Časopis pro pěstování matematiky

Ján Jakubík

Об одном классе структурно упорядоченных групп

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 150--161

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108542

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 24/III 1958 г.)

DT: 519.4

В работе исследуется определенный класс структурно упорядоченных (в общем случае некоммутативных) групп. Доказывается, что о строении таких групп справедлива теорема, аналогичная теореме, которую доказал Г. Биркгоф для коммутативных структурно упорядоченных групп.

Для структурно упорядоченных групп (или l-групп) мы пользуемся теми же обозначениями, как в монографии [2], гл. XIV (считаемся с тем, что читатель ознакомлен с § 1 этой главы). Пусть G — l-группа. Если $A \subset G^+$, то через $K'(A)$ обозначим множество всех элементов $y \in G^+$, для которых

$$x \in A \Rightarrow x \cap y = 0 .$$

Далее обозначим $K'(K'(A)) = K(A)$.

Мы будем изучать l-группы G, которые удовлетворяют следующему условию:

(P) *Если* $A \subset G^+$, *то к любому* $x \in G^+$ *найдутся элементы* $y \in K(A)$, $z \in K'(A)$ *такие, что* $x \leqq y \cup z$.

В работе [1] доказал Г. Биркгоф теорему, которую он сам называет основной теоремой о строении коммутативных l-групп ([1], теорема 33, или же [2], гл. XIV, теорема 22). Целью настоящей заметки является доказательство утверждения, что для групп, удовлетворяющих исловию (P)), справедлива теорема, совершенно аналогичная цитированной теореме Биркгофа.

Отметим, что условие (P) касается только „структурных“ свойств; l-группа G, удовлетворяющая условию (P), может не быть коммутативной (и, наоборот, коммутативная l-группа не должна удовлетворять условию (P). См. приведенные ниже примеры 1 и 2.

Построение, аналогичное описанному построению множества $K'(A)$ применяется в [1], гл. XIV, § 12 (сравни цитированную там литературу) и также в [3]. Если $A \subset G$, то в работе [3] множеству A поставлено в соответствие некоторое подмножество из G, называемое „компонентой"; в частном случае $A \subset G^+$ пересечение этой компоненты с множеством G^+ равно $K(A)$. Потому что выражение „компонента" употребляли уже раньше Е. П. Шимбирева ([4]) и А. И. Мальцев ([5]) в работах о частично упорядоченных группах в совсем ином смысле, мы не будем им пользоваться (за исключением одной заметки в отделе 10). С определенным выше множеством $K(A)$ находится в тесной связи понятие „filet", введенное в работе П. Джаффарда (P. Jaffard, [6]); если $x, y \in G^+$, то элементы x, y лежат в одном и том же „filet" тогда и только тогда, если будет $K'(\{x\}) = K'(\{y\})$.

1. Два примера. Пример 1. Каждая упорядоченная группа G удовлетворяет условию (P), так как для любого множества $A \subset G^+$ или $K'(A) = \{0\}$, $K(A) = G^+$, или $K'(A) = G^+$, $K(A) = \{0\}$. Из того обстоятельства, что существуют некоммутативные упорядоченные группы (см. например [2], стр. 216), вытекает, что структурно упорядоченная группа, удовлетворяющая условию (P), не должна быть коммутативной.

Пример 2. Пусть G — множество всех троек действительных чисел, для которых определим сложение следующим образом: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Частичное упорядочение в G определим так:

$$(x_1, y_1, z_1,) \leqq (x_2, y_2, z_2)$$

тогда и только тогда, если либо a) $x_1 \leqq x_2$, либо b) $x_1 = x_2$ и одновременно $y_1 \leqq y_2$, $z_1 \leqq z_2$. Легко можно проверить, что G является l-группой. Обозначим $a = (0, 1, 0)$, $A = \{a\}$. Тогда $K'(A)$ есть множество всех троек вида $(0, 0, z)$, $z \geqq 0$ и $K(A)$ — множество всех троек $(0, y, 0)$, $y \geqq 0$. Для произвольных таких троек справедливо

$$(0, y, 0) \cup (0, 0, z) = (0, y, z) < (1, 0, 0)\,;$$

итак, l-группа G не удовлетворяет условию (P).

2. Всюду в дальнейшем G обозначает l-группу, малыми буквами обозначены элементы множества G. Если обозначим большой буквой (например, A) подмножество множества G, то соответствующими малыми буквами (напр. a, a_1, a') будем обозначать элементы множества A. Если $A, B \subset G$, то символы $A \cap B$, $A \cup B$ употребляются в смысле множественных операций (это условие относится только к подмножествам множества G, обозначенным большими буквами; сравни с пунктом 12 ниже).

K' и K можем считать операциями, определенными на системе всех подмножеств множества G^+. Из определения непосредственно вытекает, что для любых множеств

a) $A \subset B \Rightarrow K'(A) \supset K'(B)$; $K'(\emptyset) = K'(\{0\}) = G^+$; $K'(G^+) = \{0\}$,

b) $K(K'(A)) = K'(A)$; $K'(K(A)) = K'(A)$.

Из этого далее получаем

c) $A \subset B \Rightarrow K(A) \subset K(B)$; $K(K(A)) = K(A)$; $K(\emptyset) = K(\{0\}) = \{0\}$, $K(G^+) = G^+$.

Так как, очевидно, $A \subset K(A)$, то из c) вытекает, что операция K является „closure operation" в смысле [2], стр. 49. Если $A = K(A)$, то мы скажем (согласно терминологии, употребляемой в [2]), что множество A замкнуто. (Если A является при этом одновременно подмножеством двух различных структурно упорядоченных групп G_i ($i = 1, 2$), будем говорить о замкнутости относительно G_1 или же относительно G_2.)

Далее, очевидно, что (так как G^+ — дистрибутивная структура)

d) $K'(A)$, $K(A)$ — идеалы в структуре G^+; $K'(A) \cap K(A) = \{0\}$.

В отделах 3—7 *предполагается, что* G *удовлетворяет условию* (P).

3. *Пусть* $A \subset G^+$. *Обозначим* $K'(A) = C$, $K(A) = D$. *К любому элементу* $x \in G^+$ *существует единственный элемент* c *и единственный элемент* d *такой, что* $x = c \cup d$.

Доказательство. Согласно (P) существуют элементы c_1, d_1, для которых $x \leqq c_1 \cup d_1$. Согласно 2d) $x \cap c_1 \in C$, $x \cap d_1 \in D$; обозначим $x \cap c_1 = c$, $x \cap d_1 = d$. Из дистрибутивности структуры G^+ вытекает $c \cup d = x$. Если одновременно $c' \cup d' = x$, то (так как, согласно 2d), $c \cap d = 0$, $c' \cup d' = 0$) из дистрибутивности структуры G^+ вытекает $c = c'$, $d = d'$.

4. Понятие прямого произведения (для структур, l-групп, l-полугрупп) можно ввести формально различными (и притом эквивалентными) способами. Воспользуемся определением и обозначениями, введенными в [7] (а именно в отделе 14 для l-полугрупп или l-групп и в отд. 20 для структур с наименьшим элементом).

Пусть имеют место предположения из пункта 3. *Тогда структура* G^+ *является прямым произведением своих подструктур* C, D.

Доказательство вытекает из 2d), из результатов пункта 3 и из диструибутивности структуры G^+.

5. Понятие l-полугруппы введено в [2], гл. XIII.

Пусть имеют место предположения из пункта 3. Множества C, D являются (относительно операций $+$, $\cap$, $\cup$, рассматриваемых в G) l-полугруппами. l-полугруппа G^+ представляет собой прямое произведение l-полугрупп C, D

$$G^+ \cong C \times D. \tag{1}$$

Доказательство вытекает из результатов пункта 4 и из [7] (теорема 3).

6. К любому подмножеству $A \subset G^+$ существует разложение l-группы G в прямое произведение

$$G \cong A_0 \times B_0, \tag{2}$$

причем $A_0^+ = K'(A)$, $B_0^+ = K(A)$.

Доказательство вытекает из 5 и из [7] (отдел 17).

Как следствие получаем:

Теорема 1. *Если l-группа G удовлетворяет условию* (P), *то она либо упорядочена, либо разложима (нетривиальным способом) в прямое произведение.*

Доказательство. Пусть l-группа G не является упорядоченной. Тогда в ней имеются несравнимые элементы a, b. Обозначим $a \cap b = c$, $a - c = x$, $b - c = y$. Справедливы неравенства $a > c$, $b > c$, следовательно, $x > 0$, $y > 0$. Далее,

$$x \cap y = (a - c) \cap (b - c) = (a \cap b) - c = 0 .$$

Обозначим $A = \{x\}$, $K'(A) = C$, $K(A) = D$. Образуем соответствующее разложение (1) и (2). Так как $y \in C$, $x \in D$, то эти прямые разложения нетривиальны.

7. Пусть задано произвольное разложение l-группы G в прямое произведение $G \cong C \times D$. Займемся вопросом, удовлетворяет ли l-группа C условию (P).

Прежде всего докажем вспомогательное утверждение: *Если множество $U \subset C$ замкнуто относительно l-группы C, то оно замкнуто также относительно l-группы G.*

Пусть для $A \subset C^+$ символ $K'_C(A)$ означает множество всех элементов $y \in C^+$, удовлетворяющих условию $x \in A \Rightarrow x \cap y = 0$. Обозначим, далее, $K'_C(K'_C(A)) = K_C(A)$. Если множество $U \subset C^+$ замкнуто относительно C, то, согласно пункту 2, существует множество $A \subset C^+$ такое, что $U = K'_C(A)$ (ибо, $A = K'_C(U)$). Следовательно, приведенное выше утверждение равносильно следующему:

7.1. *Пусть l-группа G разложима в прямое произведение*

$$G \cong C \times D , \tag{3}$$

пусть $A \subset C^+$. Тогда

$$K(K'_C(A)) = K'_C(A) . \tag{3'}$$

Доказательство утверждения 7.1. Обозначим $K'(K'_C(A)) = A_1$. Элемент z принадлежит множеству A_1 тогда и только тогда, когда

$$y \in K'_C(A) \Rightarrow y \cap z = 0 . \tag{4}$$

Так как $z \in G^+$, вытекает из соотношения (3), что z можно писать в виде

$$z = c \cup d , \quad c \geqq 0 , \quad d \geqq 0 . \tag{4'}$$

Подставляя в (4) (так как $y \in C^+$, $y \cap d = 0$) и учитывая дистрибутивность, получаем

$$y \cap c = 0 . \tag{5}$$

Согласно (4) соотношение (5) справедливо для каждого $y \in K'_C(A)$, следовательно, $c \in K_C(A)$. Наоборот, если $c \in K_C(A)$ и $d \in D^+$, то элемент $z = c \cup d$ выполняет (4). Этим мы доказали: множество A_1 состоит из всех элементов вида (4′), где $c \in K_C(A)$.

Обозначим $K(K'_C(A)) = A_2$. Элемент u принадлежит множеству A_2 тогда и только тогда, если

$$z \in A_1 \Rightarrow z \cap u = 0 . \tag{6}$$

Пусть $u \in A_2$. Подставим в (6) вместо z выражение из равенства (4′). Сначала положим $c = 0$. Получим

$$d \in D^+ \Rightarrow d \cap u = 0 , \tag{7}$$

следовательно, $u \in K'(D^+)$. Легко можно доказать, что из (3) вытекает $K'(D^+) = C^+$, так что

$$u \in C^+. \tag{8}$$

Далее положим для элемента z в равенстве (4′) $d = 0$. Из соотношения (6) получаем

$$c \in K_C(A) \Rightarrow c \cap u = 0 .$$

Согласно (8), в таком случае должно быть $u \in K'_C(A)$. Следовательно, $A_2 \subset K'_C(A)$. Но, очевидно, $A_2 = K(K'_C(A)) \supset K'_C(A)$. Этим доказано равенство (3′).

7.2. *Пусть l-группу G можно разложить в прямое произведение* (3). *Тогда l-группа C удовлетворяет условию* (P).

Доказательство. Воспользуемся утверждениями из отдела 3 (вместо символов A, C, D, применяемых в 3, возьмем теперь $K'_C(A)$, $R = K'(K'_C(A))$, $S = K(K'_C(A))$. Согласно (3′) $K'_C(A) = S$.

По утверждению пункта 3 каждый элемент $x \in G^+$ можно представить в виде

$$x = r \cup s . \tag{8'}$$

Пусть, в частности, $x \in C^+$. Из выпуклости C^+ вытекает, что $r \in C^+$. Так как для каждого $r_1 \in R$, $s_1 \in S$, $r_1 \cap s_1 = 0$ (согласно 2d)), должно быть $r \cap s_1 = 0$ для каждого $s_1 \in S$. Значит, $r \in K_C(A)$. Из уравнения (8′) тогда следует, что l-группа C удовлетворяет условию (P).

8. Будем пользоваться понятием l-идеала в том же смысле, в каком оно введено в работе [2], гл. XIV. Множество всех l-идеалов l-группы G образует структуру. Обозначим ее через $[G]$.

Очевидно, что прямой фактор l-группы G является ее l-идеалом.

Теорема 2. *Пусть l-группа G удовлетворяет условию* (P), *пусть структура $[G]$ удовлетворяет условию убывающих цепей. Тогда G разложима в прямое произведение*

$$G \cong \prod G_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

упорядоченных групп G_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Пусть выполняются предположения теоремы. Если G — упорядоченная группа, то теорема справедлива. Если группа G не упорядочена, то по теореме 1 ее можно разложить в прямое произведение (нетривиальным способом) $G \cong A_1 \times A_2$. Согласно 7 l-группа A_1 удовлетворяет условию (P); следовательно, она либо упорядочена, либо разложима нетривиальным способом в прямое произведение $A_1 \cong A_{11} \times A_{12}$, так что $G \cong A_{11} \times A_{12} \times A_2$. Так как структура $[G]$ выполняет условие убывающих цепей, то после конечного числа аналогичных шагов мы получим разложение (9), в котором все G_i прямо неразложимы; значит, по теореме 1 все G_i представляют собой упорядоченные группы.

9. Пусть G — упорядоченная группа. Тогда $[G]$ есть цепь.

Смотри [2], стр. 226, Упр. 1 (a).

Теорема 3. (Сравни с теоремой 33, [1] или с теоремой 22, гл. XIV в [2].) *Пусть G — l-группа, удовлетворяющая условию* (P). *Пусть структура $[G]$ удовлетворяет условию возрастающих цепей. Тогда или G можно разложить в прямое произведение, или в G существует максимальный собственный l-идеал.*

Доказательство. Если группу G нельзя разложить (нетривиальным способом) в прямое произведение, то по теореме 1 G является упорядоченной, так что $[G]$ — цепь. Так как $[G]$ выполняет условие возрастающих цепей, существует $A \subset [G]$, покрытая элементом $G \in [G]$. Очевидно, что A — максимальный собственный l-идеал в G (содержащий в качестве подмножеств все l-идеалы B в G, $B \neq G$).

Замечание. В следующем отделе построим определенную подгруппу в l-группе G и обозначим ее через $B(0)$; рассуждения о ней помогут нам в некоторой степени ослабить предположения теоремы 3.

10. Для частично упорядоченной группы G дала Е. П. Шимбирева ([4], § 2) следующее определение одного подмножества в G (она называет его компонентой в G, содержащей элемент 0; для краткости обозначим это подмножество символом $K(0)$):

$K(0)$ — это множественное пересечение всех тех подгрупп G_i группы G, для которых

$$x \in G\,, \quad x > 0 \Rightarrow x \in G_i\,. \tag{10}$$

Е. П. Шимбирева одновременно доказала, что $K(0)$ является инвариантной подгруппой группы G.

Дадим аналогичное в некоторой степени определение. Пусть G — l-группа. Если элементы x, y несравнимы в G, мы пишем символически $x \parallel y$. Пусть $B(0)$ — множественное пересечение всех тех l-подгрупп G_i группы G, для которых

$$x \in G\,, \quad x \parallel 0 \Rightarrow x \in G_i \tag{11}$$

(l-подгруппой называем, в согласии с [2], такую подгруппу в G которая является выпуклой подструктурой в G). Очевидно, что $B(0)$ есть подгруппа и одновременно выпуклая подструктура в G.

Множество $B(0)$ является инвариантной подгруппой группы G.

Доказательство. Надо доказать, что для любого x $x + B(0) - x \subset \subset B(0)$. Обозначим $-x + B(0) + x = C$. Так как $B(0)$ — выпуклая подструктура в G, то и C будет выпуклой подструктурой в G. Очевидно, что C — подгруппа в G. Пусть $u \parallel 0$. Обозначим $u' = x + u - x$. Тогда $u' \parallel 0$, так что $u' \in B(0)$; следовательно, $u = -x + u' + x \in C$. Из этого следует, что C есть подгруппа типа G_i, описанная в определении множества $B(0)$. Следовательно, $B(0) \subset C$, т. е. $B(0) \subset -x + B(0) + x$, $x + B(0) - x \subset \subset B(0)$.

11. Докажем еще некоторые утверждения о множестве $B(0)$ (эти утверждения не будем применять в дальнейших рассуждениях).

11.1. *Пусть l-группа G разложима нетривиальным способом в прямое произведение. Тогда $B(0) = G$.*

Доказательство. Пусть $G \cong A \times B$, $A \neq \{0\}$, $B \neq \{0\}$. Потому что $B(0)$ — выпуклая подструктура в G и $0 \in B(0)$, достаточно доказать утверждение: если $z_1 \in G^+$, то $z_1 \in B(0)$.

Из рассматриваемого прямого разложения вытекает, что существует $z \in G^+$, $z \geqq z_1$, $z = a + b$, $a > 0$, $b > 0$. На основании свойств прямого разложения затем получим $a \cap b = 0$, следовательно (ср. [2], стр. 220, лемма 1), $z = a \cup b = b + a$. Обозначим $b - a = c$. Из предыдущего получаем

$$a \parallel b\,, \qquad 0 \parallel c\,, \qquad c \in B(0)\,,$$
$$0 \cup c = (a - a) \cup (b - a) = (a \cup b) - a = b\,, \quad b \in B(0)\,,$$
$$0 \cap c = (a - a) \cap (b - a) = 0 - a = -a\,, \quad -a \in B(0)\,, \quad a \in B(0)\,;$$

следовательно, также и $z \in B(0)$, $z_1 \in B(0)$.

11.2. Множество $B(0)$ можно описать и при помощи чисто структурных понятий. *Пусть $B'(x)$ — пересечение всех выпуклых подструктур S_i структуры G, для которых*

a) $x \in S_i$,

b) $y \in S_i$, $y \parallel z \Rightarrow z \in S_i$.

Тогда $B'(x) = B(0) + x$ (в частности, $B'(0) = B(0)$).

Доказательство. $B'(x)$ — это, очевидно, выпуклая подструктура в G, обладающая свойствами a), b). Если $y \in B'(x)$, то $B'(y) = B'(x)$.

Пусть c — фиксированный элемент из G. Так как отображение $x \to x + c$ есть структурный автоморфизм на G, множество $B'(x) + c$ будет иметь свойства, аналогичные свойствам $B'(x)$. Точнее говоря: если $u \in B'(x) + c$, то $B'(u) = B'(x) + c$.

Пусть теперь $u \in B'(0)$. Тогда $u \in B'(0) + u$, следовательно $B'(0) = B'(u) = B'(0) + u$, т. е. $B'(0)$ есть подгруппа в G. Согласно b) и (11) и на основании определения множества $B(0)$ должно быть $B(0) \subset B'(0)$. Пусть $y \in B(0)$, $y \parallel z$. Тогда $y - z \parallel 0$, значит, $y - z \in B(0)$, $z \in B(0)$. Отсюда следует, что $B'(0) \subset B(0)$, и в итоге $B'(0) = B(0)$. Согласно выше доказанному будет $B'(x) = B(0) + x$.

12. По результатам пункта 10 $B(0)$ является l-идеалом в l-группе G. Соответствующую структурно упорядоченную фактор-группу $G/B(0)$ обозначим через $\overline{G}$. Класс в $\overline{G}$, содержащий элемент $x \in G$, обозначим через $\overline{x}$. *Пусть $x + B(0) \neq y + B(0)$. Тогда x, y — сравнимые элементы.*

Доказательство. Пусть $x \parallel y$; тогда $0 \parallel -x + y$, $-x + y \in B(0)$, $x + B(0) = y + B(0)$.

Следствие. $\overline{G}$ — упорядоченная группа. (Действительно если, $\overline{x} \neq \overline{y}$ то согласно только что доказанному $x < y$ или $y < x$, следовательно, $\overline{x} < \overline{y}$ или $\overline{y} < \overline{x}$.)

Замечание. l-группы $\overline{G}$, $B(0)$ образуют согласно приведенному выше следствию, разложение l-группы G в смешанное порядковое произведение в смысле [1], § 19. Из 11.2 вытекает следующее: о том, разложима ли или нет l-группа G, которая не является упорядоченной (нетривиальным способом) в смешанное порядковое произведение, можно судить по структурным свойствам l-группы G.

13. *Пусть I — l-идеал в G, пусть существует $x \in I$, $x \bar{\in} B(0)$. Тогда $B(0) \subset I$.*

Доказательство. Пусть выполняются перечисленные условия. Тогда также $-x \bar{\in} B(0)$. По определению множества $B(0)$ каждый из элементов x, $-x$ сравним с элементом 0; пусть y — тот из элементов x, $-x$ который больше 0.

Пусть $b \in B(0)$. Согласно пункту 12, элементы b, y сравнимы. Если $y < b$, то из выпуклости множества $B(0)$ следует $y \in B(0)$; но это — противоречие. Итак, должно быть $b < y$. Аналогично докажем, что $-y < b$. Следовательно, $b \in I$, $B(0) \subset I$.

Замечание. Если I — l-идеал в $\overline{G}$, то множество всех элементов $x \in G$, для которых $\overline{x} \in I$, является, очевидно l-идеалом в G. Из этого следует: частично упорядоченное множество $[\overline{G}]$ изоморфно (относительно частичного упорядочения) подмножеству частично упорядоченного множества $[G]$. Итак, если рассматривать условия

a) структура $[G]$ выполняет условие возрастающих цепей;

b) структура $[\overline{G}]$ выполняет условие возрастащюих цепей, то ясно, что из a) вытекает b). Нетрудно построить пример l-группы G, причем условие b) выполняется, а условие a) не выполняется. Значит, условие b) действительно слабее условия a).

Рассмотрим, далее, условия

c) G выполняет условие (P), d) $B(0)$ выполняет исловие (P).

Пусть выполнено c), пусть $A \subset B(0)^+$, $A \neq \{0\}$. Тогда $K'(A) \subset B(0)$. Если $K'(A) = \{0\}$, то $K(A) = G^+$, $K(A) \supset B(0)^+$. Если $K'(A) \neq \{0\}$, то должно быть $K(A) \subset B(0)^+$. Отсюда и из c) вытекает, что $B(0)$ выполняет условие (P); следовательно, c) $\Rightarrow$ d).

Из этого рассуждения следует, что условия следующей теоремы 4 слабее условий теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть G — l-группа, пусть структура $[\overline{G}]$ выполняет условие возрастающих цепей. Пусть соответствующая l-группа $B(0)$ удовлетворяет условию* (P). *Тогда G либо разложима нетривиальным способом в прямое произведение, либо в G существует максимальный собственный l-идеал.*

Доказательство. Прежде всего отметим следующее: если G — цепь, то $B(0) = \{0\}$; следовательно (если во всем доказательстве исключим из рассуждений тривиальный случай $G = \{0\}$), $G \neq B(0)$.

Теперь будем различать два случая:

a) $B(0) = G$. Тогда, согласно выше сказанному, G не является цепью. Значит (потому что G по предположению выполняет условие (P)), можно в силу теоремы 1 разложить G нетривиальным способом в прямое произведение.

b) $B(0) \neq G$. Ввиду следствия, приведенного в 12, и ввиду 9 $[\overline{G}]$ представляет собой цепь. Потому что $[\overline{G}]$ удовлетворяет по предположению условию возрастающих цепей, существует элемент $\overline{I}_0 \subset [\overline{G}]$, покрытый элементом $\overline{G} \in [\overline{G}]$. Следовательно,

$$\overline{I} \in [\overline{G}]\,, \quad \overline{I} \neq \overline{G} \Rightarrow \overline{I} \subset \overline{I}_0\,. \qquad (12)$$

Пусть I_0 — l-идеал в G, возникший из l-идеала $\overline{I}_0$ способом, описанным в предыдущем замечании.

Пусть I — l-идеал в G, $I \neq G$. Если $I \subset B(0)$, то, очевидно, $I \subset I_0$. Если I не является подмножеством множества $B(0)$, то существует $x \in I$, $x \overline{\in} B(0)$. Тогда, согласно 13, $B(0) \subset I$. Множество $\overline{I} = I/B(0)$ будет в таком случае, очевидно, l-идеалом в $\overline{G}$, а соответствующий ему l-идеал в G (по предыдущему замечанию) равен I. Так как $\overline{I} \neq \overline{G}$, то согласно (12) $\overline{I} \subset \overline{I}_0$, следовательно, и $I \subset I_0$. Итак, I_0 — максимальный собственный l-идеал в G.

Обобщением цитированной выше теоремы Биркгофа служит

Теорема 4'. *Пусть G — l-группа, пусть структура $[G]$ имеет конечную длину. Пусть соответствующая l-группа $B(0)$ коммутативна. Тогда*

G либо разложима нетривиальным способом в прямое произведение, либо она содержит максимальный собственный l-идеал.

Доказательство. а) $B(0) = G$. В таком случае утверждение справедливо вследствие упомянутой теоремы Биркгофа.

b) $B(0) \neq G$. По предположению и по предыдущему замечанию структура $[G]$ выполняет условие возрастающих цепей. В дальнейшем доказательство проводилось бы так же, как в части b) доказательство теоремы 4.

Замечание. Если l-группа $B(0)$ выполняет условие (P), то соответствующая ей l-группа G не должна удовлетворять условию (P). (См. пример 2 в отделе 1.) Аналогично: Если $B(0)$ — коммутативная группа, то G может не быть коммутативной (см. [2], стр. 216, пр. 6).

Максимальный собственный l-идеал, о котором идет речь в теоремах 3, 4 и 4′, содержит в качестве подмножеств все собственные l-идеалы из G, так что он является единственным максимальным собственным l-идеалом в G.

14. Открытыми остаются следующие вопросы:

а) Пусть G — l-группа, удовлетворяющая условию (P). Является G полупрямым произведением упорядоченных групп?

б) Пусть I — l-идеал в l-группе G, удовлетворящей условию (P), пусть $\bar{G} = G/I$. Удовлетворяет $\bar{G}$ условию (P)?

Из положительного ответа на вопрос b) можно было бы при помощи теоремы Биркгофа о полупрямых произведениях ([2], стр. 92) вывести положительный ответ на вопрос а).

в) Можно обобщить теоремы 1—4 на случай, когда G — однокомпонентная частично упорядоченная группа (в терминологии [4] — т. е. G представляет собой частично упорядоченную группу, в которой для каждого $x \in G$ существует элемент $x' \in G$, $0 \leqq x'$, $x \leqq x'$)?

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff*: Lattice ordered groups, Annals of Math., *43* (1942), 298—331.

[2] *G. Birkhoff*: Lattice theory, revised ed, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. *XXV*, New York, 1948.

[3] *Ф. Шик:* К теории структурно упорядоченных групп, Чехосл. мат. ж. *6* (*81*), 1956, 1—25.

[4] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп, Математический сборник, *20*, 1947, 145—178.

[5] *А. И. Мальцев:* Об упорядоченных группах, Изв. акад. наук СССР, серия матем., *13*, 1949, 473—482.

[6] *P. Jaffard*: Théorie des filets dans les groupes reticulés, C. R. Acad. Sci. Paris, *230* (1950), 1024—1025.

[7] *J. Jakubík*, Konvexe Ketten in l-Gruppen. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 53—63.

Výtah

O JEDNEJ TRIEDE l-GRÚP

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Došlo 24. března 1958)

Pre l-grupy používame rovnaké označenia ako v [2]. Nech G je l-grupa. Zavedieme tieto označenia: $[G]$ je sväz všetkých l-ideálov v G. Ak $A \subset G^+$, nech $K'(A)$ je množina všetkých $x \in G^+$, splňujúcich podmienku $x \cap y = 0$ pre každé $x \in A$. Ďalej položme $K(A) = K'(K'(A))$. V práci sa vyšetrujú l-grupy, splňujúce podmienku (P): ak $A \subset G^+$, $x \in G^+$, existujú prvky $y \in K(A)$, $z \in K'(A)$ také, že $x \leqq y \cap z$.

G. Birkhoff dokázal nasledujúcu vetu o štruktúre komutatívnych l-grúp ([1], § 18, „hlavná veta o štruktúre", veta 33):

(B) *Nech G je komutatívna l-grupa, nech sväz $[G]$ je konečnej dĺžky. Potom alebo sa G dá rozložiť na priamy súčin alebo v G existuje jediný maximálny vlastný l-ideál.*

Komutatívna l-grupa nemusí splňovať podmienku (P) a l-grupa splňujúca podmienku (P) nemusí byť komutatívna. l-grupy splňujúce podmienku (P) majú ale niektoré vlastnosti analogické s komutatívnymi l-grupami.

Vo vetách 1 až 3 predpokladáme, že G splňuje podmienku (P).

Věta 1. *G je alebo usporiadaná grupa alebo sa G dá rozložiť na priamy súčin.*

Veta 2. *Nech sväz $[G]$ splňuje podmienku klesajúcich reťazcov. Potom je G priamym súčinom konečného počtu usporiadaných grúp.*

Veta 3. *Nech sväz $[G]$ splňuje podmienku rastúcich reťazcov. Potom alebo sa G dá rozložiť na priamy súčin alebo v G existuje jediný maximálny vlastný l-ideál.*

Označme symbolom $B(0)$ množinový prenik všetkých takých l-podgrúp $G_i \subset G$, pre ktoré platí $x \in G$, $x \parallel 0 \Rightarrow x \in G_i$ (znakom $x \parallel y$ vyjadrujeme, že prvky x, y sú nezrovnateľné). $B(0)$ je l-ideál v G. Faktorovú l-grupu $G/B(0)$ označme $\overline{G}$.

Veta 4. *Nech l-grupa $B(0)$ splňuje podmienku (P), nech sväz $[\overline{G}]$ splňuje podmienku rastúcich reťazcov. Potom alebo sa G dá rozložiť na priamy súčin alebo v G existuje jediný maximálny vlastný l-ideál.*

Zovšeobecnením vety (B) je:

Veta 4'. *Nech je $B(0)$ komutatívna l-grupa, nech sväz $[\overline{G}]$ je konečnej dĺžky. Potom alebo sa G dá rozložiť na priamy súčin alebo G obsahuje jediný maximálny vlastný l-ideál.*

Summary

ON A CLASS OF l-GROUPS

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Received March 24, 1958)

Let G be an l-group (see [2]). We denote by $[G]$ the lattice of all l-ideals of G. If $A \subset G^+$, we put $K'(A) = E\ (x\colon x \cap y = 0$ for each $x \in A)$, $K(A) = K'(K'(A))$. We consider l-groups satisfying the following condition:

(P) If $A \subset G^+$, $x \in G^+$, there exist elements $y \in K(A)$, $z \in K'(A)$ such that $x \leqq y \cup z$.

G. Birkhoff proved the theorem ([1], § 18, "main structure theorem", theorem 33):

(B) *Let G be a commutative l-group, whose lattice $[G]$ has finite length. Then either G is a direct product or G contains a unique maximal proper l-ideal.*

Commutative l-groups need not satisfy the condition (P) and l-groups with property (P) need not be commutative. Nevertheless, the structure of l-groups with the property (P) is analoguous to the structure of commutative l-groups.

In theorems 1—3 we suppose that G has the property (P).

Theorem 1. *Either G is an ordered (= linearly ordered) group or G is a direct product.*

Theorem 2. *If $[G]$ satisfies the descending chain condition, then G is a direct product of a finite number of ordered groups.*

Theorem 3. *If $[G]$ satisfies the ascending chain condition, then either G is a direct product or G contains a unique maximal proper l-ideal.*

We will denote by $B(0)$ the intersection of all l-subgroups $G_i \subset G$ such that $x \in G$, $x \parallel 0 \Rightarrow x \in G_i$. (The symbol $x \parallel y$ means that the elements x, y are incomparable.) It is proved that $B(0)$ si an l-ideal in G; set $G/B(0) = \overline{G}$.

A generalization of the theorem 3 is:

Theorem 4. *If $B(0)$ satisfied the condition* (P) *and if $[\overline{G}]$ satisfies the ascending chain condition, then either G is a direct product or G contains a unique maximal proper l-ideal.*

A generalization of the theorem (B) is

Theorem 4'. *If the l-group $B(0)$ is commutative and if the lattice $[\overline{G}]$ has finite length, then either G is a direct product or G contains a unique maximal proper l-ideal.*