Časopis pro pěstování matematiky

Zbyněk Nádeník

Erste Krümmungsfunktion der Rotationseiflächen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 127--133

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108576`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 93 * PRAHA 28. 5. 1968 * ČÍSLO 2

ERSTE KRÜMMUNGSFUNKTION DER ROTATIONSEIFLÄCHEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eigegangen am 1. November 1966)

Für den Krümmungsradius $\varrho(\tau)$ einer Eikurve G mit der Stützfunktion $h(\tau)$ gilt bekanntlich $\varrho(\tau) = h(\tau) + \mathrm{d}^2h(\tau)/\mathrm{d}\tau^2$. Wird diese Formel umgekehrt als eine Differentialgleichung für $h(\tau)$ aufgefasst, so ist $h(\tau) = \int_0^\tau \varrho(\sigma) \sin(\tau - \sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ ihr Integral mit den Anfangsbedingungen $h(0) = \mathrm{d}h(0)/\mathrm{d}\tau = 0$. (S. [4], S. 23–24 oder [5], S. 115–116.) Ist ausser G noch eine andere Eikurve G^* mit dem Krümmungsradius $\varrho^*(\tau)$ und mit der dieselben Anfangsbedingungen wie $h(\tau)$ erfüllenden Stützfunktion $h^*(\tau)$ gegeben, so gilt

$$(*) \qquad h^*(\tau) - h(\tau) = \int_0^\tau \{\varrho^*(\sigma) - \varrho(\sigma)\} \sin(\tau - \sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,.$$

Hierin ist für $0 < \sigma < \tau \leqq \pi$ offensichtlich $\sin(\tau - \sigma) > 0$. Daraus hat W. BLASCHKE (s. [2], S. 115–116) den Satz betreffs der freien Bewegung einer der Kurven G, G^* innerhalb der anderen abgeleitet. Aber noch mehr. Angenommen, es sei $h^*(\tau_0) = h(\tau_0)$ für gewisses $\tau_0 \in (0, \pi\rangle$. Dann ergibt sich aus (*) unmittelbar, dass im Intervall $\langle 0, \tau_0\rangle$ der Unterschied $\varrho^*(\sigma) - \varrho(\sigma)$ entweder verschwindet oder sein Vorzeichen wechselt. Das ist eine schwächere Form des Satzes von B. SEGRE (s. [15] und [17], S. 36), aus dem er eine grosse Menge von interessanten und schönen globalen Eigenschaften der Eikurven abgeleitet hat (s. [15], [16] und [17], S. 37–42).

Ein Seitenstück zu diesen Sätzen von Blaschke und Segre, das solche geschlossenen Kurven im euklidischen Raum von gerader Dimension betrifft, welche konstante Verhältnisse der Krümmungen besitzen, ist in [13] angeführt; bei der Herleitung seiner Folgerungen verfährt man in [13] analog zu der von P. VINCENSINI [17] benutzten Methode, welche auf dem Begriff des Vektorenbereiches beruht.

Mit dieser Note geben wir ein räumliches Seitenstück zu den obenerwähnten Sätzen von Segre und Blaschke, das sich auf Rotationseiflächen bezieht. Dabei erhalten wir auf eine ganz elementare und einfache Weise, dass die Rotationsfläche durch vorgeschriebene erste Krümmungsfunktion[1]) eindeutig bis auf Parallelverschiebung bestimmt ist. Freilich ist das nur ein sehr spezieller Fall eines allgemeinenTheorems von Christoffel betreffs der geschlossenen Fläche Φ, welches oftmals mannigfach bewiesen worden ist (s. [9]; [12], S. 401–404 oder [6], S. 136–138; [7], S. 123–124, dort auch weitere Literaturangaben). A. D. ALEKSANDROV (А. Д. Александров) ([1]; wiederholt in [2], S. 166–167; s. auch [8], S. 67–68) hat durch ein Beispiel gezeigt, dass die Positivität der ersten Krümmungsfunktion und die Geschlossenheit von Φ zur Konvexität von Φ nicht genügen. Mittels eines dualen Gegenstücks der Formel von Euler über die Flächenkrümmung (s. [5], S. 117–118) hat A. V. POGORELOV (А. В. Погорелов) [14] eine hinreichende, aber nich notwendige Bedingung für die Existenz einer konvexen Fläche Φ abgeleitet. Unter Beschränkung auf Rotationsflächen sind wir aber imstande, ganz einfach die hinreichende und notwendige Bedingung für ihre Konvexität zu formulieren.

Grundlegend ist folgender

Satz. *Es sei F eine Rotationsfläche, deren Stützfunktion $h(\varphi)$ – ihr Argument φ bedeutet die vom Südpol mit $\varphi = -\pi/2$ genommene geographische Breite auf der um einen Punkt O der Achse von F gewählten Bezugseinheitskugelfläche – folgende Voraussetzungen erfüllt:* 1) *Ihre Veränderliche φ verläuft das ganze Intervall $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,* 2) *sie ist zweimal stetig differenzierbar und* 3) *noch (die Striche bedeuten überall die Ableitungen nach der geographischen Breite)*

$$h(-\pi/2) = h'(-\pi/2) = 0\,, \tag{1}$$

$$h'(\pi/2) = 0\,. \tag{2}$$

Mit $P(\varphi)$ bezeichnen wir die erste Krümmungsfunktion von F. Dann ist

$$h(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos \sigma \,. \tag{3}$$
$$. \left\{ \sin \varphi - \sin \sigma + \sin \varphi \sin \sigma \left(\lg \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi/2}{2} - \lg \operatorname{tg} \frac{\sigma + \pi/2}{2} \right) \right\} d\sigma$$

mit der „Geschlossenheitsbedingung“

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\sigma) \cos \sigma \sin \sigma \, d\sigma = 0\,. \tag{4}$$

Der Beweis des Satzes beruht auf der Lösung der linearen Differentialgleichung

$$h''(\varphi) - h'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi + 2h(\varphi) = P(\varphi)\,; \tag{5}$$

[1]) In Übereinstimmung mit [7], S. 114, ist das die Summe der Hauptkrümmungsradien, aufgefasst als Funktion der Normalenrichtung.

denn die linke Seite in (5) ist die erste Krümmungsfunktion einer Rotationsfläche mit der Stützfunktion $h(\varphi)$. Die wohlbekannten Methoden bieten uns im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ folgendes allgemeines Integral von (5):

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad h(\varphi) &= a \sin\varphi + b\left(-1 + \sin\varphi \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi/2}{2}\right) + \\
&+ \sin\varphi \int_{\sigma_0}^{\varphi} P(\sigma) \cos\sigma \left(1 - \sin\sigma \lg \operatorname{tg} \frac{\sigma + \pi/2}{2}\right) d\sigma + \\
&+ \left(-1 + \sin\varphi \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi/2}{2}\right) \int_{\sigma_0}^{\varphi} P(\sigma) \cos\sigma \sin\sigma \, d\sigma \,;
\end{aligned}
$$

darin ist $\sigma_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $a, b =$ konst.

Wegen (1) und (2) ist $\lim\limits_{\varphi \to \pm\pi/2} h'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi = -h''(\pm\pi/2)$ und – was geometrisch evident ist – die linke Seite in (5) behält den Sinn auch für $\varphi = \pm\pi/2$. Unter den Lösungen (6) gibt es auch solche, über die dasselbe gilt.

In der Tat, aus der Existenz der Grenzwerte

$$
(7) \qquad \lim_{\sigma \to -\pi/2} \cos\sigma \lg \operatorname{tg} \frac{\sigma + \pi/2}{2} = 0\,,
$$

$$
(8) \qquad \lim_{\varphi \to -\pi/2} \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi/2}{2} \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos\sigma \sin\sigma \, d\sigma = 0\,,
$$

ergibt sich, dass – falls $b = 0$ ist und nur dann – die Lösung (6) bis einschliesslich zu $-\pi/2$ fortsetzbar ist. Die erste Anfangsbedingung (1) erfordert dann $a = 0$. Aus (6) – (8) folgt somit (3) im Intervall $\langle -\pi/2, \pi/2)$.

Nach (3) ist weiter

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad h'(\varphi) &= \cos\varphi \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos\sigma \left(1 - \sin\sigma \lg \operatorname{tg} \frac{\sigma + \pi/2}{2}\right) d\sigma + \\
&+ \cos\varphi \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi/2}{2} \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos\sigma \sin\sigma \, d\sigma + \\
&+ \operatorname{tg}\varphi \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos\sigma \sin\sigma \, d\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Folglich ist die zweite Anfangsbedingung (1) erfüllt und – wie leicht einzusehen ist – (2) mit (4) äquivalent ist.

Der Limes (7) bleibt unverändert auch für $\sigma \to \pi/2$ und wegen (4) gilt dasselbe vom Grenzwert (8) für $\varphi \to \pi/2$. Folglich hat die Lösung (3) den Sinn auch für $\varphi = \pi/2$.

Damit ist der Beweis unseres Satzes zu Ende geführt. Falls die Krümmungsfunktion $P(\varphi)$ konstant ist, so ergibt sich aus (3) mittels einer einfachen partiellen Integration und der berechneten Grenzwerte, dass $h(\varphi) = \frac{1}{2}P \,.\, (1 + \sin \varphi)$. Dies ist freilich für $P > 0$ die Stützfunktion einer Kugelfläche. Die nicht ausgeartete Rotationsfläche mit $P(\varphi) = 0$ hat die in erster Zeile in (6) stehende Stützfunktion; bekanntlich ist diese Fläche das Katenoid, dessen Meridiankurve (in orthogonalen Ebenenkoordinaten x, y mit der y-Achse in der Rotationsachse und mit dem Aufpunkt O) die Kettenlinie $2x/b = e^{(y-a)/b} + e^{-(y-a)/b}$ ist (s. [3], § 199–201 oder [10], S. 357–359).

Aus dem Satze ergeben sich mühelos einige Folgerungen:

1. *Die Rotationsfläche F ist dann und nur dann konvex, wenn*

$$P(\varphi) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos \sigma \sin \sigma \, d\sigma > 0 \tag{10}$$

ist.

Für die Konvexität unserer geschlossenen Rotationsfläche F ist nämlich notwendig und hinreichend, dass die Krümmung ihrer Meridiankurve positiv ist und die Berechnung von $h(\varphi) + h''(\varphi)$ nach (3) führt zum Ausdruck links in (10).

Erstens bemerken wir dazu, dass der mittels (3) und (9) ausgerechnete und freilich immer positive Krümmungsradius in Richtung des Parallelkreises $h(\varphi) - h'(\varphi) \operatorname{tg} \varphi = - (1/\cos^2 \varphi) \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos \sigma \sin \sigma \, d\sigma$ ist. Dementsprechend nimmt das Integral in (10) für $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ stets negative Werte an und aus (10) ergibt sich so die evidente Ungleichung $P(\varphi) > 0$. Wegen (4) ist offensichtlich

$$\lim_{\varphi \to \pm \pi/2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \int_{-\pi/2}^{\varphi} P(\sigma) \cos \sigma \sin \sigma \, d\sigma = -\tfrac{1}{2} P(\pm \pi/2) \,.$$

Zweitens kehren wir zum obenerwähnten Beispiel von A. D. Alexandrov zurück. Es handelt sich – bei unserer Messung der geographischen Breite – um die eine geschlossene Rotationsfläche eindeutig bestimmende erste Krümmungsfunktion $P(\varphi) = 4 \sin^2 \varphi + 1$. Die linke Seite in (10) ist dann $3 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}$ und sie ändert ihr Vorzeichen. Die zugehörige Fläche besteht aus einem konkaven und aus zwei konvexen Teilen.

2. (Analogon zum Satz von Blaschke.) *Es seien E und E* zwei Rotationshalbeiflächen*[2]) *mit gemeinsamem Südpol, deren Stützfunktionen $h(\varphi)$ und $h^*(\varphi)$ auf dieselbe Weise wie in dem vorangeführten Satz definiert sind. Weiter seien $P(\varphi)$ und $P^*(\varphi)$ die ersten Krümmungsfunktionen von E und E*. Ist für $\varphi \in (-\pi/2, 0)$*

$$P^*(\varphi) - P(\varphi) > 0 \,, \tag{11}$$

[2]) Unter einer Rotationshalbeifläche versteht man den Teil einer Rotationseifläche, der in ihrem Äquator die Randkurve hat; s. [11], S. 172.

so liegt E (mit Ausnahme des Südpols) *im Innern des konvexen Körpers, welcher von E^* und von der Zylinderfläche, die E^* längs ihrer Randkurve berührt, begrenzt wird.*[3])

Denn nach unserem Satz ist nun für $\varphi \in \langle -\pi/2, 0\rangle$

$$h^*(\varphi) - h(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\varphi} [P^*(\sigma) - P(\sigma)] \cos\sigma \{\ldots\} \, d\sigma , \tag{12}$$

wobei in den Klammern $\{\ldots\}$ derselbe Ausdruck wie in (3) steht. Man überzeugt sich mühelos, dass er für $-\pi/2 < \sigma < \varphi \leqq 0$ positiv ist. Folglich ergibt sich aus (11) und (12) die Ungleichung $h^*(\varphi) > h(\varphi)$ für $\varphi \in (-\pi/2, 0\rangle$ und diese beweist die Folgerung 2.

Die Entfernung (in Richtung $\varphi = \pi/2$) der Horizontalebenen der Randkurven unserer Rotationshalbeiflächen E^* und E ist nach (9)

$$h^{*\prime}(0) - h'(0) = \int_{-\pi/2}^{0} [P^*(\sigma) - P(\sigma)] \cos\sigma \left(1 - \sin\sigma \lg \operatorname{tg} \frac{\sigma + \pi/2}{2}\right) d\sigma .$$

3. (Analogon zum Satz von B. Segre.) *Wenn die Rotationshalbeiflächen aus der Folgerung 2 längs eines Paares ihrer Parallelkreise mit derselben geographischen Breite $\varphi_0 \in (-\pi/2, 0\rangle$ einen gemeinsamen Berührungskegel* (*bzw. -zylinder*) *besitzen und wenn ihre Mützen mit den Randkurven in diesen Parallelkreisen verschieden sind, dann ändert im Intervall* $(-\pi/2, \varphi_0)$ *der Unterschied $P^*(\varphi) - P(\varphi)$ sein Vorzeichen.*

Wirklich, wegen $h^*(\varphi_0) - h(\varphi_0) = 0$ verschwindet für $\varphi = \varphi_0 \in (-\pi/2, 0\rangle$ das Integral rechts in (12) und in Hinsicht auf die in dem Beweis der Folgerung 2 betreffs des Ausdrucks in den Klammern $\{\ldots\}$ gemachte Bemerkung ist das nur so möglich, dass der Unterschied $P^*(\varphi) - P(\varphi)$ im Intervall $\langle -\pi/2, \varphi_0\rangle$ entweder gleich Null ist oder das Vorzeichen wechselt. Die erste Eventualität würde aber die Identität der betrachteten Mützen bedeuten, wie aus unserem Satz sofort folgt.

---

[3]) Ein völliges Seitenstück zum betrachteten Satz von Blaschke möchte folgendermassen lauten: Berühren sich zwei Eiflächen G und G^* in einem Punkt so, dass sie sich auf derselben Seite der Tangentenebene befinden, und ist in Punkten mit gleichsinnig parallelen Normalen die erste Krümmungsfunktion von G immer kleiner als die von G^*, so liegt G ganz in dem Eikörper mit dem Rand G^*. Dies ist aber nicht der Fall. Das Rotationsellipsoid mit dem Äquatorradius b und mit der Poldistanz $2a$ hat (in bezug auf seinen Mittelpunkt) die Stützfunktion $h(\varphi) = [a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi]^{1/2}$, $\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Folglich ist die erste Krümmungsfunktion dieses Ellipsoids $P(\varphi) = b^2 . [2a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2\varphi] : [a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi]^{3/2}$. Daraus kann man schon leicht entnehmen, dass für $a > b$ (bzw. $a < b$) die Krümmungsfunktion $P(\varphi)$ vom Pol zum Äquator zunimmt (bzw. abnimmt). Jetzt betrachten wir zwei Rotationsellipsoide G und G^*, welche sich im Südpol berühren und aus denen G verlängert und G^* abgeplattet ist, wobei die Poldistanz von G grösser als die von G^* ist. Obwohl dann G aus G^* ragt, so kann man nach dem obigen für genügend grossen Äquator von G^* immer erreichen, dass in Punkten mit gleichsinnig parallelen Normalen die erste Krümmungsfunktion von G kleiner als die von G^* ist.

4. *Ist in der Folgerung 3 die Fläche E^* eine Halbkugelfläche vom Radius r, so gelten die Ungleichungen*

$$\min_{\varphi \in \langle -\pi/2, \varphi_0 \rangle} P(\varphi) < 2r < \max_{\varphi \in \langle -\pi/2, \varphi_0 \rangle} P(\varphi)\,.$$

Dieses Corollar ist nur eine Paraphrase der Folgerung 3.

5. *Es sei a der Äquatorradius einer Rotationseifläche F und s bzw. S das Minimum bzw. Maximum der Summe ihrer Hauptkrümmungsradien in ihren Gegenpunkten. Dann ist*

$$s \leqq 4a \leqq S \tag{13}$$

und jedes Gleichheitszeichen charakterisiert die Sphäroforme der Breite $2a$.

Der Vektorenbereich des von F begrenzten Körpers ist ein zentralsymmetrischer Rotationseikörper mit dem Äquatorradius $2a$ und seine erste Krümmungsfunktion ist gleich der Summe der Hauptkrümmungsradien in den Gegenpunkten von F (s. [17], § 17 und 24). Wir wenden auf die untere Halbeifläche des Randes dieses Vektorenbereiches die Folgerungen 3 und 4 mit $\varphi_0 = 0$ und $r = 2a$. Hinsichtlich der erwähnten Symmetrie erhalten wir unmittelbar die Ungleichungen (13). Aus dem Beweis der Folgerung 3 folgt weiter, dass links oder rechts in (13) das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn unser Vektorenbereich eine Kugel vom Radius $2a$ ist. Damit ist die Folgerung 5 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *А. Д. Александров:* К вопросу о существовании выпуклого тела, сумма главных радиусов кривизны которого есть данная положительная функция, удовлетворяющая условиям замкнутости. ДАН СССР XIV, № *2* (1937), 69—50.

[2] *А. Д. Александров:* Об основах дифференциальной геометрии и их изложении. Успехи мат. наук IV, № *3* (*31*) (1949), 139—170.

[3] *L. Bianchi:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1899, 1910. Lezioni di geometria differenziale. Bologna-Pisa 1894, 2. Aufl. 1902, 3. Aufl. 1927—1928.

[4] *L. Bieberbach:* Differentialgeometrie. Leipzig—Berlin 1932.

[5] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, New York 1949, Berlin 1956. (Russische Übersetzung in Vorbereitung.)

[6] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. Berlin 1921, 2. Aufl. 1924, 3. Aufl. 1930, 4. Aufl. 1945.

[7] *T. Bonnesen* und *W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, New York 1948.

[8] *H. Busemann:* Convex surfaces. New York—London 1958. (Выпуклые поверхности. Москва 1964.)

[9] *E. B. Christoffel:* Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche durch lokale Messungen auf derselben. Ges. Werke I, Leipzig—Berlin 1910, 162—177.

[10] *G. Darboux:* Leçons sur la théorie générale des surfaces. B. I., Paris 1887, 2. Aufl. 1914.

[11] *N. W. Efimow:* Flächenverbiegung im Grossen. (Mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer.) Berlin 1957.

[12] *A. Hurwitz:* Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. École norm. (3) *19* (1902), 357—408.

[13] *Z. Nádeník:* Sur les courbes fermées dont l'indicatrice sphérique des dernières normales est centrée. Czech. Math. J. *17* (*92*), (1967), 447—459.

[14] *А. В. Погорелов:* К вопросу о существовании выпуклой поверхности с заданной суммой главных радиусов кривизны. Успехи мат. наук VIII, № *3* (55) (1953), 127—130.

[15] *B. Segre:* Proprietá in grande delle linee piane convesse: Sulla curvatura degli archi convessi sogetti a date condizioni agli estremi. Atti della Reale Academia dei Lincei (6) *20* (1934), 407—416.

[16] *B. Segre:* Proprietá in grande delle linee piane convesse: Le orbiformi e le corrispondenze eguilonghe fra ovali. Atti della Reale Academia dei Lincei (6) *30* (1934), 455—458.

[17] *P. Vincensini:* Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels. Mém. des Sci. math. XCIV, Paris 1938.

Anmerkung bei der Korrektur 30. IV. 1968: Die Frage nach der Konvexität der Fläche aus dem Satz von Christoffel löst *W. J. Firey:* The determination of convex bodies from their mean radius of curvature functions. Mathematika *14* (1967), 1—13.

Anschrift des Verfassers: Trojanova 13, Praha 2 (České vysoké učení technické).