O IDEALISMU V MATEMATICE

A. D. ALEKSANDROV, dopisující člen všesvazové Akademie věd.

(Ruský originál vyšel v časopise Priroda, vydávaném všesvazovou Akademií věd, v roč. 40, 1951, seš. 7, str. 3—11 a seš. 8, str. 3—9.)

I. O kořenech idealismu v matematice.

V. I. Lenin ve své poznámce „K otázce o dialektice", odhaluje gnoseologické kořeny idealismu, napsal:

„Filosofický idealismus je *jen* nesmyslem s hlediska materialismu hrubého, prostého, metafysického. Naopak s hlediska *dialektického* materialismu je filosofický idealismus *jednostranné*, přehnané, überschwengliches (Dietzgen) rozvíjení (nafukování, nabubřování) jednoho rysu, stránky, ploškypoznání v absolutno, *odtržené* od hmoty, od přírody a zbožněné. Idealismus je kněžourství. Správně. Ale filosofický idealismus je („*správněji*" a „*kromě toho*") *cesta* ke kněžourství *přes* jeden z odstínů nekonečně složitého lidského *poznání* (dialektického)".*)

V tomto úryvku je obsažen naprosto obecný a jasný poukaz na to, kde hledat gnoseologické kořeny idealismu v každém jednotlivém případě a jak překonávat idealismus. Je nutné najít ten rys, tu stránku, tu plošku poznání, která je v idealismu jednostranně předimensována, odtržena od hmoty, a udat pro tuto stránku poznání pravdivé objasnění, ukázat její pravý význam, její pravé místo v obecné souvislosti, v obecném pohybu poznání.

Právě tímto způsobem V. I. Lenin ve své knize „Materialismus a empiriokriticismus" položil a rozřešil otázku o „fysikálním" idealismu. Tam on poukázal na ty stránky ve vývoji přírodních věd, které se staly živnou půdou idealismu, a tím, že objasnil skutečný význam těchto stránek přírodních věd, plně odhalil celou falešnost a neodůvodněnost idealismu, úplně rozdrtil idealismus, proti němuž postavil dialektickomaterialistické chápání vědy. Lenin ukázal, že vývoj vědy sám sebou nemůže vésti k idealismu.

Idealismus ve vědě vzniká pod tlakem podmínek kapitalistické společnosti, když idealistické úchylky a omyly se neopravují, nýbrž naopak

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 330. Česky v tomto sešitě, str. 233 a 234.

se posilují a utvrzují třídními zájmy buržoasie. Musíme se snažit užít Leninových pokynů k tomu, abychom odkryli kořeny idealismu v matematice a na základě Leninových idejí překonali „matematický" idealismus.

Tato úloha je dosti veliká, ježto idealismus v matematice má různé formy, přijímá časem jemné odstíny a jen trochu úplné jejich zkoumání daleko přesahuje rámec tohoto článku. Tato úloha už byla položena a řešena sovětskými učenci pro různé formy „matematického" idealismu. V tomto článku se omezíme na několik poznámek, které ovšem budou vyžadovati dalšího zpřesnění a rozvinutí.

Matematika, jak ukázal Engels, studuje formy skutečnosti odpoutané od konkretního obsahu, takže samotnou svou podstatou jest abstraktní vědou. Matematické pojmy a úsudky odrážejí skutečnost v abstraktní formě. Jejich přesvědčivost a nepochybnost pramení z toho, že jak methody logického usuzování tak i primitivní matematické pojmy byly vybudovány na podkladě tisícileté praxe a právě touto cestou byly vštípeny do lidského vědomí. „Praxe člověka, tisíce milionkrát opakovaná, utvrzuje se v poznání člověka figurami logiky. Tyto figury mají trvalost předsudku, axiomatický charakter právě (a pouze) v důsledku tohoto tisíce milionnásobného opakování."*) Tyto pokyny V. I. Lenina se vztahují ovšem i na primitivní matematické pojmy a vůbec na všechny formy poznání, které se nám jeví nutnými, zřejmými, nepochybnými. Když se zakořenily v lidském poznání, přecházejí z pokolení na pokolení, vyvíjejíce se dále ve spojení s vývojem všeho poznání na podkladě praxe, t. j. na podkladě materiálního vzájemného působení lidí s přírodou a se společenským prostředím v jeho celosti. Ale v mezích ryzí matematiky, jak se vytvořila a jak se vyvíjí na uvedeném podkladě, operujeme už se samotnými abstraktními pojmy, věty dokazujeme usuzováním, které vychází z pojmů a neobrací se ke zkušenosti. Tedy matematika jako taková se nalézá na abstraktním stupni poznání; její spojení s praxí se jeví nepřímým a jest realisováno prostřednictvím aplikované matematiky, jiných věd a techniky. Avšak, jak ukázal Lenin, možnost idealismu jest dána už v první elementární abstrakci.**) Proto idealismus vzniká na půdě matematiky zvláště snadno, a jeho překonání je možné pouze na podkladě chápání nerozlučné, nevyhnutelné spojitosti matematiky s praxí (při čemž praxi zde musíme chápati ne jako snůšku j e d n o t l i v ý c h aplikací matematiky, nýbrž jako vzájemné působení lidské společnosti a přírody v jeho celosti).

Možnost vzniku idealismu v matematice, jejíž příčinu odhaluje pokyn V. I. Lenina, vedla na př. k tomu, že už v minulém století, když ve fysice vládl živelně-materialistický světový názor, byli znamenití matematikové, kteří nejenom pojímali svou vědu idealisticky, nýbrž přímo ji

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 188.

**) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 308.

spojovali s bohem. Postačí vzpomenout Cantora, který při odůvodňování jím budované theorie množin přímo se obracel k bohu.

Jako příklad jednostranného, upřílišněného rozvíjení těch stránek poznání, které se zvláště silně projevují v matematice, může posloužit racionalismus a kantovství. Racionalistická představa o tom, že pouze rozum, jako protiklad smyslové zkušenosti, je zdrojem skutečného poznání, nepochybně měla své východisko ve vnitřní přesvědčivosti matematických úsudků, které se vedou ryze spekulativně a jeví se naprosto nespornými, dokonce nespornějšími nežli závěry založené na zkušenosti. Avšak taková představa je nesprávná, neboť, jak ukázal Lenin ve výše uvedené pasáži, přesvědčivost matematických úsudků má svůj podklad ve zkušenosti, ne však prostě v partikulární zkušenosti jednotlivé osoby, nýbrž v tisícileté praxi pokolení. Nepochopení tohoto je také v samém základu Kantovy filosofie. Kant přímo klade otázku: jak je možná ryzí matematika? Nevidí však empirický zdroj ryzí matematiky, nýbrž vidí pouze její vnitřní přesvědčivost a proto ji považuje za apriorní, t. j. na zkušenosti nezávislé, poznání „z čistého rozumu". Nachází její odůvodnění ve vnitřním „čistém vnímání" matematických objektů. Geometrické obrazce si představujeme v prostoru, a počítání provádíme v čase. Tyto formy názorných představ odrážejí skutečnost. Avšak pro Kanta prostor a čas jsou pouze formy intuitivního vnímání. Kant je považuje za apriorní, za součást poznání nezávislou na zkušenosti. Tak prostor a čas se z forem existence hmoty přeměňují u něho na apriorní formy vnímání a věci, jak jsou ve skutečnosti, podle Kanta nejsou v čase a prostoru. Avšak my chápeme všecky jevy v prostoru a čase a tudíž, tak soudí Kant, nechápeme věci tak, jak existují „samy o sobě". Věci „o sobě" jsou nepoznatelné. Takto, vycházeje od falešného chápání nejjednodušších matematických vývodů a ovlivněn předcházejícími idealistickými soustavami, Kant dochází ke své idealistické filosofii, k názoru, že formy poznání neodrážejí formy skutečnosti, že řád do jevů je vnášen vědomím, že skutečná podstata věcí je oddělena od pozorovaných jevů a je nepoznatelná.

Příklad Kanta ukazuje, jak hluboce a přesně vymezil V. I. Lenin kořeny idealismu. Kantovská filosofie je právě jednostranné přehnané rozvíjení jednoho rysu poznání — vnitřní názorné jasnosti a přesvědčivosti matematických úsudků — v absolutno odtržené od hmoty.

V. I. Lenin, pokračuje ve vymezení gnoseologických kořenů idealismu v poznámce „K otázce o dialektice", napsal: „Lidské poznání není (resp. nejde) přímou čarou, nýbrž křivkou, jež se nekonečně přibližuje řadě kruhů, spirále. Libovolný úryvek, zlomek, kousek této křivky může býti přeměněn (jednostranně přeměněn) v samostatnou, celou, přímou čáru, jež (nevidíme-li pro stromy lesa) vede do bažiny, ke kněžourství (kde ji *zakotvuje* třídní zájem vládnoucích tříd). Přímočarost a jednostrannost, ztrnulost a zkostnatělost, subjektivismus a subjektivní slepota voilà (= to jsou) gnoseologické kořeny idealismu. A kněžourství (= filosofický idealismus) ovšem má své *gnoseologické* kořeny, není bez půdy; jest nesporně *hluchým květem*, ale hluchým květem, rostoucím na živém stromě živoucího, plodného, pravdivého, mohutného, všemocného, objektivního, absolutního, lidského poznání".*)

Právě jedině subjektivismus a subjektivní slepota může vést k nepostřehnutí vývoje abstraktní matematiky z praxe. Ale jakmile se dopustíme této chyby, už ten kousek složité čáry poznání, kterým jsou matematické úsudky, se přemění v samostatnou přímou čáru, která vede k idealismu a pak i ke kněžourství, kde ji zakotví třídní zájem vládnoucích tříd. Tak se také stalo s kantovstvím. Tu jest míti na zřeteli nejen to, že sám Kant smiřoval vědu s náboženstvím, nýbrž ještě ve vyšším stupni to, že nyní, když věda úplně dokázala celou neudržitelnost premis a závěrů kantovství, stále je široce rozšířeno mezi buržoasními učenci. A ježto kantovství nyní je úplně vyvráceno, dá se jeho rozšíření vysvětlit už jen tlakem třídních zájmů buržoasie, který žene některé učence ještě dále, k pokusům smiřovat vědu s náboženstvím, k mystice, ke tmářství nejdivočejšího rázu.

Současní buržoasní učenci a filosofové v převážné většině, stejně jako Kant, nechápou a nechtějí vidět vývoj matematiky na podkladě praxe, a vidí matematiku pouze v okruhu čistého myšlení. Nechápou Marxovu thesi, že „praxí musí člověk dokazovat pravdivost svých myšlenek". Nechápou základní Leninovu thesi o cestě poznání: „Od živého vnímání k abstraktnímu myšlení *a od něho k praxi*, taková je dialektická cesta poznání *pravdy*, poznání objektivní skutečnosti."**)

„Živé vnímání" berou mimo materiální praktickou činnost, chápou je jako počitky v duchu Machově, nebo jako kantovské „čisté vnímání" nebo jako intuici a pod. Abstraktní myšlení uvažují v odtržení od praxe, neobracejí je k praxi, nýbrž zůstávají trčet v abstrakci, která se takto odtrhuje od hmoty a mění se buďto ve zbožněné absolutno, nebo ve „výtvor našeho ducha" nebo v „apriorní formy myšlení".

Nedávno zesnulý prvotřídní německý matematik Hilbert uvedl jako motto svého vynikajícího spisu „Základy geometrie" následující Kantova slova: „Tak veškeré lidské poznání počíná představami, přechází k pojmům a končí ideami". Je vhodné porovnat tuto pasáž s právě citovanou pasáží Leninovou, neboť rázem se vyjasní celý idealismus Hilbertův i jiných buržoasních matematiků. Pro ně poznání vůbec nevybočuje z rámce „čistého" myšlení, počíná myšlením a jím končí. Podle Lenina však poznání vychází od „živého vnímání" objektu a přes abstrakci se vrací od objektu k praxi. Podle Lenina ideje jsou pouze stupněm a ne koncem poznání, neboť ideje se vyvíjejí a prověřují na základě praxe.

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 330. Česky v tomto sešitě, str. 234.

**) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 146.

Tato základní these marxistické theorie poznání je naprosto nedostupná omezenému myšlení buržoasních učenců, a proto celá jejich filosofie matematiky se jeví idealistickou, jeví se zmatenou a bezmocnou k řešení kardinálních otázek vědy.

Právě tak buržoasní učenci nechápou dialektický charakter poznání, nevidí jeho souvislosti, jeho vývoj, jeho protiklady a kvalitativní přechody. Proto celá jejich filosofie matematiky se jeví také metafysickou. Slovem, veškerá buržoasní filosofie matematiky v přítomné době se jeví jednostranným, přehnaným rozvíjením (nafukováním, nabubřováním) abstraktní usuzovací stránky matematiky v absolutno, odtržené od hmoty. Formy, ve kterých probíhá toho odtrhování matematiky od hmoty, jsou různotvárné, ale podstata všech je stále táž. Přesvědčíme se o tom tak, že blíže rozebereme některé odrůdy „matematického" idealismu.

2. Množinový idealismus.

Především je třeba zaznamenat směr pocházející od zakladatele theorie nekonečných množin Cantora, který můžeme poněkud konvencionálně nazvat „množinovým idealismem". Jestliže nepřihlížíme ke krajnosti, jíž je to, že Cantor se obrací k pánu bohu, můžeme podstatu tohoto směru formulovati takto. Abstraktní matematické pojmy a především právě nekonečné množiny (jako množina všech čísel, množina všech funkcí a pod.) chápou se jako nějaké samostatné entity, jež jsou předmětem ideálního poznání. To je matematický platonismus, neboť Platon právě připisoval samostatnou existenci ideám. Právě k tomuto idealismu se vztahují slova V. I. Lenina: „Původní idealismus: obecné (pojem, idea) má *své samostatné bytí*... Stoly, židle a *ideje* stolu a židle...*) Stejně i ve množinovém idealismu abstraktní množina, abstraktní kontinuum se uvažuje jako „jakási jednotlivá realita", úplně určená naším ponětím o ní, vyjádřeném na př. pomocí axiomů, při čemž k poznání této reality se požaduje pouze získání „nových logických prostředků".**)

Cantor vyzvedl princip, že „podstata matematiky je v její svobodě", jímž vyjádřil svou směrnici, že každý svobodný matematický výtvor rozumu má objektivní ideální existenci. Tento princip je neobyčejně pohodlný, neboť netísní matematickou tvořivost a předem ospravedlňuje libovolné abstraktní konstrukce. Proto množinový idealismus se svým jednostranným rozvíjením libovolné matematické abstrakce v absolutno, odtržené od hmoty, je značně rozšířeným

---

*) *V. I. Lenin,* Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 307.

**) Slovo kontinuum zde znamená množinu všech reálných čísel nebo množinu všech bodů na přímce. Výraz „jakási jednotlivá realita" je námi převzat z následující pasáže akad. *N. N. Luzina,* „Mohutnost kontinua, jestliže si je představujeme jako bodovou množinu, je jakási jednotlivá realita (v orig. единая некая реальность) a musí se vyskytovat ve škále alefů na příslušném jí místě..." (*N. N. Luzin,* Současný stav theorie funkcí reálné proměnné, rusky, Gostechizdat, 1933, str. 30.)

Jak snadno i ti matematikové, kteří stojí na stanovisku materialismu, absolutisují svoje abstrakce, ukazuje následující místo z hesla „Matematika" ve Velké Sovětské Encyklopedii, sv. 38, 1936, str. 390—391. Autor tohoto hesla A. N. Kolmogorov píše: „Na příklad struktura přirozené řady číselné je úplně vymezena dávno už formulovanou soustavou axiomů. Proto v čisté theorii čísel běží o přísně vymezenou a uzavřenou matematickou theorii, jejíž obsah je potenciálně úplně určen axiomy přirozených čísel." A v dalším se táž myšlenka opakuje v naprosto obecném tvaru: „strukturu soustavy objektů je možné úplně vymezit (pomocí „úplné" soustavy axiomů); ovšem zkoumání této soustavy může ještě vyžadovat neomezeného tvoření nových algoritmů, které principiálně nemůže býti zakončeno." Při tom algoritmem se rozumí ta či jiná methoda matematického usuzování nebo dokazování, a objekty se míní abstraktní objekty, t. j. čísla, matematické body a přímky, množiny čísel a pod.

Jde tudíž o to, že soustava abstraktních objektů jest úplně vymezena axiomy a že její zkoumání tvoří přísně uzavřenou theorii, jejíž rozvinutí vyžaduje pouze vypracování nových a nových method matematických důkazů a vývodů. Jestliže však soustava abstraktních objektů jest úplně vymezena axiomy, potom už automaticky se mění v něco naprosto samostatného. Přísně uzavřená theorie se podle toho může rozvíjet pouhým logickým usuzováním. Ona podle toho úplně přejde ve svět pojmů a dostává ideální existenci. Axiomy převzaté ze zkušenosti, z „živého vnímání", přejdou v abstrakci a v ní utkví, a přechod k praxi podle toho je pro theorii nepotřebný; je domněle potřebný pouze k cílům praxe samé. Praxe se takto z kriteria pravdy mění v konsumenta těžícího z almužen theorie.

Matematické bádání ve své bezprostřední tvářnosti vyhlíží tak, že matematik vyjde od axiomů, od samotných matematických pojmů, o nich usuzuje a dochází ke stále novým výsledkům. Při povrchním rozboru se zdá, jakoby skutečně vývoj theorie byl úplně vymezen axiomy. Ale ve skutečnosti se věci mají nadmíru složitěji. Tak nejdůležitějších úspěchů theorie čísel, spjatých zvláště se jmény jako G. F. Voronoj, I. M. Vinogradov a se jmény jiných našich učenců, bylo dosaženo využitím method geometrie a analysy. Právě přestoupení hranic „čisté" theorie čísel zabezpečilo její nejhlubší úspěchy. Podobně i geometrie v rozsáhlé míře využívá method analysy a theorie množin nejen při důkazech, nýbrž také při tvoření nových pojmů.

Spojení geometrie s celou matematikou prolíná celé její dějiny. Už v Eukleidových „Základech" aritmetika a počátky algebry jsou zkoumány geometricky. Vytvořením analytické geometrie Descartes spjal geometrii s algebrou. Později geometrie se sjednocuje s analysou a na př. první kurs matematické analysy, sepsaný r. 1695 L'Hospitalem, se jmenuje „Analysa nekonečně malých pro zkoumání křivých čar." Veškerý vývoj geometrie a analysy, počínajíc znázorněním funkcí křivkami a křivek funkcemi, šel a jde v těsném vzájemném ovlivňování těchto dvou disciplin.

Počátkem tohoto století byly vybudovány přísně axiomatické základy eukleidovské geometrie, a její obsah jakožto abstraktní theorie byl s dostatečnou přesností axiomaticky vymezen. Ale tím se eukleidovská geometrie nestala dokonale uzavřenou theorií. Její vybudování z axiomů nic nemění na tom, že stále je třeba bráti na pomoc tytéž methody a pojmy algebry, analysy a theorie množin. Vede ke tvoření nových abstrakcí, o kterých přesně mluveno nelze tvrdit, že by byly obsaženy ve výchozích axiomech. Jestliže přes to máme trvat na tom, že axiomy vymezují aritmetiku a geometrii v celém jejich možném rozvoji, potom je nevyhnutelný závěr, že v aritmetice nebo geometrii jest zahrnuta celá matematika vůbec. Vskutku tvořením nových a nových abstrakcí můžeme, vycházejíce od celých čísel, „sestrojit" takřka každý matematický pojem. Tak pomocí celých čísel lze definovat zlomky, dále lze definovat libovolná reálná čísla*) a považujeme-li dvojice reálných čísel za „body", můžeme definovat rovinu atd. To není nic jiného nežli abstraktní odraz v matematice všeobecné souvislosti celé přírody. Právě vzhledem k této všeobecné souvislosti nemohou v matematice existovat úplně uzavřené theorie; matematika se nerozpadá na takové theorie, nýbrž tvoří souvislý celek, ale rozvíjí se neustále v souvislosti s celou přírodovědou a praxí a nedá se převést na jakoukoli soustavu axiomů.

Tyto úvahy nikterak neznamenají, že by bylo vůbec nemožné oddělit z matematiky aritmetiku nebo libovolnou jinou theorii. Znamenají však, že se to nedá provést absolutně přesně, tak jako je nemožné absolutně přesně oddělit od celkové souvislosti jakýkoli jev vůbec. Rozvoj theorie vždy vede ke tvoření nových pojmů, nových abstrakcí, které, přesně řečeno, nejsou zahrnuty už v původních axiomech. Methody usuzování se mění, mění se samotný pojem přesného důkazu, a závěr, který dříve se jevil exaktním, jest atakován, vyžaduje zpřesnění. Mění se samotné chápání těch či jiných axiomů atd. Četnými a složitými souvislostmi theorie se spojuje s jinými theoriemi, s přírodovědou, se zkušeností a praxí. Vně tohoto vzájemného působení není vývoje matematiky. Jednotlivé etapy tohoto vývoje, jednotlivé kapitoly té či jiné theorie, jestliže jsou už vybudovány, dají se vyjádřit jako důsledky z axiomů. Avšak theorie ve svém vývoji přesahuje takový rámec a je dirigována konec konců, byť i velmi složitými cestami, praxí, a úplné odervání od praxe mění theorii ve „svobodný", ale za to prázdný „výtvor rozumu".

V důsledku obecné vzájemné souvislosti jevů, v důsledku nevyčerpatelnosti libovolného elementu hmotné skutečnosti žádná obsažná theo-

*) Reálné číslo můžeme definovat na př. jako „řez" ve množině racionálních čísel. Každé reálné číslo x totiž rozkládá racionální čísla na dvě třídy: na čísla menší než x a na čísla větší než x. Takový řez se bere za definici reálného čísla x.

rie nemůže býti úplně uzavřenou a žádná soustava objektů nemůže býti úplně vymezena axiomy. Jestliže však soustava abstrakcí se podává jako úplně uzavřená, otvírá se možnost odtrhnout ji od hmoty, neboť k čemu je potřebná hmota, jestliže abstrakce jsou úplně vymezeny dávno formulovanými axiomy? J. V. Stalin praví, že „libovolný jev v libovolné oblasti přírody se může přeměnit v pošetilost, uvažujeme-li jej vně jeho spojení s okolními podmínkami... v odtržení od nich..."*) Tím spíše libovolná matematická abstrakce se změní v pošetilost, jestliže ji uvažujeme odtrženou od jiných abstrakcí, od praxe, od hmoty, a naproti tomu abstrakce může být pochopena a zdůvodněna ve spojení s jinými abstrakcemi, ve spojení s praxí, ve spojení s konkretní hmotnou skutečností. Při tom nepostačí uznávat původ abstraktních pojmů v odrazu hmotné skutečnosti, nýbrž je nutné i v dalším je neodtrhovat od skutečnosti, nýbrž prověřovat správnost jejich logického rozvoje, dokazovat jejich adekvátnost i při nových podmínkách, na vyšších stupních rozvoje vědy.

V. I. Lenin napsal: „Člověk nemůže shrnout = odrazit = vyjádřit přírodu *celou*, úplně, postihnout její „bezprostřední celost", nýbrž může jen *věčně* se tomu blížit tím, že vytváří abstrakce, pojmy, zákony, vědecký obraz světa atd. a pod.**) A na jiném místě: „Nemůžeme si představit, vyjádřit, vyměřit, popsat pohyby leč tak, že přetrhneme nepřetržité, zjednodušíme, zhrubíme, rozdělíme, zmrtvíme živé. Popis pohybu myšlenkou je vždy zhrubením, zmrtvením — a nejen myšlenkou, nýbrž i počitkem, a nejen pohybu, nýbrž i *každého* pojmu. A v tom je *podstata* dialektiky."***) Matematické abstrakce rovněž zhrubují živou skutečnost, nicméně však odrážejí skutečnost a odrážejí ji hlouběji a věrněji než povrchní představy; vyvíjejí se a zdokonalují se v nerozlučném spojení s praxí. Ale jen přehlédneme jeden z těchto momentů, a už otvíráme cestu k idealismu. Metafysický názor, že matematické abstrakce představují něco dovršeného, vede k jejich odklonu od praxe, od hmoty a je zdrojem množinového idealismu. Na půdě takové představy vzniká nekritické nazírání na základy matematiky, vzniká takové hledisko, jako by theorie nekonečných množin úplně vymezila své abstraktní pojmy a byla schopna, nevyžadujíc žádných principiálních změn, stát se základem libovolné přítomné i budoucí matematické theorie. Takové stanovisko připomíná metafysickou posici fysiků minulého století, kteří se domnívali, že Newtonova mechanika už dala soustavu světa a že zbývá pouze převésti všecky přírodní vědy na přemisťování a silové vzájemné působení částic etheru. Podobná mínění se dříve či později stanou brzdou rozvoje vědy.

Složitost poměru matematických abstrakcí ke hmotné skutečnosti, nemožnost je dokonale uzavřít do axiomatických definic je zvláště jasně patrna na příkladě kontinua, matematického pojmu spojitosti. Počáteční ponětí

*) *J. V. Stalin*, Dějiny VKS(b), 11. české vydání z r. 1951 str. 109.
**) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 157.
***) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 243.

o spojitosti se vytvářelo postupně na podkladě praktické činnosti, při které se lidé setkávali se spojitými procesy a zejména s konkretními tělesy a obrazci, ze kterých se rodí názorná geometrická představa o spojitosti přímky a jiných obrazců. Abstraktní pojem spojitosti je tedy odrazem skutečnosti a rozvíjel se neustále spolu s rozvojem celé matematiky. V předcházejícím článku byl v nejhrubších rysech podán obraz vývoje učení o spojitosti od dob Demokritových, obraz plný protikladů a přechodů k různým stanoviskům. V přítomné době kontinuum se zavádí převážně jako množina všech reálných čísel nebo jako množina všech bodů na přímce. Avšak v tomto stanovisku a rovněž i v axiomatickém vymezení kontinua se objevují hluboké potíže, vyskytla se nová hlediska, pohyb theorie pokračuje. A ve světle tohoto obrazu nárok na definitivní vymezení kontinua se jeví neopodstatněným.

Neběží tu prostě o logické potíže, nýbrž o to, že reálná skutečnost, jejímž odrazem jsou matematické pojmy, se ukazuje v pravdě složitou. Proto matematické kontinuum není „jakási jednotlivá realita“, kterou by bylo možné dokonale vymezit axiomy a tím ji odtrhnout od hmoty, nýbrž je přibližně věrným odrazem obecných vlastností reálných spojitých veličin. Tyto obecné vlastnosti existují, ale neexistují samy o sobě, nýbrž v jednotlivých spojitých veličinách, a nedají se oddělit v absolutně čistém a uzavřeném tvaru.

Že matematický pojem kontinua neodpovídá v absolutním smyslu slova reálné spojitosti, se dá snadno postřehnouti. Tak reálné spojité veličiny netoliko nepozůstávají z matematických bodů, nýbrž ani je neobsahují. Matematický bod je limita nekonečného dělení spojité veličiny, a ve skutečnosti, při dostatečně jemném dělení nebo zpřesnění hodnoty reálné veličiny vždycky se dříve či později objeví nová kvalita a daná veličina za určitou mezí dělení nebo zpřesnění prostě přestane existovat. Objem, délka, massa, teplota atd. jsou definovány u libovolného tělesa pouze až po atomové rozměry, s přesností až na oscilace způsobené pohybem molekul; za touto mezí tyto pojmy prostě ztrácejí svůj původní smysl.

Avšak matematické analysy, a tedy i theorie kontinua, užíváme právě na reálné spojité veličiny. Vždyť právě v aplikacích na úlohy přírodovědy a techniky spočívá zdůvodnění matematické analysy kriteriem praxe, bez něhož by úspěchy analysy neměly reálného smyslu. Právě odraz a přeměna přírody tvoří úlohu každé vědy a zejména matematiky, a ne holé rozvíjení abstraktních theorií z formulovaných soustav axiomů přes neomezené získávání nových „logických prostředků“. Arci samy „logické prostředky“ rovněž odrážejí hmotnou skutečnost a rozvíjejí se konec konců na podkladě praxe.

Na druhé straně daleko rozvinutý ryze logický vývoj představy o spojitosti jako o množině jednotlivých bodů vede k výsledkům, u kterých nedovedeme nalézt fysikální význam. Tak je na př. dokázáno, že existuje rozklad „matematické“ koule na konečný počet takových částí, že z nich lze složit dvě stejné koule (ne menší, nýbrž každá téže velikosti jako původní). Tyto části jsou, jak říkají matematikové, „neměřitelné“, t. j. nelze jim připsat žádný určitý objem, a to je nevyhnutelné, neboť jinak bychom došli ke sporu: objem koule by se rovnal součtu objemů dvou stejně velkých koulí neboli jedna by byla rovná dvěma. Avšak vzhledem na „neměřitelnost“ částí žádného formálního sporu tu není. Avšak reálný smysl věty zůstává nejasný. Zřejmé je toliko, že žádnou hmotnou kouli skutečně rozdělit takovým způsobem nemůžeme, t. j. věta zajisté nemá přímý fysikální smysl. Může tudíž mít jen nějaký abstraktnější smysl, ale jaký, to nevíme. Je to však pouze nejmarkantnější příklad z mnoha vět téhož typu. Takové věty zůstávají, v každém případě, dosud pouze čistě slovními tvrzeními o jakýchsi abstraktních možnostech, o kterých není známo, jak a kdy se mohou realisovat.

Podobné příklady ukazují předně, že v pojmu kontinua jako množiny bodů je zahrnuta možnost takových logických závěrů, které nemají bezprostřední fysikální smysl, a že tedy matematické kontinuum není samotná fysikální spojitost. Možnost takových závěrů ukazuje, že matematický pojem kontinua, ač zhrubuje skutečnost, zároveň jaksi jde dále než ona. Je to podobné tomu, jak mechanické představy o pohybu elektronů zhrubují skutečnost a zároveň jdou dále než ona, připisujíce elektronu pohyb po přesně vymezené trajektorii, kterého ve skutečnosti není. V každém případě je jasné, že v poměru matematického pojmu kontinua k reálné skutečnosti jsou osobité nesnáze, vyžadující rozřešení, vyžadující dalšího rozvoje theorie.

Za druhé náš příklad dokazuje, jak nejasným se stává pojem geometrické věty, zavedeme-li do geometrie abstrakce a methody usuzování, vlastní theorii množin. Rozhodně je sotva možné předpokládat, že by podobná věta vyplývala ze samotných axiomů eukleidovské geometrie. A vidíme opět, že připouštíme-li daleko jdoucí vývody, nemůžeme považovat geometrii za úplně uzavřenou theorii, jejíž předmět je úplně vymezen pouhými jejími axiomy.

Dále „svoboda“ v operování s abstrakcemi vede rovněž k ryze logickým nesnázím, a užíváme-li této „svobody“ neobezřetně, i k přímým sporům. Uvedeme známý příklad takového sporu.

Podle Cantora lze libovolné abstrakce sjednotit ve množinu tím, že utvoříme „množinu všech předmětů daného typu“; na příklad množinu všech možných posloupností celých čísel nebo množinu všech množin posloupností celých čísel atd. Ale nezúžíme-li nijak takovou svobodu v tvoření abstraktních pojmů, jsme přirozeně vedeni k tomu, abychom uvažovali množinu všech množin. A v tomto pojmu, jak se dá ukázat, jest obsažen formální spor.

Uvažujme však poněkud jinou konstrukci. Nazveme totiž „obyčejnou“ každou takovou množinu, která mezi svými elementy neobsahuje samu sebe (taková je na př. množina všech celých čísel, neboť jejími elementy jsou celá čísla a nikoli množiny). Množiny pak, které mezi svými elementy obsahují samu sebe, nazveme „neobyčejnými"; takovou bude množina všech množin, neboť ta podle svého vymezení musí mezi svými elementy obsahovat každou množinu, tedy i samu sebe. Je patrné, že každá daná množina musí býti buďto „obyčejná" nebo „neobyčejná". Uvažujme však množinu všech „obyčejných" množin. Je-li to množina „obyčejná", potom, podle definice, bude obsahovat jako element samu sebe a tudíž bude „neobyčejná", t. j. předpoklad, že je „obyčejná", vede ke sporu a tudíž nemůže býti „obyčejná". Na druhé straně nemůže býti „neobyčejná", ježto „neobyčejná" množina obsahuje samu sebe jako element, a my uvažujeme jen množinu „obyčejných" množin. Tedy množina všech „obyčejných" množin není ani tím ani oním: ani není „obyčejnou" ani „neobyčejnou". Pojem této množiny tedy je kontradiktorický.

Tento starý příklad dokazuje nevývratně, že „svoboda" v tvoření abstraktních pojmů je nepřípustná, že je nutné nějak ji omezit, nechceme-li se každým okamžikem dostávat do absurdních sporů. Podobné paradoxy lze odstranit vybudováním axiomatických základů theorie množin, ale problém bezespornosti samotných těchto axiomatických základů zůstává neřešen.

Bylo by však naprosto nesprávné myslit, jako by theorie množin přinesla pouze nesnáze a idealistické omyly. Nic nemůže být falešnější nežli takový názor. Naopak theorie množin vedla ke grandiosním úspěchům matematiky, a bez jejích idejí by byla nemyslitelná jak současná analysa, tak i současná geometrie a algebra. Avšak tyto úspěchy jsou nerozlučně spjaty s úlohami, jejichž původní prameny jsou v přírodních vědách a v technice, a které nepocházejí jen ze „svobodného" vzletu matematického myšlení.

Shrneme-li naše úvahy, nemůžeme říci, že ani představa o úplné uzavřenosti matematických theorií, ani představa o úplné určenosti matematických objektů axiomy, ani princip „svobody" v tvoření abstraktních pojmů neodpovídají skutečnému stavu věcí. Avšak právě tyto představy vedou k „množinovému idealismu" s jeho jednostranným přehnaným rozvíjením matematické abstrakce v absolutno odtržené od hmoty. A tento idealismus je skutečně cestou ke kněžourství, jak ukázal příklad samého Cantora, který oderval abstrakci od hmoty a zároveň je spojoval bezprostředně s pánem bohem.

3. Krise buržoasní matematiky.

Matematika v kapitalistických zemích prožívá už od počátku tohoto století krisi, podobnou krisi fysiky, jejíž podstatu odhalil V. I. Lenin ve své knize „Materialismus a empiriokriticismus". Bezprostřední příčinou krise matematiky byly theoretické nesnáze, které vznikly v souvislosti

s tvořením daleko jdoucích abstrakcí, zvláště v nauce o nekonečných množinách. Jak bylo ukázáno v předcházející části článku, tyto abstrakce vedly k výsledkům, jejich smysl byl a ve mnohém zůstává nejasným. Na této půdě vznikly mezi matematiky hluboké neshody v názorech na smysl a význam závěrů theorie množin a matematických závěrů vůbec. Jednota v chápání matematických důkazů a vět byla ztracena, vznikaly různé proudy, počala jakási theoretická rozervanost. A ježto všecky pokusy řešení nesnází se děly a dějí buržoasními matematiky z posic idealismu, uvnitř pouhého čistého myšlení, ani za půl století, jež uplynulo od momentu, kdy se objevily naznačené nesnáze, krise matematiky nebyla likvidována. Ona ani nemůže býti likvidována v podmínkách kapitalismu, ježto je jeho nevyhnutelným výplodem.

Vskutku matematika, tak jako každá věda, je soustava vědomostí a představ, jejichž objektivní obsah, právě za příčinou a v rozsahu své objektivity, nezávisí na společenském řádu, na ideologii. Objektivní výsledky vědy se hromadí a přecházejí od jedné společenské struktury ke druhé, jako na př. Eukleidova geometrie, která k nám přešla z otrokářské společnosti. Avšak věda se nevyčerpává svým objektivním obsahem. Systematisace, obecná interpretace, motivace, zaměření vývoje vědeckých znalostí — to vše má na sobě nevyhnutelně pečeť společenské ideologie, a v tomto smyslu věda se jeví třídní, stranickou. Matematika, jako každá věda, jest jednota objektivního obsahu a jeho theoretického výkladu v rámci určité ideologie. Objektivní obsah vědy se vždy formoval do historicky podmíněných schemat společenského uvědomění dané epochy.

V periodách historického rozmachu ideologie pokrokové třídy v celku harmonuje s rostoucí vědou. Věda, hnaná ku předu potřebami výroby, netísněná ideologickým rámcem, nýbrž naopak povzbuzovaná k rozvoji pokrokovou ideologií, úspěšně se rozvíjí. Tak bylo tehdy, když kapitalismus byl na postupu. Ale jakmile kapitalismus dospíval ke své poslední etapě, pokrok vědy se dostal do nesmiřitelného rozporu s buržoasní ideologií.*) Hluboké problémy, ke kterým dospěla věda vůbec a matematika zvláště, jsou nedostupné metafysickému myšlení. A tlak zájmů vládnoucí třídy v podmínkách kapitalistické společnosti odvrací učence od jediné vědecké filosofie, dialektického materialismu, který je v zásadním rozporu s buržoasní ideologií, ježto implikuje chápání toho, že kapitalismus sám je odsouzen k zániku. Proto také počíná jednostranný, falešný rozvoj jednotlivých stránek matematiky, počíná kolísání a snažení rozřešit nesnáze cestou idealismu, snažení opřené na už hotové názory kan-

*) To je zřejmě výrazem zásadního rozporu mezi materiálními výrobními silami a výrobními vztahy. Věda je na jedné straně svým objektivním obsahem spjata s výrobními silami přes své technické aplikace a pod., na druhé straně však je závislá na ideologii, t. j. obsahuje prvek nadstavby. Tedy protiklad objektivního obsahu a ideologické formy vědy jest odrazem protikladu výrobních sil a ideologie, odpovídající daným výrobním vztahům.

tovství, machismu atd. Idealistické zvrácenosti vědy se zakotvují třídními zájmy buržoasie a jdou do služby filosofické a politické reakce. To je právě krise buržoasní vědy, která skončí teprve se zánikem kapitalismu.

Ovšem termín „buržoasní matematika" nesmíme chápati vulgárně, v tom smyslu, jako by existovaly dvě zcela různé matematiky: buržoasní a socialistická. Objektivní obsah matematiky, tvořící její podstatu, je jednotný, ale jeho chápání, zaměření vývoje, chápání podstaty a úkolů vědy se různí, a v tomto smyslu se věda socialistické společnosti podstatně různí od vědy buržoasní. V socialistické společnosti krise vědy je nemožná, ježto ideologie socialismu — marxismus — je ideologie vědecká, a tudíž pro svou vlastní podstatu je v harmonickém souladu s objektivním obsahem vědy.

Ideologie nevystupuje jako cosi vnějšího v poměru k obsahu vědy. Naopak má aktivní vliv netoliko na obecné zaměření a na vývoj vědy, nýbrž také na chápání jednotlivých vědeckých theorií a výsledků. Jestliže ta či jiná věta a její formální důkaz svým objektivním obsahem je nezávislá na ideologii, je chápání smyslu a významu jak věty, tak i důkazu závislé na té či jiné filosofické posici (k čemuž budou podány příklady níže).

Jak bylo již řečeno, krise buržoasní matematiky se projevila především právě tím, že na počátku tohoto století mezi matematiky počala rozervanost nejen v obecné filosofii vědy, nýbrž i v chápání mnoha jejích konkretních výsledků. Většina matematiků trvala a trvá dosud v podstatě na tom, držet se „svobody matematiky", ježto tato nejméně tísní matematickou tvořivost. Ale v protiváze k tomu vznikaly proudy, snažící se nějak omezit tuto svobodu, aby se odstranily z ní vznikající rozpory a nesnáze.

4. Formalismus a intuicionismus.

Úkol, který si položil zakladatel formalismu v matematice Hilbert, spočíval v tom, odstranit rozpory, k nímž vedla „svoboda matematiky", a zachovat v matematice všecko cenné tím, že by se matematika převedla na ryze formální výpočty, a samo nekonečno na ryze formální ideu. Jinými slovy, základní myšlenka formalismu spočívá v tom, dát bezesporné a absolutně přesné zdůvodnění matematiky převedením její theorie na formální výpočty, t. j. záměnou matematických pojmů a vět za symboly a formule, a matematické usuzování za počítání s těmito formulemi podle přesně vymezených pravidel, podobně jako se v algebře řešení slovních úloh převádí na formální výpočty s písmeny. Při tom, v souhlase s myšlenkou formalismu, symboly a formule jest považovat za samostatné předměty, za znaky napsané na papíře, bez jakékoli souvislosti s jakýmkoli věcným obsahem. Pravidla usuzování pak se chápou jako pravidla pro operování s těmito předměty. Takovým úplným abstrahováním od věcného obsahu formulí a pravidel pro usuzování se dosáhne bezespornosti závěru, neboť ve formuli a jejím přesně mechanisovaném vyvození je spor nemožný: formule nemohou být pravdivými či nepravdivými, správnými či nesprávnými; prostě tu jsou, protože jsou napsány na papíře. Taková je argumentace formalismu.

Srovnejme tuto ideu formalismu s tím místem z poznámky „K otázce o dialektice", kde V. I. Lenin dokazuje, že i v nejjednodušší větě: „listí stromu je zelené; Ivan je člověk; Oříšek je pes a pod." už je dialektika. Dovršuje svoje uvažování, V. I. Lenin píše: „Tak je možno (a nutno) v *libovolném* soudu, jako v „buňce", objeviti počátky všech prvků dialektiky, a ukázati tak, že dialektika je vlastní všemu lidskému poznání vůbec."*) V této úvaze V. I. Lenina je obsaženo úplné a definitivní odsouzení formalismu v samém jeho počátku. Vskutku, ježto už nejjednodušší obsažná věta je dialektická, t. j. obsahuje v sobě moment přechodu, rozvoje, nevyčerpatelnosti obsahu, je nesmyslné mít za to, že by se dala úplně zaměnit formulí, tím méně že by se celá theorie dala zaměnit formálním výpočtem. Proto formální zdůvodnění matematiky je nemožné.

A to se potvrdilo také matematicky: jak ukázal rakouský matematik Gödel, ani nauka o celých číslech se nedá vyčerpat žádnými formálními výpočty. Zde byl formalismus zavrhnut svým vlastním dalším rozvojem. Ale s filosofického hlediska je tento výsledek pouze partikulárním potvrzením obecné Leninovy myšlenky, kterou on dokázal v nejobecnějším tvaru, s krajní jasností a jednoduchostí: každá obsažná věta je dialektická; a tudíž neredukovatelná beze zbytku na formuli (příklad viz v předcházejícím článku, str. 243 a 244).

Avšak mimo vyvrácení formalismu v Leninově poznámce „K otázce o dialektice" je obsažen také poukaz na to, že kořeny formalismu nutně tkví v jednostranném, přehnaném rozvíjení (nafukování, nabubřování) jednoho rysu, stránky, plošky poznání v absolutno odtržené od hmoty. Vskutku formalismus bezmezně nafukuje a vede k absolutnu formální stránku matematiky, docházeje až k záměně matematiky za pouhý formální aparát. Zdůvodnění matematiky formalismus hledá ne už v tom, jak její obsah odpovídá skutečnosti, nýbrž ve formální bezespornosti výpočtů, t. j. formální stránka matematiky se odtrhuje od hmoty. Formalisté uvažují symboly a formule samy jako reálné předměty: jsou, vizte, napsány na papíře! Ale tím se formalismus nestává materialismem, neboť materialismus vyžaduje vysvětlení souvislosti matematického myšlení s hmotnou skutečností, a ne záměny tohoto myšlení za symboly nebo jiné předměty.

Formalismus odráží ve zkaženém, přehnaném tvaru nezbytný element matematiky: její formální aparát, její formální přesnost. Převedení

*) *V. I. Lenin*, Filosofické sešity. Rusky 1947, str. 329. Česky v tomto sešitě, str. 233.

úsudků na výpočty je nezbytným prvkem matematiky, stejně jako úsilí o bezespornost úvah, realisované jejich formalisací. Moc formálního aparátu matematiky zná každý, kdo ho užil k řešení úloh. Avšak formální aparát nevyčerpává celou matematiku, neboť matematické pojmy a jejich souvislosti se skutečností jsou nekonečně bohaté svým obsahem i možnostmi svého vývoje. Formalisace je tudíž možná pouze pro jednotlivé stupně ve vývoji matematických theorií. Je nejenom možná, je dokonce nutná, ale nevyčerpává ani nejjednodušší theorie v celém jejich možném vývoji. Formální výpočty, formalisovaná matematická logika znamená nezbytný moment ve vývoji matematiky. Ale redukovat na ni veškerou matematiku, dělat z ní základ matematiky je neoprávněné, a v tom právě je podstata formalismu jako filosofického postoje v matematice. Proto je formalismus naprosto falešným, odporuje podstatě matematiky.

Formalismus je jedním aspektem „matematického" idealismu, a jako každý idealismus je cestou ke kněžourství. Za ním se táhla u samotného Hilberta axiomatisace fysiky, spjatá s nadějemi redukovat fysiku na geometrii, a na této půdě se rozvinul idealismus Eddingtonův a řady jiných fysiků a astronomů, kteří nejenom opakovali kantovská tvrzení o apriornosti zákonů fysiky, nýbrž fakticky došli k pámbíčkářství, ženouce celou vědu pod jařmo kněžourství. Mrzačení vědy se spojuje s čistým obskurantismem a dává se do služeb politické reakce. Tak přes jakékoli ušlechtilé úmysly kterýchkoli „matematických" idealistů jejich filosofie vede do té kalné bažiny, v níž se mezi jedovatými květy idealismu plazí filosofičtí dinosaurové, Eddingtonové, Smutsové a Russellové, kde ruku v ruce s rafinovaným znetvořováním vědy hnízdí „atomická" filosofie, boj proti míru a demokracii a jiné hnusy imperialistické ideologie.

Druhým, v určitém smyslu antagonickým, pokusem likvidovat všecky nesnáze a omezit „svobody" matematiky je tak zvaný „intuicionismus". On připouští v matematice pouze to, co je „intuitivně jasné", stejně jako machismus připouští ve fysice pouze to, co je bezprostředně dáno v počitku. To je však subjektivní idealismus v matematice, popírající jakýkoli objektivní význam matematiky. Zakladatel intuicionismu v matematice Brouwer prohlásil, že „existuje tolik matematik, kolik je matematiků". To je jednostranné, až k absurdnosti přehnané rozvinutí subjektivní stránky matematiky.*)

Matematika skutečně existuje v hlavách matematiků, a ne kdesi v „absolutním duchu"; různí matematikové často skutečně různě chápou

*) Bera intuicionismus jako protiklad formalismu, *Brouwer* pravil: „Na otázku o tom, kde je matematická pravda, já odpovídám: v hlavě matematikově, a formalista odpovídá: na papíře." Materialista však odpoví, že pravda je ve hmotné skutečnosti, matematické myšlení je jejím odrazem, a značky napsané na papíře jsou formou matematického jazyka.

tytéž věci; nejjednodušší pojmy jednotky a celého čísla jsou skutečně intuitivně jasné. Avšak staly se intuitivně jasnými v důsledku tisícileté praktické zkušenosti. Matematika nevzniká z intuice, nýbrž je odrazem skutečnosti. V každé epoše existuje ve vědomí daných matematiků, ale ve svém vývoji se blíží stále přesnějšímu odrazu objektivní reality, přinášejíc svůj vklad k poznání absolutní pravdy. Lidé stále poněkud různými způsoby chápou tytéž věci, to však nedává žádného podkladu pro závěry intuicionismu. Poznání není majetkem jednotlivce, nýbrž představuje společensko-historický proces; tvůrcem a nositelem vědy je celá lidská společnost.

Intuicionismus popírá jakýkoli smysl abstrakcí theorie množin a tudíž od prahu odmítá všecky její nesnáze. Pro něj je vůbec nepřípustným pojem nekonečna v jiné formě než v potenciálně neomezeném opakování jednotky, které se výhradně prohlašuje za „intuitivně jasné“. Avšak intuicionismus se svým požadavkem „intuitivní jasnosti“ položil takové přehrady rozvoji matematiky, že jej neuznává skoro nikdo z matematiků. Chtít převést celou matematiku na intuitivně jasnou představu opakování jednotky, jak to žádá Brouwer, je násilí vůči živé vědě, která se nedá stěsnat do takového Prokrustova lože. Intuicionismus, jako každý idealismus, je tedy nejenom falešná, nýbrž i protivědecká reakční filosofie.

5. Příklad na rozpory v otázce po smyslu vět.

Důležitým bodem nesouhlasu mezi množinovým idealismem, formalismem a intuicionismem je otázka po smyslu a významu existenčních vět. Tím rozumíme věty, které tvrdí existenci nějakého matematického objektu. Takovou větou je na př. základní věta algebry, která tvrdí, že každá algebraická rovnice má aspoň jeden (komplexní) kořen. Existenční věty jsou dvou typů. Jeden typ zahrnuje v sobě poukaz na konstrukci (nebo methodu určení) toho objektu, o jehož existenci je řeč. Tak na př. jestliže mluvíme o existenci trojúhelníka s danými dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, udáváme zároveň způsob jeho sestrojení. Jiné věty však pouze mluví o existenci objektu bez jakéhokoli poukazu na to, jak by bylo možno skutečně jej určit nebo najít. To jsou t. zv. existenční věty. Na př. základní věta algebry při obvyklém způsobu jejího důkazu nedává žádný poukaz, jak kořen určit, ačkoli tvrdí, že existuje. Avšak tuto větu je možné dokázat tak, že se udá methoda, jak určit kořen s libovolně předepsanou přesností, načež přestává být ryzí existenční větou. Jiný příklad poskytuje na př. následující věta, která hraje velmi důležitou úlohu v matematické analyse: každá spojitá funkce nabývá maxima (a minima), t. j. pro každou spojitou funkci $f(x)$, danou v intervalu $a \leq x \leq b$, existuje aspoň jedna taková hodnota x, pro kterou hodnota funkce je největší (nejmenší). (Tato věta je ovšem dostatečně zřejmá, ale matematika se nemůže spokojit zřejmostí: je nutné dokázat a dokazuje se, že ze samotného pojmu spojité funkce vyplývá uvedená její vlastnost.) Uvedená věta není doprovázena obecnou methodou určení takové hodnoty x, pro kterou funkce dosáhne maxima (nebo minima). To je také pochopitelné: sám pojem libovolné spojité funkce je příliš obecný na to, aby bylo možné očekávat obecnou methodu nalezení maxima, hodící se pro každou funkci. Aby bylo lze dospět k takové methodě, bylo by třeba nějak přesněji vymezit a zúžit samy způsoby, jimiž je možné definovat $f(x)$. Tudíž daná věta, ve svém obecném tvaru, představuje právě ryzí existenční větu a při tom je velmi typickým příkladem takové věty.

Příklad jiného druhu podává v oddíle 2 tohoto článku formulovaná věta o existenci takových částí koule, ze kterých je možné sestavit dvě koule stejně veliké jako původní. Tato věta na rozdíl od předcházející nejen není zřejmá, ale vůbec je nejasný její geometrický smysl. Není doplněna žádnou konstrukcí byť i jen jediného příkladu uvažovaného rozdělení koule, a je pochybné, že by bylo možné takovou konstrukci udat jinak než na základě naprosto nového způsobu chápání výrazů, o kterých je ve větě řeč. Tato věta je jenom jednou z mnohých ryzích existenčních vět téhož druhu, dokazovaných na podkladě pojmů theorie nekonečných množin. Ve všech takových větách je obsažena určitá nejasnost, a sám výraz „existuje“ se stává mlhavým, neboť se ukazuje, že existence nevychází na jevo, ačkoli se dokazuje. V souvislosti s touto nesnází právě vznikly různé způsoby nazírání na existenční věty vůbec.

Nejjednoduššího názoru se drží množinoví idealisté. Oni prostě se nezamýšlejí nad problémem, a i když se zamýšlejí, potom naň odpovídají jednoduše: je-li matematicky dokázáno, že něco existuje, potom to existuje v témž smyslu, v jakém existuje na příklad obecný pojem „dvě“. To, že neumíme větu doplnit způsobem konstrukce nebo určení objektu, nemá významu. I číslo „dvě“ i kořen rovnice, i nepředstavitelný rozklad koule, o kterém byla právě řeč, to vše existuje v jednom a témž absolutním smyslu. Proto ryzí existenční věty mají stejnou absolutní poznávací hodnotu jako všecka ostatní matematická tvrzení.

Formalisté soudí jinak. Oni abstrahují od smyslu vět a důkazů, a proto pro ně problém vůbec odpadá. Věta je formule, a důkaz je řetěz formulí, sestrojený podle známých pravidel, při čemž východiskem jsou základní formule, axiomy. V rámci formalismu věty jsou zbaveny smyslu a tudíž žádných rozdílů co do obsahu nebo poznávací hodnoty mezi ryzími existenčními větami a kterýmikoli jinými větami být nemůže, protože tu nejsou samotné pojmy obsahu a hodnoty. Formule existují, a otázka o tom, co znamenají, nenáleží podle přesvědčení formalistů do matematiky, nýbrž patří do „filosofie“ nebo, podle Hilberta, do „metamatematiky“.

Intuicionisté naopak požadují, aby každá věta byla intuitivně jasným tvrzením. Avšak ryzí existenční věty tvrdí s jejich stanoviska něco intuitivně nejasného, co nelze si zobrazit v intuici, nýbrž o čem je možné pouze mluvit. Proto intuicionisté vůbec upírají jakýkoli smysl a význam ryzím existenčním větám, až snad na to, že v nich je poukaz na možnost věty, která by byla doprovázena konstrukcí objektu. Tak pro intuicionisty základní věta algebry nemá žádný smysl a vůbec nic nedokazuje, ďokud není udána methoda výpočtu kořenu rovnice. Tím nesmyslnější jsou pro ně věty Cantorovské theorie množin. Tam, kde Cantorovi následovníci vidí úplný obsah věty, intuicionisté nevidí nic mimo snůšku slov!

Závěr.

Taková jsou krajně idealistická stanoviska, a ovšem existují také názory méně vyhraněné, kolísající mezi krajnostmi množinového absolutismu a intuicionismu. Vidíme tedy, jak z různých názorových posic se naprosto různě chápou jedny a tytéž věty a důkazy. Tento rozdíl v hodnocení vědeckých výsledků se nevyhnutelně projevuje v rozvoji těch či jiných vědeckých škol.

Každé z uvedených stanovisek přehání některou stránku problému v souhlase se svým celkovým postojem. Ale společným pro všecka jest odtržení matematiky od hmotné skutečnosti, od praxe.

Proti všem těmto názorům se staví to hledisko, které vyplývá ze základních thesí dialektického materialismu.

Každý pojem, každé tvrzení má objektivní smysl pouze do té míry, v jaké odráží něco reálně existujícího; ryzí existenční věty zde netvoří žádnou výjimku. Každá vědecká abstrakce je odrazem těch či jiných vlastností hmotné skutečnosti. Avšak tyto vlastnosti neexistují jako nějaká samostatná realita, nýbrž jako obecné, projevující se v partikulárním a v konkretním. V tomto smyslu otázka o existenci „matematických objektů", jako na př. čísla „dvě", kořenu rovnice a pod., neliší se od otázky o existenci třeba elektrického náboje, abstraktní práce, universální gravitace... Jako náboj je obecná vlastnost různých objektů, tak i číslo dvě je obecná vlastnost různých párů předmětů. Jako zákon universální gravitace tak i věta o existenci maxima spojité funkce vyjadřují jakési obecné vlastnosti skutečnosti. Hlavní otázka nespočívá v tom, zda můžeme či nemůžeme doplnit větu způsobem výpočtu nebo konstrukce „matematického objektu", nýbrž v tom, zda je to opravdu objekt, jinými slovy, zda mu opravdu odpovídá nějaký prvek hmotné skutečnosti. Bez takového materiálního ekvivalentu žádná věta si nemůže činit nárok na vědecký význam.

O tom pak, zda naše pojmy odpovídají hmotné skutečnosti, rozhoduje se konec konců praxí. Prostý fakt vytvoření toho či onoho abstraktního pojmu nebo úsudku nedává ještě podklad ke tvrzení, že by už tím sám byl v úplné shodě se skutečností, jak si to představují pokračovatelé Cantora. K tomu, abychom se přesvědčili, že nějaká věta odpovídá skutečnosti, je nutné tak či jinak ji prověřit praxí, t. j. je nutné buďto podat její přímé aplikace, nebo z ní činit závěry schopné takových aplikací. Tak se prověřuje každé theoretické tvrzení, ať už běží o zákon universální gravitace či o větu o existenci maxima spojité funkce. Tato věta právě proto zaujímá význačné postavení v matematice, že prostřednictvím nesčetných na ní založených vývodů je konec konců spjata s konkretními úlohami. Proto ten fakt, že není doplněna obecnou methodou určení maxima, není na závadu jejímu významu vědecké pravdy. Jinak tomu je s výše vzpomenutou větou o nepředstavitelném rozkladu koule. Tato věta, stejně jako jiné jí podobné, vyvolává pochybnosti právě proto, že z ní, rozhodně alespoň prozatím, zřejmě nedovedeme činit jakékoli praktické závěry.

Tedy, v opaku ke sporům idealistů, podstata věci nespočívá v tom, zde můžeme či nemůžeme doplnit větu konstrukcí, nýbrž v tom, zda od ní můžeme dojít až ke praxi. Konstrukce je důležitý moment v tomto přibližování vět ke praxi, konstrukce zabezpečuje možnost systematického užívání věty. Ale užívání věty jako obecného zákona je možné, i když není doplněna obecnou methodou konstrukce nebo výpočtu.

Avšak otázku o materiálním obsahu a o praktických aplikacích matematických vývodů nesmíme pojímat s falešným zjednodušováním. Předně, všecky abstrakce a obecné vývody odrážejí pouze některé stránky skutečnosti, jsou chudší než jejich konkretní obsah. Obecné a abstraktní existuje v partikulárním a konkretním. Praxe však má co činit vždy s konkretními předměty a jevy. Proto ona v podstatě nemůže dát absolutní důkaz pro obecné věty, obecné zákony. Jak ukázal V. I. Lenin, „nesmíme zapomínat, že kriterium praxe podle samé podstaty věci nikdy nemůže *úplně* potvrdit nebo vyvrátit jakoukoli lidskou představu. Toto kriterium rovněž je na tolik „neurčité", že nedovoluje, aby lidské znalosti se měnily v „absolutno", ale zároveň je na tolik určité, aby bylo základnou nemilosrdného boje se všemi odrůdami idealismu a agnosticismu."*) Kriterium praxe nedovoluje matematické pojmy a vývody měnit v absolutno, v „jakousi jednotlivou realitu", jak si to žádají množinoví idealisté, ale zároveň dovoluje vésti nemilosrdný boj se všemi odrůdami subjektivismu a agnosticismu v matematice, ať již běží o intuicionismus, formalismus, „efektivismus" ... Za druhé nelze požadovat, aby každý závěr té či jiné theorie měl bezprostřední aplikaci; theorie obecně se prověřuje jako celek, a jednotlivá věta musí brát své zdůvodnění v soustavě té theorie, do které náleží. Nezbytná logická harmoničnost theorie jakožto soustavy často vyžaduje takové obecné věty a spojující články — závěry, které také mohou nemít přímý praktický význam. A bez logické harmoničnosti theorie jako celek by ztrácela sílu dobře fungujícího vědeckého aparátu. Právě proto je pro matematiku nezbytná formální přesnost usuzování, formální výpočty a pod.

*) *V. I. Lenin*, Spisy (rusky), sv. 14, str. 130.

Posléze je nutné mít na paměti, že matematické pojmy a úsudky nevyjadřují definitivní, absolutně přesné, ideální pravdy, které by už nevyžadovaly vývoje v samotném svém základě. Naopak se stále vyvíjejí. V tomto vývoji hraje svou úlohu také zpřesnění matematické logiky, také vývoj intuitivních představ, také axiomatika, ale rozhodující úlohu hraje přece jenom praxe. Mimo to i logika, i intuitivní představy, i axiomy jsou samy ve svém základě nahromaděnou praxí a jejich další vývoj se děje na témž podkladě. Matematika slouží a musí sloužit poznání a přeměně skutečnosti.

„Matematičtí" idealisté nechápou a nechtějí chápat nezbytné spojení matematiky s praxí. Oni nic nevidí, co je mimo rámec jejich navyklých matematických pojmů a úsudků. Jejich myšlení počíná abstrakcemi a v nich končí. Jednostrannost, subjektivismus a subjektivní slepota, to je base jejich filosofie, která úplně spadá pod zdrcující charakteristiku, kterou dal V. I. Lenin pro každý idealismus. „Matematický" idealismus je hluchý květ, který je parasitem na živém plodném stromě matematiky, hluchý květ jedovatý a škodlivý. On odvléká vědu od jejích opravdových úkolů a vydává ji službám filosofické a politické reakce. Nesmiřitelný boj s idealismem, ať by se projevoval kdekoli a jakkoli, to je jeden z našich nejdůležitějších úkolů. Výzbroj k tomuto boji pak nám dávají geniální výtvory klasiků marxismu.

Přeložil *E. Čech*, Praha.