'''^2(b) &= 1\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Podle (14), (15) a lemmatu 5 (případy 1. a 4.) má funkce $y_n'(x)$ dvojnásobný nulový bod v bodě $x = b$ a je $y_n(b) = c_n$, $y_n'''(b) = d_n$. Další postup je podobný předchozímu případu (pro konjugované body s horním indexem $i = 0$). Existuje tedy limitní funkce $y'(x) = C \,.\, h'(x) + D \,.\, g'(x)$ (C, D konstanty), která má nekonečně mnoho nulových bodů v intervalu (a, ∞). Podle věty 26 limitní řešení $y(x)$ rovnice (1) je také oscilující. Podle první části tohoto důkazu existuje nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^0(b)$ a nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^2(b)$.

Předpokládejme, že existuje nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^2(b)$. Podmínky (9) zaměníme podmínkami:

$$\begin{aligned} r'(b) &= r''(b) = r'''(b) = 0\,, \quad r(b) = 1\,, \\ s(b) &= s''(b) = s'''(b) = 0\,, \quad s'(b) = 1\,, \end{aligned} \tag{16}$$

kde $r(x)$ a $s(x)$ jsou dvě (lin. nezávislá) netriviální řešení rovnice (1). Nechť pro rostoucí posloupnost čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z intervalu (a, ∞) platí: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $x_n \geqq \eta_n^2(b)$ pro všechna přirozená n. Sestrojíme řešení $w_n(x) = k_n \, . \, r(x) + l_n \, . \, s(x)$ (k_n, l_n konstanty), které splňuje podmínky:

$$w_n''(x_n) = 0 \,, \quad w_n^2(b) + w_n'^2(b) = 1 \,. \tag{17}$$

Podle (16), (17) a lemmatu 5 (případy 3., 4.) má funkce $w_n''(x)$ dvojnásobný nulový bod v bodě $x = b$ a je $w_n(b) = k_n$, $w_n'(b) = l_n$. Další postup důkazu je zase podobný předchozímu případu (pro konjugované body s horním indexem $i = 0$). Tudíž existuje limitní funkce $w''(x) = K \, . \, r''(x) + L \, . \, s''(x)$ (K, L konstanty), která má nekonečně mnoho nulových bodů v intervalu (a, ∞). Podle věty 26 je $w(x)$ oscilujícím řešením rovnice (1). Podle první části tohoto důkazu existuje také nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^i(b)$ pro každé $i = 0, 1$. Věta je dokázána.

Tímto jsme dokázali také následující tvrzení:

Věta 28. *Nechť b je libovolné číslo větší než a. Pro každé $i = 0, 1, 2$ existuje buď nekonečně mnoho konjugovaných bodů $\eta_n^i(b)$ nebo jen konečně mnoho.*

Literatura

[1] *W. Leighton* and *Z. Nehari:* On the oscillation of solutions of selfadjoint linear differential equations of the fourth order. Trans. Amer. Math. Soc., *89* (1958), 325—377.

[2] *T. L. Sherman:* Properties of solutions of n^{th} order linear differential equations. Pac. J. Math., *15* (1965), 1045—1060.

Adresa autora: Pardubice (Vysoká škola chemicko-technologická).

Zusammenfassung

ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$y^{(4)} + p(x)\, y'' + q(x)\, y = 0$$

VRATISLAV PUDEI, Pardubice

In dieser Arbeit werden die Eigenschaften der reellen Lösungen der Differentialgleichung $y^{(4)} + p(x) \, . \, y'' + q(x) \, . \, y = 0$ und die Eigenschaften der ersten und zweiten Ableitung der Lösungen dieser Gleichung untersucht. Die Funktionen $p(x) \leqq 0$, $q(x) < 0$ sind im Intervall (a, ∞), $a \geqq -\infty$, reell und stetig. Im Teil **B**

dieser Arbeit wird die Frage der Nullstellentrennung von Funktionen $y^{(i)}(x)$ und $y^{(i+1)}(x)$, $i = 0, 1$, gelöst, wo $y(x)$ eine Lösung der angeführten Gleichung ist. Ferner werden hier die Bedingungen studiert, unter welchen zwei Lösungen linear abhängig sind. Im Teil C sind die Trennungssätze für die Funktionen $u^{(j)}(x)$ und $v^{(j)}(x)$, $0 \leqq j \leqq 2$ eine ganze Zahl, angeführt, wenn $u(x)$ und $v(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen sind. Danach folgen einige oszillatorischen Eigenschaften der Lösungen (im Zusammenhang mit der Existenz von konjugierten Zahlen).

Es ist zum Vorschein gekommen, dass die Lösungen der angeführten Gleichung viele gemeinsame Eigenschaften mit der ersten und zweiten Ableitung einiger Lösungen dieser Gleichung haben. Sie haben auch viele gemeinsame Eigenschaften mit der Lösungen der Gleichung $(r(x) \,.\, y'')'' + p(x) \,.\, y = 0$, $r(x) > 0$, $p(x) < 0$, was in der Arbeit [1] einer Untersuchung unterworfen wird.