Jiří Kopáček

Задача Коши и смешанная задача для вырождающщхся гиперболических уравнений второго порядка

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 170--177

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108575`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

ЗАДАЧА КОШИ И СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

JIŘÍ KOPÁČEK (Иржи Копачек), Прага

(Поступило в редакцию 27/II 1967 г.)

Рассмотрим в области $V_T = \langle 0, T \rangle \times E_n$ дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_{i0}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_0} + b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + b_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + C(x)\,u = f \tag{1}$$

в предположении

$$a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqq 0 \tag{A}$$

для всех $x \in V_T$ и всех действительных $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ и задачу Коши

$$u|_{x_0=0} = \frac{\partial u}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=0} = 0 \tag{2}$$

для этого уравнения, предполагая, что существуют такие положительные постоянные θ и α, что

$$\left(\theta a_{ij}(x) - \frac{\partial}{\partial x_0}a_{ij}(x)\right)\xi_i\xi_j - \alpha(b_i(x)\,\xi_i)^2 \geqq 0 \tag{Б}$$

для $x \in V_T$, $\xi \in E_n$.

Эта задача была рассмотрена в [1] и [2] в предположении, что вместо (Б) выполнено неравенство

$$\left(\theta a_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_0}a_{ij}\right)\xi_i\xi_j - \alpha(b_i\xi_i)^2 \geqq 0$$

и $a_{i0} \equiv 0$.

1. Для решения поставленной задачи используем сначала прием, примененный в [1]. Имеет место

Лемма 1. *Пусть u бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в V_T, удовлетворяющая условию* (2). *Пусть далее*

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \varepsilon\,\Delta u + a_{i0}^\varepsilon(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_0\,\partial x_i} + b_i^\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} +$$

$$+ b_0^\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + C_\varepsilon(x)\,u\,, \quad \varepsilon > 0$$

оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, причем a_{ij}^ε и b_i^ε удовлетворяют условиям (А), (Б). *Тогда существует такая константа C, от Θ, α и норм коэффициентов $a_{ij}^\varepsilon \in C^{1,2}$, $a_{i0}^\varepsilon \in C^{1,1}$, b_i^ε, b_1^ε, C в $C^{0,2}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, что*

$$\|u\|_{W_2{}^2(V_T)} \leqq C\|L_\varepsilon u\|_{W^{0,2}}\,,$$

где $C^{r,s}$, $W_2^{r,s}$ пространства функций, производные которых до порядка $r + s$, содержащие дифференцирование по x_0 до порядка r принадлежат соответственно $C(V_T)$ и $L_2(V_T)$.

Доказательство этой леммы получается как обычно преобразованием выражений

$$\int_0^t\int_{E_n} L_\varepsilon u\,\frac{\partial u}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^t\int_{E_n}\frac{\partial}{\partial x_i}L_\varepsilon u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_0}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^t\int_{E_n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}L_\varepsilon u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_0}\,\mathrm{d}x\,.$$

С помощью этой леммы доказывается теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (А), (Б), *принадлежат соответствующим пространствам, указанным в лемме* 1 *и пусть $f \in W_2^{0,2}$. Тогда существует единственное в $W_2^2(V_T)$ решение задачи* (1), (2).

Доказательство. Если рассмотреть вместо (1) уравнение

$$(1_\varepsilon) \qquad L_\varepsilon u^\varepsilon = f_\varepsilon$$

с условием

$$(2) \qquad u^\varepsilon\big|_{x_0=0} = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=0} = 0\,,$$

где коэффициенты (1_ε) получаются усреднением соответствующих коэффициентов уравнения (1) с радиусом ε, f_ε бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем в V_T, $\|f_\varepsilon - f\|_{W_2{}^{0,2}} \to 0$ для $\varepsilon \to 0$, то задача (1_ε), (2) имеет бесконечно дифференцируемое решение с компактным носителем в V_T. По лемме 1

$$\|u^\varepsilon\|_{W_2{}^2} \leqq C\|f_\varepsilon\|_{W_2{}^{0,2}}\,,$$

следовательно u^ε и их первые производные компактны в $L_2(V_T)$, производные второго порядка компактны в L_2 в смысле слабой сходимости. Устремляя $\varepsilon \to 0$ по некоторой последовательности, получим в пределе искомое решение. Его единственность (и тем самым сходимость к нему u^ε при $\varepsilon \to 0$) доказывается так же, как первая часть леммы 1.

Замечание. Теорема остается в силе, если требования на коэффициенты ослабить следующим образом: вместо $a \in C^{r,s}$ требовать, чтобы $a \in C^{r,s-1}$ и все эти производные удовлетворяют условию Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Разностный метод. В пространстве E_{m+1} строим сетку $\{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\} = \{k_0\tau, kh\}$, $T > \tau > 0$, $h > 0$, где $k_0, k_1, \ldots, k_n$ целые числа, $\varkappa = \tau/h$. Если u функция определенная в точках сетки, то ${}^{\pm i}u(k_0\tau, kh) = u(k_0\tau, \ldots, (k_i + 1)h, \ldots)$, $\hat{\Delta}_i u = (1/h)({}^{+i}u - u)$, $\hat{\Delta}_{-i} u = \hat{\Delta}_i\, {}^{-i}u$, $\Delta_i u = \frac{1}{2}(\hat{\Delta}_i u + \hat{\Delta}_{-i} u)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ${}^{\pm 0}u(k_0\tau, kh) = u((k_0 \pm 1)\tau, kh)$, $\hat{\Delta}_0 u = (1/\tau)({}^{+0}u - u)$, $\hat{\Delta}_{-0} u = \hat{\Delta}_0\, {}^{-0}u$, $\Delta_0 u = \frac{1}{2}(\hat{\Delta}_0 u + \hat{\Delta}_{-0} u)$, $Ju = {}^{+0}u + u$, $J_1 u = {}^{+0}u + {}^{-0}u$, $\langle u \rangle_p = h^n \sum\limits_k u(p\tau, kh)$, $[u]_p = \tau \sum\limits_{s=0}^{p-1} \langle u \rangle_s$ для $p > 0$, $J_2 u = u + {}^{-0}u$.

Разностную схему, соответствующую (1), (2) определяем следующим образом: полагаем

$$(2') \qquad u(k_0\tau, kh) = 0 \quad \text{для} \quad k_0 \leqq 1 \quad \text{и всех} \quad k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

Для $0 \leqq k_0 \leqq M - 1$ (M такое натуральное число, что $0 \leqq T - M\tau < \tau$) составляем уравнение

$$(1') \qquad L_\Delta u = f,$$

где

$$L_\Delta u \equiv \Delta_0^2 u - \Delta_j(a_{ij}\, \Delta_i u) + a_{i0}\, \Delta_0 \Delta_i u + b_0\, \Delta_0 u + \tfrac{1}{2} b_i J_1\, \Delta_i u + cu.$$

Будем пользоваться следующими формулами:

$$\hat{\Delta}_i(uv) = u\, \hat{\Delta}_i v + {}^{+i}v\, \hat{\Delta}_i u,$$

$$\Delta_i(uv) = \tfrac{1}{2}[({}^{+i}v + {}^{-i}v)\, \Delta_i u + ({}^{+i}u + {}^{-i}u)\, \Delta_i v] =$$
$$= v\, \Delta_i u + \tfrac{1}{2}({}^{+i}u\, \hat{\Delta}_i v + {}^{-i}u\, \hat{\Delta}_{-i} v), \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\tfrac{1}{2}\{\Delta_0 u J_1(av) + \Delta_0 v J_1(au)\} = \Delta_0(auv) - \tfrac{1}{2}({}^{+0}v\, {}^{-0}u + {}^{-0}v\, {}^{+0}u)\, \Delta_0 a,$$
$$uJ_1 v - vJ_1 u = \tau\, \hat{\Delta}_0(v\, {}^{-0}u - u\, {}^{-0}v),$$

и если u и v функции отличные от нуля лишь в конечном числе точек, то

$$\langle u\, \Delta_i v \rangle_p = - \langle v\, \Delta_i u \rangle_p, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $f \in C(V_T)$ и имеет в V_T компактный носитель. Тогда и решение u задачи (1'), (2') отлично от нуля лищь в конечном числе точек. Умножим (1') на $\tau h^n J_1 \Delta_0 u$ и суммируем. Получим

$$[L_\Delta u J_1 \Delta_0 u]_p = [f J_1 \Delta_0 u]_p \tag{3}$$

для $p = 1, 2, \ldots, n$.

Будем преобразовывать левую (3). (Индекс p будем опускать.)

$$\begin{aligned}
&[\Delta_0^2 u J_1 \Delta_0 u] = \tfrac{1}{2}\langle(\Delta_0 u)^2 + (\Delta_0 {}^{-0}u)^2\rangle_p, \qquad (4)\\
&[a_{i0}\,\Delta_0\Delta_i u J_1 \Delta_0 u] = [\Delta_i(a_{i0}\,\Delta_0 u)\,J_1\,\Delta_0 u] - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}[J_1\,\Delta_0 u(\Delta_0 {}^{+i}u\,\hat{\Delta}_i a_{i0} + \Delta_0 {}^{-i}u\,\hat{\Delta}_{-i}a_{i0})] = \\
&= -[a_{i0}\,\Delta_0 u J_1\,\Delta_0\Delta_i u] - I = -[\Delta_0\Delta_i u J_1(a_{i0}\,\Delta_0 u)] - I \\
&- \tfrac{1}{2}\varkappa\,\langle a_{i0}\,\Delta_0 u(\Delta_0 {}^{+i-0}u - \Delta_0 {}^{-i-0}u) + {}^{-0}a_{i0}\,\Delta_0 {}^{-0}u(\Delta_0 {}^{+i}u - \Delta_0 {}^{-i}u)\rangle_p = \\
&= -(\varkappa/2)\,I_1 - I - [a_{i0}\,\Delta_0\Delta_i u J_1\,\Delta_0 u] - \\
&- \tfrac{1}{2}\varkappa\,[(\Delta_0 {}^{+i}u - \Delta_0 {}^{-i}u)\,(\Delta_0 {}^{+0}u\,\hat{\Delta}_0 a_{i0} - \Delta_0 {}^{-0}u\,\hat{\Delta}_{-0}a_{i0})].
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left|[a_{i0}\,\Delta_0\Delta_i u J_1\,\Delta_0 u]\right| \leqq (1+\varkappa)\,C\tau\sum_{s=1}^{p}\langle J_2(\Delta_0 u)^2\rangle_s + \varkappa C_1\langle J_2(\Delta_0 u)^2\rangle_p \tag{5}$$

где C_1 зависит от максимумов модулей a_{i0} и C от его констант Липшица.

$$\begin{aligned}
&-[\Delta_j(a_{ij}\,\Delta_i u)\,J_1\,\Delta_0 u] = [a_{ij}\,\Delta_i u J_1\,\Delta_j\Delta_0 u] = \qquad (6)\\
&= [\Delta_0\Delta_j u J_1(a_{ij}\,\Delta_i u)] + \tfrac{1}{2}\varkappa\,\langle({}^{-0}a_{ij}\,{}^{-0}\Delta_j u)\,(\Delta_0 {}^{+i}u - \Delta_0 {}^{-i}u) - \\
&\quad - a_{ij}\,\Delta_j u(\Delta_0 {}^{+i\,-0}u - \Delta_0 {}^{-i\,-0}u)\rangle_p = \\
&= \tfrac{1}{2}[\Delta_0\Delta_j u J_1(a_{ij}\,\Delta_i u) + \Delta_0\Delta_i u J_1(a_{ij}\,\Delta_j u)] + \tfrac{1}{2}\varkappa I = \\
&= [\Delta_0(a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u)] + \tfrac{1}{2}\varkappa I - [\Delta_i {}^{+0}u\,\Delta_j {}^{-0}u\,\Delta_0 a_{ij}] \geqq \\
&\geqq \tfrac{1}{4}\langle J_2(a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u)\rangle_p - [\Delta_i {}^{+0}u\,\Delta_j {}^{-0}u\,\Delta_0 a_{ij}] - \varkappa^2\lambda n\langle J_2(\Delta_0 u)^2\rangle_p,
\end{aligned}$$

где $\lambda = \sup\limits_{x\in V_T} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
&\left|[\tfrac{1}{2}b_i J_1\,\Delta_i u J_1\,\Delta_0 u]\right| \leqq \left|[b_i\,\Delta_i {}^{-0}u J_1\,\Delta_0 u]\right| + \qquad (7)\\
&+ \tfrac{1}{2}\varkappa\left|[b_i(\Delta_0 {}^{+i}u - \Delta_0 {}^{-i}u)\,J_1\,\Delta_0 u]\right| \leqq \tfrac{1}{2}\alpha\,[(b_i\,\Delta_i {}^{-0}u)^2] + \frac{1}{2\alpha}[(J_1\,\Delta_0 u)^2].
\end{aligned}$$

Выберем теперь $\varkappa$ так, чтобы

$$4\varkappa^2\lambda n \leqq 1, \quad 8\varkappa C_1 \leqq 1 \tag{8}$$

где C_1 константа из (5).

Тогда получим

$$[L_\Delta u J_1\, \Delta_0 u] \geqq \tfrac{1}{8}\langle J_2\{(\Delta_0 u)^2 + a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u\}\rangle_p -$$
$$- [\Delta_i\,{}^{+0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u\,\Delta_0 a_{ij} + \tfrac{1}{2}\alpha\,(b_i\,\Delta_i\,{}^{-0}u)^2] - C_2\tau\sum_{s=1}^{p}\langle J_2((\Delta_0 u)^2 + u^2)\rangle_s\,.$$

Используя условие (Б), оценим выражение в фигурных скобках в правой части этого неравенства.

$$[\Delta_0 a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{+0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u] + [(b_i\,\Delta_i\,{}^{-0}u)^2]\,.\,\tfrac{1}{2}\alpha = [\Delta_0 a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u] +$$
$$+ [\Delta_0 a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\varkappa(\Delta_0\,{}^{+j}u - \Delta_0\,{}^{-j}u)] + \tfrac{1}{2}\alpha\,[(b_i\,\Delta_i\,{}^{-0}u)^2] \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\,a_{ij}(x_0 - \tau\delta, x')\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u + \alpha(b_i(x_0 - \tau\delta, x')\,\Delta_i\,{}^{-0}u)^2\right] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\Delta_0 a_{ij}(\Delta_i\,{}^{-0}u + \varkappa(\Delta_0\,{}^{+i}u - \Delta_0\,{}^{-i}u))\,(\Delta_j\,{}^{-0}u + \varkappa(\Delta_0\,{}^{+j}u - \Delta_0\,{}^{-j}u))] +$$
$$+ C[(\Delta_0 u)^2] + \alpha\,C_1[u^2]$$

где C и C_1 зависят от констант Липшица по x_0 функций a_{ij} и b_i соответственно, $\delta \in (-1, 1)$. Согласно условию (Б) первое слагаемое меньше или равно чем

$$\tfrac{1}{2}\theta[a_{ij}(x_0 - \tau\delta, x')\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u] \leqq \tfrac{1}{2}e^{\theta T}\theta[{}^{-0}a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u]\,,$$

второе меньше или равно чем

$$\tfrac{1}{2}\theta[a_{ij}(x_0 - \tau\delta_1, x')\,(\Delta_i\,{}^{-0}u + \varkappa(\Delta_0\,{}^{+i}u - \Delta_0\,{}^{-i}u))\,.$$
$$.\,(\Delta_j\,{}^{-0}u + \varkappa(\Delta_0\,{}^{+j}u - \Delta_0\,{}^{-j}u))] \leqq \theta e^{\theta T}[{}^{-0}a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u] +$$
$$+ \theta e^{\theta T}\varkappa^2[a_{ij}(\Delta_0\,{}^{+i}u - \Delta_0\,{}^{-i}u)\,(\Delta_0\,{}^{+j}u - \Delta_0\,{}^{-j}u)] \leqq$$
$$\leqq \theta e^{\theta T}[{}^{-0}a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u] + \theta e^{\theta T}\varkappa^2\lambda\,.\,4n[(\Delta_0 u)^2] \leqq$$
$$\leqq \theta e^{\theta T}[{}^{-0}a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-0}u\,\Delta_j\,{}^{-0}u + (\Delta_0 u)^2]\,.$$

Мы использовали условие (8) и неравенство

$$a_{ij}(x_0 + \varrho, x')\,\xi_i\xi_j \leqq e^{\theta\varrho}a_{ij}(x_0, x')\,\xi_i\xi_j \leqq e^{\theta T}a_{ij}(x_0, x')\,\xi_i\xi_j$$

для $0 \leqq \varrho < T$, $0 \leqq x_0 \leqq T - \varrho$, которое вытекает из (Б). Таким образом мы показали, что

(9)
$$[L_\Delta u J_1\,\Delta_0 u] \geqq \tfrac{1}{8}\langle(\Delta_0 u)^2 + a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u\rangle_p -$$
$$- C_4\tau\sum_{s=1}^{p}\langle u^2 + (\Delta_0 u)^2 + a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u\rangle_s\,.$$

Так как очевидно

(10)
$$\langle u^2\rangle_p \leqq C\tau\sum_{s=1}^{p}\langle(\Delta_0 u)^2\rangle_s\,,$$

то из (9) и (3) получаем

$$(11) \qquad \langle(\Delta_0 u)^2 + a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u + u^2\rangle_p \leqq$$
$$\leqq C\tau \sum_{s=1}^{p} \langle(\Delta_0 u)^2 + a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u + u^2\rangle_s + C_1[f^2]_p\,,$$

откуда по лемме 1 работы [2] имеем

$$(12) \qquad \langle(\Delta_0 u)^2 + a_{ij}\,\Delta_i u\,\Delta_j u + u^2\rangle_p \leqq e^{2Cp\tau}\,C_1[f^2]_p \leqq \tilde{C}[f^2]_p$$

для $C\tau \leqq \frac{1}{2}$.

Итак, мы доказали лемму:

Лемма 2. *Если и решение задачи* (1'), (2'), *f ограниченная функция с компактным носителем в* V_T, *оператор L удовлетворяет условиям* (А), (Б), *то существует константа* $\tilde{C}$, *зависящая от максимумов модулей коэффициентов* (1), *констант Липшица* a_{i0} *по* x_i, x_0, a_{ij}, b_i *по* x_0 ($j, i = 1, 2, \ldots, n$), Θ, α, *что при* $\tau \leqq 1/2C$ (*C константа из* (12)) *и* $\varkappa$ *удовлетворяющем условию* (8) *выполнено неравенство* (12).

Приступим к оценке разностных отношений более высокого порядка решения задачи (1'), (2'). Применим к (1') оператор Δ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Получим

$$(13) \qquad \Delta_k f = \Delta_k L_\Delta u = L_\Delta\,\Delta_k u - \tfrac{1}{2}\Delta_j(\hat{\Delta}_k a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{+k}u + \hat{\Delta}_{-k} a_{ij}\,\Delta_i\,{}^{-k}u) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\hat{\Delta}_k a_{i0}\,\Delta_0\Delta_i\,{}^{+k}u + \hat{\Delta}_{-k} a_{i0}\,\Delta_0\Delta_i\,{}^{-k}u) + \tfrac{1}{2}(\hat{\Delta}_k b_0\,\Delta_0\,{}^{+k}u + \hat{\Delta}_{-k} b_0\,\Delta_0\,{}^{-k}u) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\hat{\Delta}_k b_i \,.\, \tfrac{1}{2}J_1\,\Delta_i\,{}^{+k}u + \hat{\Delta}_k b_i \,.\, \tfrac{1}{2}J_1\,\Delta_i\,{}^{-k}u) + \tfrac{1}{2}(\hat{\Delta}_k c\,{}^{+k}u + \hat{\Delta}_{-k} c\,{}^{-k}u)\,.$$

Используя теперь лемму 1 и (9), получим отсюда

$$(14) \qquad [\Delta_k L_\Delta u J_1\,\Delta_k\Delta_0 u] \geqq \tfrac{1}{8}\langle(\Delta_0\Delta_k u)^2 + a_{ij}\,\Delta_k\Delta_i u\,\Delta_k\Delta_j u\rangle -$$
$$- C_4\tau \sum_{s=1}^{p} \langle(\Delta_0\Delta_k u)^2 + a_{ij}\,\Delta_k\Delta_i u\,\Delta_k\Delta_j u + (\Delta_k u)^2\rangle_s -$$
$$- \tfrac{1}{2}[\Delta_{-k} a_{ij}\,\Delta_i\Delta_j u J_1\,\Delta_k\Delta_0\,{}^{-k}u + \Delta_k a_{ij}\,\Delta_i\Delta_j u J_1\,\Delta_k\Delta_0\,{}^{+k}u] -$$
$$- C_5\tau \sum_{s=1}^{p} \langle \sum_{l=1}^{n} \{(\Delta_0\Delta_l u)^2 + (\Delta_l u)^2\}\rangle_s - C_6[f^2]_p\,,$$

где C_5 и C_6 зависят от тех же величин, что и C в лемме 1 и кроме того от констант Липшица по x_l функций $\partial a_{ij}/\partial x_j$, a_{i0}, b_0, b_i, c ($i, j, l = 1, 2, \ldots, n$), C_4 константа из (9). Остается оценить третье слагаемое в правой части.

$$(15) \qquad |[\hat{\Delta}_{\mp k} a_{ij}\,\Delta_i\Delta_j u J_1\,\Delta_k\Delta_0\,{}^{\mp k}u]| \leqq \left|\left[\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}\,\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j u J_1\,\Delta_k\Delta_0\,{}^{\mp k}u\right]\right| +$$
$$+ C\tau \sum_{s=1}^{p} \langle \sum_{l=1}^{n} \{(\Delta_l u)^2 + (\Delta_0\Delta_l u)^2\}\rangle_s \leqq$$
$$\leqq N[a_{ij}\,\Delta_i\Delta_l u\,\Delta_j\Delta_l u] + C_1\tau \sum_{s=1}^{p} \langle \sum_{l=1}^{n} (\Delta_l u)^2 + (\Delta_0\Delta_l u)^2\rangle_s$$

где N, C и C_1 зависят от констант Липшица по x_k функций $\partial a_{ij}/\partial x_l$ $(l, i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. При этом мы использовали лемму 3 из [2] и неравенство Коши. Суммируя (13) по k от 1 до n, получим с учетом (14), (15) и (10) (для $\Delta_k u$ вместо u)

$$y(p) = \langle \sum_{k=1}^{n} (\Delta_0 \Delta_k u)^2 + a_{ij}\, \Delta_i \Delta_k u\, \Delta_j \Delta_k u + (\Delta_k u)^2 \}\rangle_p \leqq \tag{16}$$
$$\leqq C_1 [f^2 + \sum_{l=1}^{n} (\Delta_l f)^2] + C\tau \sum_{s=1}^{p} y(s)\,.$$

С помощью леммы 1 из [2] отсюда следует

$$y(p) \leqq C_1 [f^2 + \sum_{l=1}^{n} (\Delta_l f)^2]\, e^{2Cp\tau} \tag{17}$$

если τ достаточно мало, где C_1 и C зависят от тех же величин, что и C в лемме 1 и кроме того от констант Липшица по x_l функций $\partial a_{ij}/\partial x_k$, a_{i0}, b_0, b_i, c $(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$.

Для оценки разностных отношений второго порядка следует применить к (1') оператор $\Delta_l \Delta_k$, умножить полученные уравнения на $J_1\, \Delta_l \Delta_k \Delta_0 u$ $(l, k = 1, 2, \ldots, n)$, просуммировать соотношения

$$[\Delta_l \Delta_k L_\Delta u J_1\, \Delta_l \Delta_k \Delta_0 u] = [\Delta_l \Delta_k f J_1\, \Delta_l \Delta_k \Delta_0 u]$$

по l, k от 1 до n и преобразовать левую часть, аналогично, как раньше. Получится оценка

$$\langle \sum_{k,l=1}^{n} \{(\Delta_0 \Delta_k \Delta_l u)^2 + (\Delta_k \Delta_l u)^2 + a_{ij}\, \Delta_i \Delta_k \Delta_l u\, \Delta_j \Delta_k \Delta_l u\}\rangle_p \leqq \tag{18}$$
$$\leqq C_1 [f^2 + \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k f)^2 + \sum_{k,l=1}^{n} (\Delta_k \Delta_l f)^2]_p e^{2Cp\tau}\,,$$

где C_1 и C зависят от тех же величин, что константы в неравенстве (17) и кроме того от констант Липшица по x_l функций $\partial a_{ij}/\partial x_k\, \partial x_s$, $\partial a_{i0}/\partial x_k$, $\partial b_0/\partial x_k$, $\partial b_i/\partial x_k$, $\partial c/\partial x_k$, $(i, j, k, l, s = 1, 2, \ldots, n)$, если, конечно, x удовлетворяет условию (8) и τ достаточно мало.

Из уравнения (1') получаем оценку

$$\tau \sum_{s=0}^{M-1} \langle (\Delta_0^2 u)^2 \rangle_s \leqq C[f^2 + \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k f)^2 + \sum_{k,l=1}^{n} (\Delta_k \Delta_l f)^2]_M\,. \tag{19}$$

Если теперь оцененные разностные отношения до второго порядка включительно продолжить на V_T (на пример кусочно постоянно) то оценки (11), (17), (18) и (19) показывают ограниченность этих продолжений в L_2 (причем равномерную по τ, h), если f, $\partial f/\partial x_i$, $\partial^2 f/(\partial x_i\, \partial x_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n) \in C(V_T)$ и имеют компактный в V_T носитель. Так же как в [4] отсюда получится, что при τ, $h \to 0$

соответствующие продолжения сходятся слабо в $L_2(V_T)$ к решению задачи (1), (2) и его производным. Итак мы доказали теорему:

Теорема 2. *Пусть оператор* (1) *удовлетворяет условиям* (А), (Б). *Пусть его коэффициенты и правая часть* (1) *удовлетворяют следующим условиям гладкости:* $a_{ij} \in C^{1,1}$, a_{0i}, $b_i \in C^{1,0}$, b_0, $c \in C^{0,1}$, *и все эти производные удовлетворяют условию Липшица по* x_l $(i, j, l = 1, 2, \ldots, n)$. *Пусть* f, $\partial f/\partial x_i$, $\partial^2 f/(\partial x_i\, \partial x_j) \in C(V_T)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *и имеют компактный носитель. Тогда при* $\varkappa$ *удовлетворяющем условию* (8) *и* τ *достаточно малом разностная схема* (1'), (2') *для* (1), (2) *устойчива и решение этой задачи можно получить как слабый предел в* $L_2(V_T)$ *при* τ, $h \to 0$ *продолжений решений* (1'), (2'), *причем продолжения разностных отношений до второго порядка включительно сходятся слабо к соответствующим производным решения* (1), (2).

Замечание 1. Теорему можно обобщить (см. [3]) на случай, когда f, $\partial f/\partial x_i$, $\partial^2 f/(\partial x_i\, \partial x_j) \in L_2(V_T)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Замечание 2. Предполагая большую гладкость коэффициентов и правой части, можно показать соответственно большую гладкость решения.

Замечание 3. С помощью указанной схемы можно также построить решение $\in L_2$ смешанной задачи $Lu - f$ в $Q = \Omega \times \langle 0, T \rangle$, $\Omega \in E_n$, $u|_{x_0 = 0, x' \in \Omega} = \partial u/\partial x|_{x_0 = 0, x' \in \Omega} = 0$, $u = 0$ на $\dot{\Omega} \times \langle 0, T \rangle$ (ср. [2], [4]).

Замечание 4. Если коэффициенты $a_{i0} \equiv 0$, то можно применить более простую схему:

$$\tilde{L}_\Delta u = f \quad \text{для} \quad k_0 \geqq 0$$
$$u = 0 \quad \text{для} \quad k_0 \leqq 1\,,$$

где

$$\tilde{L}_\Delta u \equiv \hat{\Delta}_0 \hat{\Delta}_{-0} u - \hat{\Delta}_{-j}(a_{ij} \hat{\Delta}_i) + b_i\, \hat{\Delta}_i u + b_0\, \hat{\Delta}_0 u + Cu\,.$$

Литература

[1] *О. А. Олейник:* Задача Коши и смешанная задача для гиперболических уравнений второго порядка вырождающихся в области и на ее границе. ДАН СССР, т. 166, № *3* (1966), 525—528.

[2] *И. Копачек:* Решение задачи Коши и смешанной задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка методом конечных разностей. Čas. pěst. mat. *93* (1968), 148–157.

[3] *И. Копачек:* Решение задачи Коши для линейных гиперболических уравнений методом конечных разностей. Чехосл. мат. журн., т. *14* (*89*) (1964) № 1, 52—78.

[4] *И. Копачек:* Явная разностная схема для решения смешанной задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка. ЖВММФ, т. *4* (1964) № 5, 826—934.

Адресс автора: Sokolovská 83, Praha 8 - Karlín (Matematicko-fyzikální fakulta UK).