Časopis pro pěstování matematiky

Václav Havel
Užití Kadeřávkovy věty v teorii přímkových kvadrik

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 205--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108534

UŽITÍ KADEŘÁVKOVY VĚTY V TEORII PŘÍMKOVÝCH KVADRIK

(Referát V. HAVLA o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 10. listopadu 1958 v Brně)

Jako obsah klasické Dandelinovy věty bývá uváděno, že kuželosečka, jež je rovinným průnikem rotační kuželové plochy, má ohnisko v dotykovém bodě Dandelinovy kulové plochy. Jak uvádí L. HOFMANN,[1]) je přitom podstatné toto tvrzení:

Dotýkají-li se v projektivním prostoru plochy Φ, Ψ podél křivky k a je-li ϱ některá rovina, pak průniky $\Phi \cap \varrho$, $\Psi \cap \varrho$ jsou v obecném případě křivky, dotýkající se v průsečících $k \cap \varrho$.

Při eukleidovské i neeukleidovské metrice odvodil pak Hofmann vhodnou specialisací ploch Φ, Ψ jednak klasickou Dandelinovu větu, jednak její analogie pro neeukleidovské prostory.

Za obsah klasické Dandelinovy věty lze však pokládat též tvrzení, že rovinným průnikem rotační kuželové plochy je křivka speciálního metrického vytvoření (křivka, jejíž body mají konstantní poměr vzdáleností od ohniska a přímky řídicí). V tomto smyslu pojatá Dandelinova věta byla v referátě zobecněna ve dvou směrech: Jednak zobecněním metrického vytvoření průnikové křivky a za druhé přejitím od rotační kuželové plochy k rotační kvadrice. Takovýmto zobecněním zabývali se již J. KOUNOVSKÝ[2]) a F. KADEŘÁVEK,[3]) avšak nedospěli k závěrečným výsledkům.

V reálné, resp. komplexní rovině definujme „vzdálenost" bodu od kružnice jako číslo $\sqrt{c^2 - r^2}$, kde c je vzdálenost daného bodu od středu kružnice a r je (kladný, nulový anebo ryze imaginární) poloměr.

Je-li dána reálná přímka p, kružnice k o středu S a poloměru r a kladné či ryze imaginární číslo ε, pak definujme f-křivku[4]) jako množinu bodů, pro něž „vzdálenost" od k je rovna součinu vzdálenosti od p s konstantou ε. Dále označme o přímku, jdoucí bodem S kolmo k p a δ vzdálenost bodu S od přímky p.

Věta 1. *f-křivka a křivka 2. stupně jsou identické pojmy.*[5]) Kružnice k je pro f-křivku bitangenciální a přímka p spojuje příslušné body dotyku.

Nechť jsou dány kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ a číslo $\varkappa$, které je kladné anebo ryze imaginární. Za F-křivku[6]) prohlásíme množinu bodů, pro něž absolutní hodnota součtu nebo rozdílu vzdáleností od ${}^1k$, ${}^2k$ rovná se číslu $\varkappa$. Předpokládejme ještě dále, že středy obou kružnic mají vzdálenost $\mu > 0$; spojnici středů označíme o.

Věta 2. *F-křivka a křivka 2. stupně jsou identické pojmy.*[5]) Kružnice ${}^1k$, ${}^2k$ jsou bitangenciálními kružnicemi příslušné F-křivky.

Důkaz věty 1—2 provedl jsem elementárními prostředky analytické geometrie. Nezávisle na tom dokázal jsem prostředky syntetické geometrie prostorové další větu:

Věta 3. *Rovinný průnik rotační přímkové plochy Φ je f-křivka (a sice reálná, s kladnou hodnotou pro konstantu ε), resp. F-křivka (a to opět reálná, s kladnou hodnotou pro $\varkappa$).*[7]) Bitangenciální kružnice pro průnikovou křivku leží na libovolných dvou různých kulových plochách, vepsaných do Φ.

Prof. F. KADEŘÁVEK objevil tu část věty 3, která se týká případu, kdy plocha Φ je kuželová,[8]) a vyslovil domněnku, že věta platí obecněji; budu tedy větu 3 nazývat *Kadeřávkovou větou*. Za důležité pokládám, že kolmý průmět osy rotace do roviny řezu může být pro průnikovou hyperbolu též vedlejší osou. Takový případ se totiž v případě, kdy Φ je kuželová plocha, nemůže vyskytnout.

Věta 4. *Neplatí-li současně $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$, potom f-křivka protíná reálně osu o právě tehdy, když $r^2 : \varepsilon^2 \geqq r^2 - \delta^2$.*

Důsledek. Nechť α je ostrý úhel, pro nějž platí $\cos \alpha = \delta : r$ a nechť $\varepsilon_0 = (r - \delta) : \left(r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$. Pak právě pro $r > \delta$, $1 : \varepsilon < \varepsilon_0$ je f-křivka hyperbolou s vedlejší osou o.

Nahradíme-li v definici f-křivky, resp. F-křivky kružnice k, ${}^1k$, ${}^2k$ kulovými plochami Φ, ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ a přímku p rovinou ϱ reálného resp. komplexního prostoru, dospíváme k definici f-plochy, resp. F-plochy. Platí pak tyto dvě věty:

Věta 5. *Pojmy f-plocha, F-plocha a rotační kvadrika jsou identické.*[9] *Kulové plochy Φ, ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ jsou dané ploše vepsány a ϱ je rovinou dotykové kružnice.*

Věta 6. *Rovinným průnikem rotační kvadriky je f-křivka, resp. F-křivka.* Určující údaje pro tuto f-křivku, resp. F-křivku vyplývají z určujících údajů pro danou rotační kvadriku jakožto f-plochu, resp. F-plochu.

Věta 6 je naším nejzazším zobecněním klasické Dandelinovy věty ve smyslu podaném v úvodu referátu.

Jednoduché kvadriky pouze s eliptickými body lze odvodit užitím dvou perspektivních kolineací z plochy kulové a touto elementární cestou lze vybudovat geometrii kvadrik pouze s eliptickými body. Při budování geometrie přímkových kvadrik lze vyjít od rotačního přímkového hyperboloidu a od něho přejít perspektivní kolineací k nerotačnímu přímkovému hyperboloidu a k hyperbolickému paraboloidu. Vtipně užívá tohoto postupu F. Hohenberg,[10] avšak užívá pojmu algebraická plocha. Věta 3 dovoluje však obejít pojem algebraické plochy při důkazu, že rovinné průniky plochy jsou kuželosečky.

Poznámky. [1]) Monatshefte f. Math. *62* (1958), 1—15. [2]) Čas. pro pěst. mat. *44* (1915), 257—268. [3]) Čas. pro pěst. mat. *46* (1917), 65—71. [4]) Písmenem f zdůrazňujeme, že jde o zobecnění fokálních vlastností. [5]) Vyjímáme přitom kružnice. [6]) Písmenem F opět zdůrazňujeme zobecnění fokálních vlastností. [7]) Vyjímáme průnik kuželové plochy vrcholovou nesečnou rovinou a rovinou kolmou k ose rotace. [8]) Viz práci, citovanou v třetí poznámce. [9]) Vyjímáme plochu kulovou. [10]) F. Hohenberg, Konstruktive Geometrie für Techniker, Wien 1956, str. 141—142.

Václav Havel, Brno

SUR L'EXISTENCE DES PETITES OSCILLATIONS RELATIVES D'UN SYSTÈME DE PENDULES INVARIABLEMENT RELIÉ À UNE SPHÈRE EN ROTATION UNIFORME

(Conférence de M. S. Manolov (Sofia, Bulgarie) faite le 4 novembre 1958 à l'Ecole Polytechnique de Prague)

Dans le travail [1] nous avons considéré le problème des petites oscillations d'un système de pendules dans le cas où le plan de leur mouvement effectue un mouvement d'entraînement supplémentaire qui est une rotation uniforme autour d'un axe. Nous avons supposé nul l'angle α entre le plan des oscillations relatives et l'axe de rotation.

Ici nous donnerons un résultat dans le cas de deux pendules quand l'angle α est arbitraire. Plus exactement le nouveau problème peut se formuler de la façon suivante:

Une sphère tourne autour d'un axe fixe l avec une vitesse angulaire ω constante (fig. 1). Soit Q un point fixe sur la sphère. Soit G le centre de la sphère. Par suite de la rotation de la droite GQ autour de l'axe l l'angle α ne change pas. Au point A_1 sur GQ en dehors de la sphère est suspendu le pendule A_1A_2 qui représente une tige matérielle homogène de masse m et de longueur $2a$. Au point A_2 est suspendu un second pendule A_2A_3 de al