Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ÜBER DIE SPHÄRISCHE ABBILDUNG DER ABGESCHLOSSENEN SPHÄRISCHEN KURVE

VLADIMÍR KOHOUT, Praha

(Eingegangen am 17. März 1966)

In diesem Aufsatz soll es sich um folgende bekannte Eigenschaft der sphärischen Abbildung der abgeschlossenen sphärischen Kurve handeln. Wenn sich die sphärische Abbildung einer abgeschlossenen sphärischen Kurve nicht selbst schneidet, halbiert sie die Sphäre. Diese Verallgemeinung wird mit Hilfe des Begriffes, der als Analogie des Gauss'schen Masses an der Sphäre angesehen werden kann gemacht.

1. Es sei $\mathcal{K}$ eine Einheitssphäre mit dem Zentrum Q im gerichteten eukleidischen Raum E_3. Wir werden uns mit sphärischen Kurven in $\mathcal{K}$ und mit ebenen Kurven in der Tangentenebene der Fläche $\mathcal{K}$, die eine Parameterdarstellung $X = X(t)$ mit $X'(t) \neq 0$ für $t \in (a, b)$ haben, befassen. Wenn die Kurve abgeschlossen ist, setzen wir voraus, dass die Punktfunktion $X(t)$ im Intervall $(-\infty, +\infty)$ definiert wird und dass sie periodisch ist. Für alle Kurven, die mit dem Buchstaben C bezeichnet sind, werden wir weiter auch die Stetigkeit der zweiten Ableitung X'' in (a, b), bzw. $(-\infty, +\infty)$ voraussetzen, für die Kurven, die $\tilde{C}$ bezeichnet sind, werden wir die Stetigkeit der dritten Ableitung X''' voraussetzen.

2. Zunächst wollen wir an einen bekannten Satz über den Index des Punktes in der gerichteten eukleidischen Ebene gegenüber der gerichteten abgeschlossenen Kurve C erinnern. Für uns ist die Vorassetzung hinreichend, dass diese sich selbst in einer endlichen Anzahl der Punkte schneidet und die Ebene in eine endliche Anzahl der Gebiete $O_1, \ldots, O_r$ teilt, deren Grenze die Kurvenvielecke sind. Dann gilt der:

Satz 1. *Es sei Y der Punkt auf der Grenze zweier Gebiete O_i, O_j $(i \neq j)$, der von allen Ecken der Kurvenvielecke verschieden ist. Es sei $\mathbf{t}$ ein Tangentenvektor der Kurve C im Punkt Y und $\mathbf{m}$ ein Normalvektor der Kurve C im Punkt Y, wobei $[\mathbf{t}, \mathbf{m}] = 1$ (hier bezeichnen die Klammern das äussere Produkt). Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\alpha \in (0, \varepsilon)$*

$$\operatorname{ind}_C (Y + \alpha m) = \operatorname{ind}_C (Y - \alpha m) + 1$$

gilt.

Es sei nun C eine abgeschlossene sphärische Kurve in $\mathscr{K}$, die sich selbst in einer endlichen Anzahl der Punkte schneidet, die die Sphäre $\mathscr{K}$ in eine endliche Anzahl der Gebiete $O_1, \ldots, O_r$ teilt und deren Grenze die sphärischen Kurvenvielecke sind. Wählen wir $S \in O_1$ und projizieren aus dem Punkt S die Kurve C in die Tangentenebene τ im Punkt J, wobei S und J diametral sind. Orientieren wir $\mathscr{K}$ mittels der äusseren Normale, die Ebene τ orientieren wir dann so wie die Tangentenebene der gerichteten Fläche. Es sei $Y \neq S$, Y liegt nicht auf C. Bezeichnen wir C_1, Y_1 die Projektionen der Kurve C und des Punktes Y in τ. Legen wir $\operatorname{ind}_C Y = \operatorname{ind}_{C1} Y_1$, $\operatorname{ind}_C S = 0$. Damit übertragen wir den Begriff des Indexes des Punktes gegenüber einer Kurve auf die Kugelfläche, $\operatorname{ind}_C Y$ hängt natürlich von der Numerierung der Gebiete $O_i(S \in O_1)$ ab. Der Index ist auf jedem Gebiet O_i konstant. Legen wir also $\operatorname{ind}_C O_i = \operatorname{ind}_C Y$, wo $Y \in O_i$. Aus dem Satz 1 folgt gleich der

Satz 2. *Die Indexe zweier benachbatren Gebiete O_i, O_j auf $\mathscr{K}$ unterscheiden sich um 1, den grösseren Index hat jenes Gebiet, in das der Normalvektor der Kurve zeigt. Dabei setzen wir voraus, das dieser Normalvektor mit dem Tangentenvektor der Kurve C eine positive Basis des Vektorraumes der Tangentenebene der Kugelfläche $\mathscr{K}$ bildet (in Reihenfolge: Tangentenvektor, Normalvektor).*

3. Wählen wir in der Ebene τ ein positives kartesisches Koordinatensystem $\{J, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, durch stereographische Projektion aus dem Punkt S gewinnen wir auf der $\mathscr{K} - (S)$ ein ortogonales Koordinatensystem. Die Einheitstangentenvektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ der Koordinatenkurven im Punkt $A \in \mathscr{K} - (S)$ bildet eine positive Basis des Vektorraumes der Tangentenebene der Kugelfläche im Punkt $A : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{r})$, wo $\boldsymbol{r} = A - Q$, eine positive Basis ist.

4. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_1 \boldsymbol{a}_1 + \omega_2 \boldsymbol{a}_2 , \\
\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1 &= \omega_{12} \boldsymbol{a}_2 + \omega_1 \boldsymbol{r} , \\
\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2 &= -\omega_{12} \boldsymbol{a}_1 + \omega_2 \boldsymbol{r} , \\
\omega_1 \wedge \omega_2 &= -\mathrm{d}\omega_{12} .
\end{aligned} \tag{1}
$$

Bezeichnen wir V_i den Flächeninhalt des Gebietes O_i $(i \neq 1)$, dann ist

$$
V_i = \int_{O_i} \omega_1 \wedge \omega_2 = - \int_{O_i} \mathrm{d}\omega_{12} = - \int_{\partial O_i} \omega_{12} , \tag{2}
$$

wo ∂O_i die positiv gerichtete Grenze des Gebietes O_i (des Kurvenvieleckes) ist, das heisst der Tangentenvektor bildet in regulären Punkten der Kurve ∂O_i mit dem Normalvektor, der in das Innere des O_i gerichtet ist, eine positive Basis des Vektorraumes der Tangentenebene der Kugelfläche $\mathscr{K}$.

5. Bezeichnen wir $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ die gerichteten Bogen der Kurve C, die die Seiten der Grenze O_i sind und die Beziehung $\gamma_1 + \ldots + \gamma_q = C$ erfüllen (das heisst mittels der Anstückelung aller Bogen γ_i bekommen wir die Kurve C). Weiter sei es γ_{ij} die Kante des Kurvenvieleckes, die der gemeinsame Teil der Grenz der Gebiete O_i, O_j ist und die Orientation der γ_{ij} sei übereinstimmend mit der positiven Orientation auf ∂O_i; γ_{ij} ist also höchstens durch die Orientation von irgendeinem Bogen γ_i abweichend. Wir setzen voraus, dass die Grenze des Gebietes O_i aus s (i) Bogen $\gamma_{ij_1}, \ldots, \gamma_{ij_{s(i)}}$ besteht: $\partial O_i = \gamma_{ij_1} + \ldots + \gamma_{ij_{s(i)}}$ und dass $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_{s(i)}}$ die Bogen sind, die sich höchstens durch Orientation von $\gamma_{ij_1}, \ldots, \gamma_{ij_{s(i)}}$ unterscheiden. Nach dem Satz 2 gilt

$$\int_{\gamma_{i_1}} \omega_{12} + \ldots + \int_{\gamma_{i_{(s)}}} \omega_{12} = (\mathrm{ind}_C\, O_i - \mathrm{ind}_C\, O_{j_1}) \int_{\gamma_{i_1}} \omega_{12} + \ldots$$
$$\ldots + (\mathrm{ind}_C\, O_i - \mathrm{ind}_C\, O_{j_{s(i)}}) \int_{\gamma_{ij_{s(i)}}} \omega_{12}\,,$$

wo $O_{j_1}, \ldots, O_{j_s}$ die zu O_i benachbarten Gebiete sind. Daraus folgt

$$\int_{\gamma_{i_1}} \omega_{12} + \ldots + \int_{\gamma_{i_{s(i)}}} \omega_{12} = \mathrm{ind}_C\, O_{i_1} \int_{\partial O_i} \omega_{12} - \mathrm{ind}_C\, O_{j_1} \int_{\gamma_{ij_1}} \omega_{12} - \ldots$$
$$\ldots - \mathrm{ind}_C\, O_{j_{s(i)}} \int_{\gamma_{ij_{s(i)}}} \omega_{12} = \mathrm{ind}_C\, O_i \int_{\partial O_i} \omega_{12} + \mathrm{ind}_C\, O_{j_1} \int_{\gamma_{j_1 i}} \omega_{12} + \ldots$$
$$\ldots + \mathrm{ind}_C\, O_{j_{s(i)}} \int_{\gamma_{j_{s(i)} i}} \omega_{12}\,.$$

Wenn wir alle diesen Gleichungen für $i = 1, \ldots, r$ summieren, bekommen wir

$$2 \int_C \omega_{12} = 2\left(\mathrm{ind}_C\, O_1 \int_{\partial O_1} \omega_{12} + \ldots + \mathrm{ind}_C\, O_r \int_{\partial O_r} \omega_{12}\right).$$

Da $\mathrm{ind}_C\, O_1 = 0$, folgt daraus nach (2)

$$\int_C \omega_{12} = -\sum_{i=1}^{r} V_i\, \mathrm{ind}_C\, O_i\,. \tag{3}$$

6. Bezeichnen wir $\mathbf{t}$ den Einheitstangentenvektor der gerichteten Kurve C. Legen wir $\mathbf{t} = \cos\alpha\mathbf{a}_1 + \sin\alpha\mathbf{a}_2$, $\mathbf{m} = -\sin\alpha\mathbf{a}_1 + \cos\alpha\mathbf{a}_2$. Nach (1) folgt daraus $\mathbf{m}\, \mathrm{d}\mathbf{t} = \mathrm{d}\alpha + \omega_{12}$. Bezeichnen wir

$$p = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\alpha\,, \tag{4}$$

gibt die ganze Zahl p an, wievielmal sich der Tangentenvektor der Kurve C gegenüber dem Vektor $\mathbf{a}_1$ bei einem Umlauf der Kurve C umdreht, oder wievielmal sich der Tangentenvektor der Kurve C_1 bei einem Umlauf umdreht. Das bedeutet, dass $2\pi p$ die globale Krümmung der Kurve C_1 ist. Die Zahl p hängt natürlich von der Numerierung der Gebiete O_i, $i = 1, \ldots, r$, ab (wir setzen $S \in O_1$ voraus). Von einer Auswahl des Punktes S in dem Gebiet O_1 hängt sie aber nicht ab. Nach (3), (4) kann man

$$(5) \qquad 2\pi p - \int_C \boldsymbol{m}\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{r} V_i \operatorname{ind}_C O_i .$$

schreiben.

7. Es sei C die sphärische Abbildung einer gerichteten abgeschlossenen sphärischen Kurve $\tilde{C}$; $\tilde{C}$ sei durch Parameterdarstellung $\tilde{X}(t) = Q + \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ gegeben, dann wird also C durch die Punktfunktion

$$(6) \qquad X(t) = Q + \frac{\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)}{|\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)|} = Q + \boldsymbol{r}(t)$$

dargestellt. Bezeichnen wir $\tilde{\boldsymbol{n}}$ den Vektor der Hauptnormale der Kurve $\tilde{C}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}$ den Vektor der Binormale der Kurve $\tilde{C}$, $\tilde{k}$ die Krümmung der Kurve $\tilde{C}$ und ähnlich für die Kurve C : $\boldsymbol{n}$ sei der Vektor der Hauptnormale, $\boldsymbol{b}$ der Vektor der Binormale, k die Krümmung.

Legen wir

$$(7) \qquad \tilde{\boldsymbol{r}} + \cos\tilde{\beta}\tilde{\boldsymbol{n}} + \sin\tilde{\beta}\tilde{\boldsymbol{b}} = 0\,, \quad \boldsymbol{r} + \cos\beta\boldsymbol{n} + \sin\beta\boldsymbol{b} = 0\,,$$

$\tilde{\beta}$, bzw. β ist also der Winkel, den die Hauptnormale der Kurve $\tilde{C}$ bzw. C und die innere Normale der Kugelfläche bildet. Aus (6), (7) folgt

$$(8) \qquad \boldsymbol{m}\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tilde{\beta}\,, \quad \frac{1}{\tilde{k}} = \cos\tilde{\beta}\,.$$

Daraus folgt $\cos\tilde{\beta} > 0$. Wenn wir uns auf das Intervall $\langle -\pi, \pi)$ beschränken, gilt notwendig $-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi$. Da $\tilde{C}$ geschlossen ist, gilt also

$$\int_C \mathrm{d}\tilde{\beta} = 0$$

und aus (5) bekommen wir

$$(9) \qquad 2\pi p = \sum_{i=1}^{r} V_i \operatorname{ind}_C O_i\,.$$

Wir sagen dieses Ergebnis in folgendem Satz aus:

Satz 3. *Wenn C eine sphärische Abbildung der abgeschlossenen sphärischen Kurve ist, gilt* (9).

8. Bezeichnen wir $\tilde{s}$ einen Bogen der $\tilde{C}$; dann gilt $\tilde{k} = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\tilde{s}$, wo s ein Bogen der C ist; daraus

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\tilde{s}}\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\tilde{k}}\,\boldsymbol{r} = \cos\tilde{\beta}\boldsymbol{r}\,. \tag{10}$$

Aus (7), (8) folgt $\mathrm{d}\tilde{\beta}/\mathrm{d}s = \operatorname{tg}\beta$, also $\tilde{\beta}(s) = \int_0^S \operatorname{tg}\beta(s)\,\mathrm{d}s + K$, $K = \text{konst.}$ Aus der Bedingung $\cos\tilde{\beta} > 0$ folgt, dass $\max\tilde{\beta}(s) - \min\tilde{\beta}(s) < \pi$. Umgekehrt: Wenn die Kurve C gegeben wird, können wir nach (7) die Funktion β auf C feststellen. Es sei X_0 ein beliebiger Punkt der Kurve C. Konstruiren wir die Funktion $\tilde{\beta}^*$ auf C durch die Vorschift

$$\tilde{\beta}^*(X) = \int_{\widehat{X_0X}} \operatorname{tg}\beta\,\mathrm{d}s\,, \tag{11}$$

wo $\widehat{X_0X}$ der Bogen der Kurve C mit Endpunkten X_0, X (in dieser Reihenfolge gegenüber der Orientation der Kurve C) ist. Wenn auf C die Bedingung

$$\max\tilde{\beta}^*(X) - \min\tilde{\beta}^*(X) < \pi \tag{12}$$

erfüllt ist, kann man eine Konstante K so finden, dass $\tilde{\beta}^* + K = \tilde{\beta}$, $-\frac{1}{2}\pi < \tilde{\beta} < \frac{1}{2}\pi$ ist. Wir können also die Vektorfunktion (nach (10)) konstruiren:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^*(s) = \int_0^S \cos\tilde{\beta}(s)\,\boldsymbol{r}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

$\tilde{\beta}(s)$ bedeutet da natürlich die Darstellung der Funktion $\tilde{\beta}$ mittels des Bogens der Kurve C.

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}^*}{\mathrm{d}s} = \cos\tilde{\beta}(s)\,\boldsymbol{r}(s)\,,$$

also $\tilde{C}^*$ ist das sphärische Original der Kurve C. Wir stellen leicht fest, dass $\tilde{\boldsymbol{r}}^* + \tilde{\boldsymbol{n}}\cos\tilde{\beta} + \tilde{\boldsymbol{b}}\sin\tilde{\beta} = \boldsymbol{v}$ gilt, wo $\boldsymbol{v} = \text{konst.}$; legen wir $\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}^*(s) - \boldsymbol{v}$, dann ist die Kurve $\tilde{C}$ mit der Parameterdarstellung

$$\tilde{X}(s) = Q + \tilde{\boldsymbol{r}}(s) \tag{13}$$

die Kurve auf der Kugelfläche $\mathscr{K}$.

9. Die sphärische Kurve $\tilde{C}$, die im letzten Abschnitt konstruiert wird, muss nicht abgeschlossen sein. Setzen wir voraus, dass C die Bedingung (9) erfüllt. Dann ist nach (5), (8) $\int_C \mathrm{d}\tilde{\beta} = 0$, dass heisst, wenn wir mit l die Länge der Kurve C bezeichnen: $\tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}(l)$. Weiter gilt offenbar

$$\tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{t}\,, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{t}} \times \tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}$$

also

$$\tilde{\boldsymbol{n}}(0) = \tilde{\boldsymbol{n}}(l)\,, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}(0) = \tilde{\boldsymbol{b}}(l)\,;$$

hier treten natürlich die Darstellungen der Vektorfunktionen $\tilde{\mathbf{n}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ auf $\tilde{C}$ mittels des Bogens der C auf. Also nach (7) gilt $\tilde{\mathbf{r}}(0) = \tilde{\mathbf{r}}(l)$, das heisst, dass die Kurve $\tilde{C}$ abgeschlossen ist. Wir fassen zusammen:

Satz 4. *Es sei C eine abgeschlossene sphärische Kurve. Konstruiren wir die Funktion β auf C (nach (7)) und die Funktion $\tilde{\beta}^*$ auf C (nach (11)). Wenn auf C die Ungleichung (12) gilt, so existiert ein sphärisches Original $\tilde{C}$ der sphärischen Kurve C. Die Kurve $\tilde{C}$ ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn (9) gilt.*

Bemerkung. Im Falle, dass C die sphärische Kurve ist, die sich selbst nicht schneidet, übergeht (9) in die Gleichung $V_1 = V_2$. Wir bekommen also die bekannte Eigenschaft einer sphärischen Kurve, die nicht sich selsbt schneidet: sie halbiert die Kugelfläche.

Anschrift des Verfassers: Praha 6 - Dejvice, Technická 1902 (fakulta elektrotechnická ČVUT).

Výtah

O SFÉRICKÉM OBRAZU UZAVŘENÉ SFÉRICKÉ KŘIVKY

VLADIMÍR KOHOUT, Praha

Jestliže sférický obraz uzavřené sférické křivky neprotíná sám sebe, půlí kulovou plochu. V článku je vyšetřeno zobecnění této známé věty pro případ, že sférický obraz sám sebe protíná. Je nalezena nutná a postačující podmínka existence a uzavřenosti sférického originálu uzavřené sférické křivky.

Резюме

О СФЕРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

ВЛАДИМИР КОГОУТ (Vladimír Kohout), Прага

Эсли сферическое отображение замкнутой сферической кривой не пересекает себя, то оно делит сферу пополам. В статье рассматривается обобщение этой известной теоремы для случая, когда сферическое отображение пересекает себя. Найдено необходимое и достаточное условие для существования и земкнутости сферического оригинала замкнутой сферической кривой.