Časopis pro pěstování matematiky

Josef Král

Hladké funkce s nekonečnou cyklickou variací

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 178--185

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108570`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

HLADKÉ FUNKCE S NEKONEČNOU CYKLICKOU VARIACÍ

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo 3. března 1967)

1. Úvod. Umluvme se, že euklidovskou rovinu E_2 budeme ztotožňovat s množinou komplexních čísel; bod $[x, y] \in E_2$ nebudeme tedy rozlišovat od komplexního čísla $x + iy$. Nechť K je jednoduchý orientovaný oblouk konečné délky v E_2. V souvislosti s vyšetřováním chování integrálů typu

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Im} \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

pro z v blízkosti K byla v [2] zavedena tzv. cyklická variace oblouku K, která je v každém bodě $\zeta \in K$ definována předpisem

$$v^K(\zeta) = \int_0^{2\pi} \mu^K(\zeta, \alpha) \, d\alpha \,,$$

kde $\mu^K(\zeta, \alpha)$ značí celkový počet průsečíků K s polopřímkou $\{\zeta + re^{i\alpha}; r > 0\}$. S pomocí této cyklické variace byly v [2]–[5] formulovány nutné a postačující podmínky pro spojitou prodloužitelnost a existenci úhlových limit integrálů typu (1).

Podmínka

$$\text{(2)} \qquad v^K(\zeta) < \infty$$

je např. nutná k tomu, aby integrál (1), chápaný jako funkce proměnné z, měl úhlové limity (viz úvodní poznámku k článku [4]) ve zvoleném bodě $\zeta \in K$ pro každou spojitou reálnou funkci F na K. Vzniká přirozeně otázka, do jaké míry je podmínka (2) zaručena tím, že K má konečnou délku. Lze snadno nahlédnout, že existují rektifikovatelné oblouky K, na nichž se najdou body ζ, v nichž není podmínka (2) splněna. Na první pohled však není patrno, jak mnoho může být takových bodů ζ. V odst. 3.15 článku [4] byl metodou kondensace singularit sestrojen příklad oblouku K, který je grafem spojité funkce f s konečnou variací na $\langle 0, 1 \rangle$ a má tu vlastnost, že $v^K(x + i\,f(x)) = \infty$ pro skoro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Předkládaná poznámka je doplňkem k tomuto příkladu. Ukážeme, že je ho možno podstatně zlepšit. Funkci f lze volit spojitě diferencovatelnou a je možno dosáhnout toho, aby pro její graf K

platilo $v^K(x + i f(x)) = \infty$ dokonce všude na $\langle 0, 1\rangle$; navíc uvidíme, že tuto vlastnost má „většina" spojitě diferencovatelných funkcí (ve smyslu kategorie v prostoru C^1).

2. Označení. Pojmy a věty z teorie reálných funkcí, kterých budeme používat bez odvolání, lze najít např. v učebnici [6]. Variaci funkce f na intervalu I (který nemusí být uzavřený) značíme symboly $\operatorname{var}[f; I]$ nebo $\operatorname{var}_t [f(t); I]$; definujeme ji jako supremum všech součtů tvaru $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)|$ přiřazených konečným systémům nepřekrývajících se intervalů $\langle a_k, b_k\rangle \subset I$. Variaci funkce na prázdném intervalu klademe rovnu nule. Je-li f spojitá reálná funkce na $\langle a, b\rangle$, položíme ve shodě s [4] pro $x \in \langle a, b\rangle$ a $y \in E_1$

$$\pi^f[x + iy; \langle a, b\rangle] = \operatorname{var}_t \left[\operatorname{arctg} \frac{f(t) - y}{t - x}; \quad (x, b\rangle \right] + \\ + \operatorname{var}_t \left[\operatorname{arctg} \frac{f(t) - y}{t - x}; \quad \langle a, x) \right].$$

Pro $y = f(x)$ dostáváme snadno podle Banachovy věty o variaci spojité funkce, že $\pi^f[x + i f(x); \langle a, b\rangle]$ je rovno cyklické variaci funkce f v bodě x. Snadným výpočtem lze zjistit, že $\pi^f[x + i f(x); \langle a, b\rangle] \leqq [K(\alpha + 2)/(\alpha + 1)] \int_a^b (t - x)^{\alpha - 1} \, dt$, jestliže f má na $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci splňující podmínku $|f'(t) - f'(x)| \leqq \leqq K|t - x|^\alpha$, $a \leqq t \leqq b$ $(\alpha > 0)$.

Symbolem L^1_∞ označíme Banachův prostor všech lipschitzovských funkcí na $\langle 0, 1\rangle$, které se anulují v počátku; norma funkce $f \in L^1_\infty$ je dána předpisem

$$\|f\| = \sup_{0 \leqq u < v \leqq 1} \frac{|f(u) - f(v)|}{v - u}.$$

Původ označení tkví v tom, že L^1_∞ je možno ekvivalentně definovat jako množinu všech absolutně spojitých funkcí na $\langle 0, 1\rangle$, které se anulují v počátku a mají na $\langle 0, 1\rangle$ esenciálně omezenou (tj. „integrovatelnou s mocninou ∞") první derivaci, přičemž norma prvku $f \in L^1_\infty$ je rovna

$$\|f\| = \operatorname*{sup\,ess}_{0 \leqq t \leqq 1} |f'(t)|.$$

Množina C^1 všech spojitě diferencovatelných funkcí na $\langle 0, 1\rangle$ nabývajících hodnoty 0 v počátku tvoří uzavřený podprostor v L^1_∞. Pro $f \in C^1$ máme ovšem

$$\|f\| = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |f'(t)|.$$

Symbolem C označíme Banachův prostor všech spojitých funkcí na $\langle 0, 1\rangle$ s normou

$$\|f\|_C = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |f(t)|.$$

Lze snadno nahlédnout, že pro $f \in L^1_\infty$ platí

(3) $$\|f\|_C \leqq \|f\| .$$

Tvrzení, jež bylo vysloveno v úvodu, dokážeme v odst. 10; jeho důkazu předešleme několik jednoduchých lemmat.

3. *Funkce* $\pi^f[x + i f(x); \langle 0, 1\rangle]$ *proměnných* x, f *je zdola polospojitá na* $\langle 0, 1\rangle \times C$.

Důkaz. Zvolme pevně $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, $f_0 \in C$ a nechť $c < \pi^{f_0}[x_0 + i f(x_0); \langle 0, 1\rangle]$. Pak existuje konečně mnoho nepřekrývajících se intervalů $\langle a_k, b_k\rangle \subset \langle a, b\rangle - \{x\}$ tak, že

$$\sum_k \left|\operatorname{arctg}\frac{f_0(b_k) - f_0(x_0)}{b_k - x_0} - \operatorname{arctg}\frac{f_0(a_k) - f_0(x_0)}{a_k - x_0}\right| > c .$$

Odtud je patrno, že při dostatečně malém $\delta > 0$ je nerovnost

$$\sum_k \left|\operatorname{arctg}\frac{f(b_k) - f(x)}{b_k - x} - \operatorname{arctg}\frac{f(a_k) - f(x)}{a_k - x}\right| > c$$

splněna pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \langle 0, 1\rangle$ a všechny funkce $f \in C$, pro něž $\|f - f_0\|_C < \delta$. Pro tato x a f je tedy $\pi^f[x + i f(x); \langle 0, 1\rangle] > c$.

Z tvrzení v odst. 3 plyne snadno následující známý důsledek:

4. *Položme pro* $f \in C$

(4) $$F(f) = \inf_{0 \leqq x \leqq 1} \pi^f[x + i f(x); \langle 0, 1\rangle] .$$

Pak $F(f)$ *je zdola polospojitou funkcí proměnné* $f \in C$, *takže množina*

$$A_k = \{f;\ f \in C,\ F(f) \leqq k\}$$

je uzavřená v C *pro každé* $k \in E_1$.

Důkaz. Zvolíme-li $f_0 \in C$ a $c < F(f_0)$, pak každému $x \in \langle 0, 1\rangle$ můžeme přiřadit okolí $U(x)$ bodu x v $\langle 0, 1\rangle$ a okolí $V(x)$ prvku f_0 v C tak, že

$$(\bar{x} \in U(x), f \in V(x)) \Rightarrow \pi^f[\bar{x} + i f(\bar{x}); \langle a, b\rangle] > c ;$$

vybereme-li z $\{U(x)\}_{x \in \langle 0, 1\rangle}$ konečné pokrytí $\{U(x_k)\}_{k=1}^s$ intervalu $\langle 0, 1\rangle$, potom

$$f \in \bigcap_{k=1}^{s} V(x_k) \Rightarrow F(f) > c .$$

5. Poznámka. Další postup důkazu věty z odst. 10 je v podstatě shodný s důkazem obdobné věty týkající se množiny nediferencovatelných funkcí v prostoru C, který je proveden v [1].

Naším cílem je nyní dokázat, že každá množina $C^1 \cap A_k$ je řídká v C^1. Podle nerovnosti (3) je přirozené vnoření prostoru C^1 do prostoru C spojité, takže vzhledem k odst. 4 je $C^1 \cap A_k$ uzavřená v C^1. Máme tedy ověřit, že $C^1 - A_k$ je hustá v C^1. Na základě odst. 7 nejprve dokážeme, že libovolnou funkci $l \in C^1$ můžeme vzhledem k normě $\|\ldots\|$ jak chceme přesně aproximovat po částech lineární funkcí $f \in L^1_\infty - A_k$. Funkce f ovšem nepadne do C^1; jejím dostatečně jemným „uhlazením“ dostaneme však funkci e, která se příliš neodchýlí od l, zůstane mimo A_k a bude patřit do C^1. Jádrem celého důkazu je tedy lemma z odst. 7 (opírající se o lemma 3.14 z [4]), k jehož odvození upotřebíme následující jednoduchý odhad.

6. *Je-li funkce p absolutně spojitá na každém kompaktním intervalu obsaženém v intervalu I (který nemusí být uzavřený), pak pro každé $d \in E_1$ platí*

$$\operatorname{var}[\operatorname{arctg}(p + d); I] \geqq \frac{\operatorname{var}[\operatorname{arctg} p; I]}{\max(2, 1 + 2d^2)}.$$

Důkaz. Píšeme-li $\alpha = 1/\max(2, 1 + 2d^2)$, pak

$$\operatorname{var}[\operatorname{arctg}(p + d); I] = \int_I \frac{|p'(t)|}{1 + (p(t) + d)^2}\, dt \geqq$$

$$\geqq \int_I \frac{|p'(t)|\, dt}{1 + 2d^2 + 2p^2(t)} \geqq \alpha \int_I \frac{|p'(t)|}{1 + p^2(t)}\, dt = \operatorname{var}[\operatorname{arctg} p; I].$$

7. *Buď g lineární funkce na nedegenerovaném intervalu $\langle a, b\rangle$, $d = g'(\frac{1}{2}(a + b))$, $0 < q < 1$ a předpokládejme, že h je spojitá po částech lineární funkce na $\langle a, b\rangle$ taková, že $|h| \leqq 2q/n$,*

$$h\left(a + (2j - 1)\frac{b - a}{2n}\right) = \frac{2q}{n} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$h\left(a + 2j\,\frac{b - a}{2n}\right) = 0 \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Položíme-li $f = g + h$, potom pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$\pi^f[x + i f(x); \langle a, b\rangle] \geqq \frac{q(b - a)}{(1 + (b - a)^2)\max(2, 1 + 2d^2)} \sum_{s=2}^{n} s^{-1}. \tag{5}$$

Důkaz. Zvolme pevně $x \in \langle a, b\rangle$ a pišme $y = h(x)$, $c = g(x)$, $\hat{g} = g - c$. Potom $f = h + \hat{g} + c$, $f(x) = y + c$, takže

$$\pi^f[x + i f(x); \langle a, b\rangle] = \pi^{h+\hat{g}}[x + iy; \langle a, b\rangle]. \tag{6}$$

Pro $t \neq x$ máme dále $\hat{g}(t)/(t - x) = d$, takže podle odst. 6 dostáváme

$$\pi^{h+\hat{g}}[x + iy; \langle a, b\rangle] = \operatorname{var}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{h(t) - y}{t - x} + d\right);\ \langle a, x)\right] + \tag{7}$$

$$+ \operatorname{var}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{h(t) - y}{t - x} + d\right);\ (x, b\rangle\right] \geqq \frac{\pi^h[x + iy; \langle a, b\rangle]}{\max(2, 1 + 2d^2)}.$$

Podle našeho předpokladu je $|y| \leqq 2q/n$. Aplikujeme-li na funkci h lemma 3.14 z [4], obdržíme nerovnost

$$\pi^h[x + iy; \langle a, b\rangle] \geqq \frac{q(b - a)}{1 + (b - a)^2} \sum_{s=2}^{n} s^{-1}. \tag{8}$$

Vztahy (6)–(8) dávají konečně (5).

V odst. 9 budeme potřebovat následující jednoduché lemma o „uhlazování" funkcí z L^1_∞.

8. *Každému $\delta \in (0, 1)$ lze přiřadit lineární zobrazení R_δ prostoru L^1_∞ do prostoru C^1 tak, aby byly splněny následující požadavky:*

$$f \in L^1_\infty \Rightarrow \|R_\delta f\| \leqq \|f\|, \quad \lim_{\delta \to 0+} \|f - R_\delta f\|_C = 0, \tag{9}$$

$$f \in C^1 \Rightarrow \lim_{\delta \to 0+} \|f - R_\delta f\| = 0. \tag{10}$$

D ů k a z. Každé funkci $f \in L^1_\infty$ přiřadíme nejprve funkci Ef na $\langle -1, 2\rangle$ tak, že pro $x \in \langle -1, 0)$, $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$ definujme po řadě $Ef(x) = -f(-x)$, $f(x)$, $2f(1) - f(2 - x)$. Graf Ef nad intervalem $\langle -1, 0\rangle$ je tedy vzhledem k počátku symetrický s grafem funkce f a ten je opět symetrický vzhledem k bodu $[1, f(1)]$ s grafem funkce Ef nad intervalem $\langle 1, 2\rangle$. Je-li tedy dokonce $f \in C^1$, pak Ef má spojitou derivaci na $\langle -1, 2\rangle$. Nyní položíme pro každé $\delta \in (0, 1)$ a $f \in L^1_\infty$

$$R_\delta f(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} Ef(x - t)\, dt, \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Je zřejmé, že $R_\delta : f \to R_\delta f$ je lineární zobrazení prostoru L^1_∞ do C^1. Ověření podmínek (9), (10) můžeme už přenechat čtenáři.

Nyní můžeme přistoupit k důkazu následujícího tvrzení.

9. *Množina $C^1 \cap A_k$ je řídká v C^1 pro každé $k \in E_1$.*

D ů k a z. Idea důkazu byla už vysvětlena v poznámce z odst. 5. Zvolme tedy libo. volně $l \in C^1$ a $\varepsilon > 0$. Naším cílem je najít $e \in C^1 - A_k$ tak, aby $\|l - e\| < 3\varepsilon$ Protože l' je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$, existují nedegenerované nepřekrývající se intervaly $\langle a_m, b_m\rangle$ $(m = 1, \ldots, r)$ a funkce l_1, která je konstantní na každém z intervalů

(a_m, b_m), tak, že $\bigcup_m \langle a_m, b_m\rangle = \langle 0, 1\rangle$ a

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} |l'(t) - l_1(t)| < \varepsilon .$$

Definujeme-li

$$g(x) = \int_0^x l_1(t)\, dt , \quad 0 \leqq x \leqq 1 ,$$

pak $g \in L^1_\infty$,

(11) $$\|g - l\| < \varepsilon$$

a g je lineární na každém intervalu $\langle a_m, b_m\rangle$. Každému m $(=1, \ldots, r)$ přiřaďme nyní $q_m > 0$ tak, aby

(12) $$\frac{4q_m}{b_m - a_m} < \varepsilon .$$

Dále zvolíme $n = n_m$ tak velké, aby pro $d_m = g'(\frac{1}{2}(a_m + b_m))$ platilo

(13) $$\frac{q_m(b_m - a_m)}{(1 + (b_m - a_m)^2) \max(2, 1 + 2d_m^2)} \sum_{s=2}^{n} s^{-1} > k$$

a sestrojíme spojitou po částech lineární funkci h_m na $\langle 0, 1\rangle$ tak, aby se anulovala mimo $\langle a_m, b_m\rangle$, byla lineární na intervalech

$$\left\langle a_m + (j - 1)\frac{b_m - a_m}{2n}, a_m + j\frac{b_m - a_m}{2n}\right\rangle \quad (j = 1, \ldots, 2n)$$

a splňovala podmínky

$$h_m\left(a_m + (2j - 1)\frac{b_m - a_m}{2n}\right) = \frac{2q_m}{n} \quad (j = 1, \ldots, n) ,$$

$$h_m\left(a_m + 2j\frac{b_m - a_m}{2n}\right) = 0 \qquad (j = 0, \ldots, n) .$$

Nakonec položíme $h = \sum_{m=1}^{r} h_m$, $f = g + h$. Funkce h, f jsou spojité a po částech lineární na $\langle 0, 1\rangle$ a patří tedy do L^1_∞. Protože $\|h\| = \max_m (4q_m/(b_m - a_m))$, dostáváme z (12) a (11)

(14) $$\|l - f\| < 2\varepsilon .$$

Uvažujme nyní libovolný bod $x \in \langle 0, 1\rangle$. Pak $x \in \langle a_m, b_m\rangle$ pro vhodné m a podle odst. 7 platí s ohledem na nerovnost (13)

$$\pi^f[x + i f(x); \langle 0, 1\rangle] \geqq \pi^f[x + i f(x); \langle a_m, b_m\rangle] > k .$$

Z odst. 3 plyne, že $\pi^f[x + i f(x); \langle 0, 1\rangle]$ je zdola polospojitou funkcí proměnné x na $\langle 0, 1\rangle$; nabývá tedy svého minima na $\langle 0, 1\rangle$, takže při označení (4) z odst. 4 máme $F(f) > k$.

Z podmínky (9) a odst. 4 dostáváme

$$\liminf_{\delta \to 0+} F(R_\delta f) \geqq F(f) > k .$$

Z podmínky (10) plyne

$$\lim_{\delta \to 0+} \|l - R_\delta l\| = 0 .$$

Zvolíme-li tedy $\delta \in (0, 1)$ dostatečně malé, dosáhneme toho, že

$$F(R_\delta f) > k , \tag{15}$$

$$\|l - R_\delta l\| < \varepsilon . \tag{16}$$

Podle podmínky (9) je krom toho $\|R_\delta l - R_\delta f\| = \|R_\delta(l - f)\| \leqq \|l - f\|$, takže z (14) a (16) plyne $\|l - R_\delta f\| \leqq \|l - R_\delta l\| + \|R_\delta l - R_\delta f\| < 3\varepsilon$. Vzhledem k (15) je tedy $e = R_\delta f$ hledaným prvkem z $C^1 - A_k$.

Nyní už je prakticky hotov důkaz následující věty:

10. Věta. *Množina všech funkcí z C^1 majících nekonečnou cyklickou variaci v každém bodě intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je residuální v C^1.*

Důkaz. Komplementem zmíněné množiny je $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap C^1$.

Poznámka. Existují tedy spojitě diferencovatelné funkce, které mají nekonečnou cyklickou variaci v každém bodě. Bylo by ovšem také možno podat přímou konstrukci takové funkce. V této souvislosti je zajímavé si všimnout, že požadavek spojité diferencovatelnosti je svého druhu „nejzazší mez"; každá funkce s hölderovsky spojitou derivací má totiž už konečnou cyklickou variaci v každém bodě. Věta 10 je tedy v jistém smyslu „ostrá". Množina všech funkcí s identicky nekonečnou cyklickou variací je residuální i v jiných funkčních prostorech. Úvahami shodnými s důkazy tohoto článku to lze (po jistých zjednodušeních) ověřit např. pro prostor všech absolutně spojitých funkcí f na $\langle 0, 1\rangle$ anulujících se v počátku s normou

$$\|f\| = \left\{\int_0^1 |f'(t)|^p \,\mathrm{d}t\right\}^{1/p}$$

při libovolném $p \geqq 1$. Tento fakt ve srovnání s větou 10 ovšem nikterak nepřekvapuje.

Literatura

[1] *V. Jarník:* O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné. Dodatek ke knize E. Čecha Bodové množiny, Praha 1936.

[2] *J. Král:* On the logarithmic potential. Comment. Math. Univ. Carolinae *3* (1962), No 1, 3—10.

[3] *J. Král:* On the logarithmic potential of the double distribution. Czech. Math. Journal *14* (*89*), 1964, 306—321.

[4] *J. Král:* Non-tangential limits of the logarithmic potential. Czech. Math. Journal *14* (*89*), 1964, 455—482.

[5] *J. Král:* Об угловых предельных значениях интегралов типа Коши. Доклады Акад. Наук СССР, т. *155* (1964), № 1, 32—34.

[6] *I. P. Natanson:* Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1954 (И. П. Натансон: Теория функций вещественной переменной.)

Adresa autora: Žitná 25, Praha 1 (Matematický ústav ČSAV).

Summary

SMOOTH FUNCTIONS WITH INFINITE CYCLIC VARIATION

JOSEF KRÁL, Praha

If h is a continuous function on $\langle 0, 1\rangle$, $x \in \langle 0, 1\rangle$ and $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi$, then $n^h(\varphi, x)$ designates the number of points at which the graph of h meets the straight-line through $[x, h(x)]$ enclosing the angle φ with the oriented x-axis. Since $n^h(\varphi, x)$ is a measurable function of the variable φ, one may introduce the integral $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} n^h(\varphi, x)\,.\,\mathrm{d}\varphi = V_h(x)$ which is termed the cyclic variation of h at x. Similar quantities proved to be useful in connection with investigations of double layer potentials. Completing results of the paper [4] the author establishes the existence of continuously differentiable functions having nowhere finite cyclic variation by proving the following theorem: Let C^1 stand for the Banach space of all continuously differentiable functions f on $\langle 0, 1\rangle$ with $f(0) = 0$, equipped with the norm $\|f\| = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |f'(t)|$. Then the set of all $f \in C^1$ having $V_f(x) < \infty$ for at least one $x \in \langle 0, 1\rangle$ is of the first category in C^1. In connection with this result it is interesting to note that $V_f(x)$ is bounded on $\langle 0, 1\rangle$ provided f has a Hölder-continuous derivative on $\langle 0, 1\rangle$.