Časopis pro pěstování matematiky

Bohdan Zelinka

Poznámka o nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 3, 289--293

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108404`

POZNÁMKA O NEKONEČNÝCH HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH SYSTÉMECH CEST V GRAFU

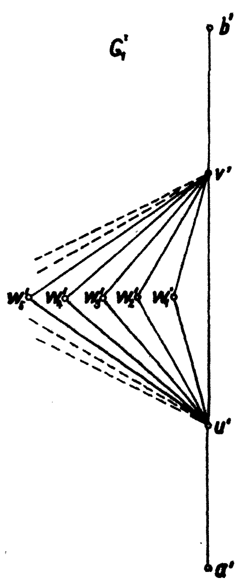
BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo 21. ledna 1966)

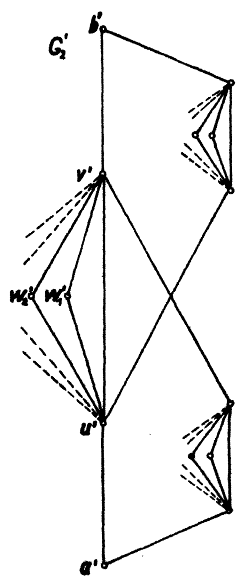
V [1] G. A. DIRAC uvádí tento problém:

Dva různé uzly a a b grafu jsou spojeny nekonečným počtem δ cest, z nichž každá má a a b jako koncové uzly a z nichž žádné dvě nemají společnou hranu. Vyplývá z toho, že a b jsou spojeny δ cestami takovými, že každá z nich má a a b jako koncové uzly, žádné dvě z nich nemají společnou hranu a společné uzly kterýchkoliv dvou cest se vždy vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b?

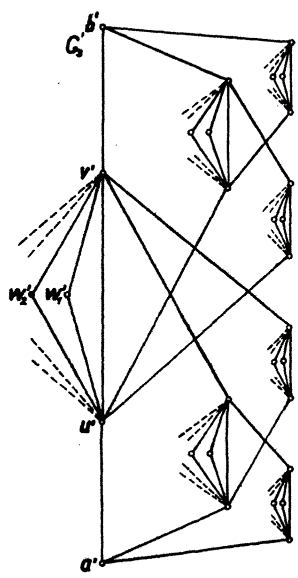
Odpověď na tuto otázku je záporná. V tomto článku bude sestrojen graf, pro který tato hypotéza neplatí (při $\delta = \aleph_0$). Nejprve budeme rekurentně definovat



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

nekonečnou posloupnost grafů $G'_1, G'_2, \ldots$ Graf G'_1 (obr. 1) obsahuje uzly a', b', u', v' a w'_j, kde j probíhá všechna přirozená čísla. Hrany grafu G'_1 jsou $a'u', u'v', b'v', u'w'_j, v'w'_j$ pro všechna přirozená j. Popíšeme nyní konstrukci grafu G'_n, kde $n \geqq 2$. Mějme tři grafy G'_1, H_1, H_2, kde oba grafy H_1 a H_2 jsou isomorfní s G'_{n-1}. Graf G'_{n-1} obsahuje uzly a' a b', tedy vezmeme v grafu H_1 uzel odpovídající v isomorfismu uzlu a' grafu G'_{n-1} a ztotožníme jej s uzlem a' grafu G'_1. Dále uzel grafu H_1 odpovídající uzlu b' ztotožníme s uzlem v' grafu G'_1. Uzel grafu H_2 odpovídající uzlu a' (resp. b') ztotožníme s uzlem u' (resp. b') grafu G'_1. Tuto konstrukci nazveme konstrukcí (K). Grafy G'_2 a G'_3 jsou na obr. 2 a 3.

Dokážeme lemma.

Lemma 1. *Pro každé přirozené $n \geqq 2$ platí, že graf G'_n obsahuje podgraf G''_{n-1} isomorfní s G'_{n-1} takový, že uzly a', b', u', v', w'_j jsou v tomto isomorfismu samodružné.*

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 2$ plyne tvrzení přímo z konstrukce grafu G'_2, neboť $G'_{n-1} = G'_1$. Budiž $n = k > 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k - 1$. Konstruujme nyní graf G'_k z grafu G'_1 a grafů H_1, H_2 isomorfních s G'_{k-1} konstrukcí (K). Graf H_1 (resp. H_2) obsahuje podgraf H'_1 (resp. H'_2) isomorfní s G'_{k-2} a takový, že uzlům a', b', u', v', w'_j odpovídají tytéž uzly v isomorfismu G'_{k-1} na H_1 (resp. H_2) jako v isomorfismu G'_{k-2} na H'_1 (resp. H'_2). Graf G'_k obsahuje tedy podgraf vzniklý z G'_1, H'_1 a H'_2 konstrukcí (K). Tento podgraf je zřejmě isomorfní s G'_{k-1}, přičemž uzly a', b', u', v', w'_j jsou v příslušném isomorfismu samodružné.

Můžeme tedy vytvořit opět nekonečnou posloupnost grafů $G_1, G_2, \ldots$ tak, že pro každé přirozené n je G_n isomorfní s G'_n, dále $G_{n-1} \subset G_n$ pro každé přirozené $n \geqq 2$ a existují uzly a, b, u, v, w_j, které odpovídají uzlům a', b', u', v', w'_j v isomorfismu G'_n na G_n pro všechna n.

Lemma 2. *V grafu G_n existuje systém $\mathscr{C}_n$ složený z n cest $C_1, \ldots, C_n$ z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, přičemž cesty $C_1, \ldots, C_{n-1}$ leží celé v G_{n-1} (který je podgrafem G_n), cesta C_n neleží celá v G_{n-1} (pro $n \geqq 2$).*

Důkaz provedeme opět matematickou indukcí. U grafu G_1 je tvrzení zřejmé; cesta C_1 je cesta složená z hran au, uv, vb, leží zřejmě celá v G_1. Cesta C_2 je složena z cest, které jsou obrazy cesty C_1 v isomorfních zobrazeních grafu G_1 na grafy H_1 a H_2 (z nichž se tvoří konstrukcí (K) graf G_2) a dále z hran uw_1, vw_1, tato cesta zřejmě neleží celá v G_1. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k - 1$ ($k \geqq 3$). Vezměme graf G'_k, o němž víme, že je isomorfní s G_k. Z konstrukce grafu G'_k pomocí grafů G'_1, H_1, H_2 a z indukčního předpokladu plyne, že v grafu G'_k existuje systém $k - 1$ cest $D'_1, \ldots, D'_{k-1}$ z a' do v', z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, tyto cesty leží v H_1. Rovněž existuje systém stejné vlastnosti $D''_1, \ldots, D''_{k-1}$ z u' do b'; všechny cesty tohoto systému leží v H_2, jsou tedy disjunktní s cestami prvého systému, poněvadž grafy H_1 a H_2 jsou disjunktní. Přitom v isomorfismu H_1 (resp. H_2) na G_{k-1}

obrazy cest $D'_1, \ldots, D'_{k-2}$ (resp. $D''_1, \ldots, D''_{k-2}$) leží v G_{k-2}, obraz cesty D'_{k-1} (resp. D''_{k-1}) neleží celý v G_{k-2}. Konečně existuje systém nekonečně mnoha cest $D'''_1, D'''_2, \ldots$ z u' do v', kde cesta D'''_j se skládá z uzlů u', w'_j, v'. Žádná z cest $D'''_1, D'''_2, \ldots$ nemá zřejmě společnou hranu se žádnou z cest $D'_1, \ldots, D'_k, D''_1, \ldots, D''_k$. Sestrojíme tedy systém cest $C'_1, \ldots, C'_k$ z a' do b', kde $C'_{j+1} = D'_j \cup D''_j \cup D'''_j$ pro $j = 1, \ldots, k-1$ a C'_1 je cesta složená z uzlů a', u', v', b'. V tomto systému zřejmě žádné dvě cesty nemají společnou hranu. Vezmeme-li v H_1 (resp. v H_2) podgraf H'_1 (resp. H'_2), který je obrazem G_{k-2} v isomorfismu G_{k-1} na H_1 (resp. H_2), pak graf vzniklý konstrukcí (K) z grafů G'_1, H'_1, H'_2 je graf G'_{k-1} (viz lemma 1). Zřejmě v něm leží cesty $C_1, \ldots, \ldots, C_{k-1}$ zatím co C_k v něm celá neleží.

Vidíme tedy, že $\mathscr{C}_{n-1} \subset \mathscr{C}_n$ pro každé přirozené $n \geqq 2$. Vezměme nyní sjednocení $G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. V grafu G_∞ zřejmě existuje systém $\mathscr{C}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ který se skládá z $\aleph_0$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu (to plyne z toho, že $\mathscr{C}_{n-1} \subset \subset \mathscr{C}_n$ pro každé $n \geqq 2$ a z toho, že každý systém $\mathscr{C}_n$ má onu vlastnost).

Zřejmě platí další lemma.

Lemma 3. *Jestliže při konstrukci* (K) *bereme grafy H_1 a H_2 oba isomorfní s G_∞ (místo s G'_{n-1}), pak výsledek konstrukce* (K) *je opět graf isomorfní s G_∞ (místo grafu G'_n).*

Každé hraně h grafu G_∞ přiřadíme nyní přirozené číslo $m(h)$, které definujeme jako nejmenší přirozené číslo takové, že h leží v $G_{m(h)}$. Samozřejmě je-li $n \geqq m(h)$, pak h leží v G_n, je-li $n < m(h)$, pak h neleží v G_n. Každá cesta C z a do b obsahuje konečný počet hran, můžeme tedy definovat $m(C) = \max_{h \in C} m(h)$. Snadno bychom zjistili, že cesta C leží celá v $G_{m(c)}$, ale neleží celá v $G_{m(c)-1}$.

Lemma 4. *Budiž $\mathscr{C}$ systém cest z a do b v G_∞ takový, že žádné dvě cesty systému nemají společnou hranu a společné uzly kterýchkoliv dvou cest systému se vždy vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b. Pak $\mathscr{C}$ obsahuje pouze konečný počet cest.*

Důkaz. Budiž $\mathscr{C}$ takovýto systém cest a budiž C cesta z $\mathscr{C}$ taková, že $m(C) = \min_{C' \in \mathscr{C}} m(C')$. Taková cesta musí existovat, protože hodnoty $m(C')$ jsou přirozená čísla. Proveďme matematickou indukci podle $m(C)$. Je-li $m(C) = 1$, znamená to, že C je cesta složená buď z uzlů a, u, v, b, nebo z uzlů a, u, w_j, v, b pro nějaké přirozené j. Buďtež H_1, H_2 grafy z lemmatu 3. Budiž C_0 libovolná cesta z a do b v G_∞, která nemá společnou hranu s C. Její hrana incidentní s a (resp. s b) nemůže být au (resp. bv), poněvadž ta náleží cestě C, musí to být tedy hrana z H_1 (resp. H_2). Protože graf H_1 (resp. H_2) je disjunktní s H_2 (resp. H_1) a má s grafem G'_1 společné pouze uzly a, v (resp. b, u), obsahuje tedy cesta C_0 úsek z a do v ležící v H_1 a úsek z u do b ležící v H_2. Jdeme-li po C_0 z a do b, dojdeme tedy nejprve do v, potom po hraně uv

nebo přes některý z uzlů w_j do u a odtud do b. Tedy společné uzly u, v cest C, C_0 se objevují po každé v opačném pořadí. Systém $\mathscr{C}$ obsahující cestu C při $m(C) = 1$ obsahuje tedy pouze jedinou cestu.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m(C) < k$, kde k je libovolné přirozené číslo, a dokažme je pro $m(C) = k$. Mějme graf G_∞ a grafy H_1, H_2 z lemmatu 3. Budiž H'_1 (resp. H'_2) obraz grafu G_{k-1} při isomorfismu G_∞ na H_1 (resp. H_2). Poněvadž C leží v G_k, obsahuje buď úsek z a do v v H'_1, nebo úsek z u do b v H'_2; předpokládejme bez újmy na obecnosti, že nastane první případ. Je-li nyní C_0 cesta ze systému $\mathscr{C}$ různá od C, je $l = m(C_0) \geqq m(C)$, tedy C_0 leží v G_l. Budiž H''_1 (resp. H''_2) obraz grafu G_{l-1} při isomorfismu G_∞ na H_1 (resp. H_2). Cesta C_0 obsahuje buď úsek z a do v v H''_1, nebo úsek z u do b v H''_2. Nastane-li první případ, pak v isomorfismu H_1 na G_∞ obrazy úseků z a do v cest C a C_0 jsou cesty C'' a C''_0 z a do b v G_∞ takové, že $m(C'') \leqq m(C''_0)$, $m(C'') < k$. Podle indukčního předpokladu vidíme, že vezmeme-li podsystém $\mathscr{C}^*$ systému $\mathscr{C}$ takový, který obsahuje všechny cesty obsahující úsek z a do v v H_1, pak $\mathscr{C}^*$ je konečný. Všechny cesty z a do b v G_∞, které takovýto úsek neobsahují, obsahují zřejmě hranu au. Proto může být nejvýše jedna cesta v $\mathscr{C} - \mathscr{C}^*$. Tedy i $\mathscr{C}$ je konečný.

Tím jsme dokázali větu.

Věta. *Existuje graf obsahující uzly a a b takový, že uzly a a b jsou v něm spojeny systémem* $\aleph_0$ *cest, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, přičemž v každém takovémto systému existují dvojice cest takové, že některé jejich společné uzly se vyskytují v různém pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b.*

Poznámka. Pro konečné δ je známo, že Diracova hypotéza platí.

Literatura

[1] Theory of Graphs and its Applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Резюме

ЗАМЕТКА О БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЦЕПЕЙ БЕЗ ОБЩИХ РЕБЕР В ГРАФЕ

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

Известная теорема из теории графов утверждает:

Пусть две различные вершины a и b графа соединены δ цепями (δ-натуральное число), каждая из которых имеет a и b в качестве своих граничных вершин и накакие две из них не имеют общего ребра. Тогда a и b соединены δ цепями такими, что каждая из них имеет a и b в качестве своих граничных вершин, никакие две из них не имеют общего ребра и общие вершины произвольных двух цепей находятся в том же самом порядке вдоль обеих на ходу от a до b.

На Симпозиуме о теории графов в Смоленице в 1963 году Г. А. Дирак задал проблему, верна ли эта теорема тоже, когда δ бесконечное кардинальное число. В этой статье дан отрицательный ответ на этот вопрос — приведен контрпример с $\delta = \aleph_0$.

Summary

A REMARK ON INFINITE EDGE-DISJOINT SYSTEMS OF PATHS IN A GRAPH

BOHDAN ZELINKA, Liberec

A well-known theorem of the theory of graphs affirms:

Let two different vertices a and b of a graph be connected by δ paths (δ is a positive integer), each of which has a and b as its end vertices and none two of which have an edge in common. Then a and b are connected by δ paths such that each of them has a and b as its end vertices, none two of them have an edge in common and common vertices of arbitrary two paths occur always in the same order while going from a to b.

At the Symposium on the theory of graphs in Smolenice in 1963 G. A. Dirac has proposed the question, whether this theorem is also true, if δ is an infinite cardinal number. In this article the question is answered negatively — a counterexample with $\delta = \aleph_0$ is given.