Pavel Bartoš

Lineárne sústavy priamo podobných útvarov v rovine

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 198--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108379

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

RŮZNÉ

LINEÁRNE SÚSTAVY PRIAMO PODOBNÝCH ÚTVAROV V ROVINE

PAVEL BARTOŠ, Zlaté Moravce

(Došlo dňa 27. januára 1959)

Lineárnou sústavou priamo podobných útvarov v rovine nazývame množinu L všetkých útvarov U v rovine, ktoré splňujú tieto dve podmienky:

1. Každé dva útvary z L sú priamo podobné.

2. Ak $U_i \in L$ $(i = 1, 2, 3)$ a $A_i \in U_i$ sú rôzne body, ktoré si v priamych podobnostiach medzi U_1, U_2, U_3 zodpovedajú, ležia body A_1, A_2, A_3 na priamke (nositeľke sústavy; všetky nositeľky dávajú nosnú sieť sústavy). Medzi priame podobnosti nezahrnujeme totožnosť.

Vyjadrenie priamej podobnosti v rovine s komplexnou súradnicou z bodu $[z]$ je $z' = az + b$, kde $a \neq 0$, b sú komplexné konštanty, z resp. z' je súradnica vzoru resp. obrazu.

Nech

$$z' = a_1 z + b_1 \,, \quad z'' = a_2 z + b_2 \tag{1}$$

sú dve podobnosti z množiny priamych podobností medzi útvarmi lineárnej sústavy L. Keďže body $[z]$, $[z']$, $[z'']$ sú kolineárne, je

$$\begin{vmatrix} z, & \bar{z}, & 1 \\ z', & \bar{z}', & 1 \\ z'', & \bar{z}'', & 1 \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{2}$$

Ak dosadíme do (2) z (1), dostaneme po úprave

$$z\bar{z} \begin{vmatrix} a_1 - 1, & \bar{a}_1 - 1 \\ a_2 - 1, & \bar{a}_2 - 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a_1 - 1, & \bar{b}_1 \\ a_2 - 1, & \bar{b}_2 \end{vmatrix} + \bar{z} \begin{vmatrix} b_1, & \bar{a}_1 - 1 \\ b_2, & \bar{a}_2 - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1, & \bar{b}_1 \\ b_2, & \bar{b}_2 \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{3}$$

I. Predpokladajme, že podobnosti medzi útvarmi množiny L majú všetky spoločný samodružný bod. Ak je nevlastný, je $a_1 = a_2 = 1$ a z (3) plynie, že pomer $b_1 : b_2$ je reálny. Podobnosti medzi útvarmi množiny L sú teda všetky translácie tohože smeru. Ak je samodružný bod vlastný, zvoľme ho za začiatok, tj. $b_1 = b_2 = 0$. Z (3) plynie, že $\dfrac{a_1 - 1}{a_2 - 1} = \mu$ je reálne číslo. Podobnosť medzi každými dvoma útvarmi množiny L je teda početne takto vyjadrená: $z' = (1 - \mu + \mu a_2)\, z$; a_2 je konštanta, μ reálny parameter. Z toho možno snadno odvodiť geometrickú konštrukciu príslušných podobností (pri reálnom a_2 sú to ovšem rovnoľahlosti so stredom v samodružnom bode).

II. Nech podobnosti medzi útvarmi množiny L nemajú všetky ten istý samodružný bod. Predpokladajme, že práve podobnosti (1) majú rôzne samodružné body. Dva rôzne nevlastné samodružné body nemôžu existovať.

a) Nech existujú dva rôzne samodružné body, z ktorých jeden je nevlastný a druhý vlastný. Potom je $a_1 = 1$ a môžeme položiť $b_2 = 0$. (3) sa teda redukuje na

$$- z\bar{b}_1(a_2 - 1) + \bar{z}b_1(\bar{a}_2 - 1) = 0 , \tag{4}$$

takže bod $[z]$ vytvorí priamku p prechádzajúcu vlastným samodružným bodom $[0]$. Nositeľka bodu $[z_0]$ priamky p má rovnicu (so súradnicou w premenného bodu) $- \bar{b}_1 w + b_1\bar{w} + \bar{b}_1 z_0 - b_1\bar{z}_0 = 0$. Všetky nositeľky sú teda rovnobežné. Ak priamka p neprechádza nevlastným samodružným bodom (a_2 nie reálne), sú nositeľky jej bodov rôznobežné s priamkou p. Ak ním prechádza, všetky splývajú v priamke p.

b) Nech existujú dva rôzne samodružné body vlastné. Opäť položíme $b_2 = 0$. Koeficient pri $z\bar{z}$ v (3) označíme Δ a rozlíšime dva prípady.

1. $\Delta = 0$. Z (3) potom zase plynie (4), takže bod $[z]$ vytvorí priamku p idúcu oboma samodružnými bodmi $[0]$ a $\left[\dfrac{b_1}{1 - a_1}\right]$. Nositeľka bodu $[z_0]$ priamky p má rovnicu

$$(1 - \bar{a}_2)\,\bar{z}_0 w - (1 - a_2)\,z_0\bar{w} + (\bar{a}_2 - a_2)\,z_0\bar{z}_0 = 0 .$$

Sú teda nositeľky bodov priamky p rovnobežné s pevnou priamkou o rovnici $\bar{b}_1 w - b_1\bar{w} = 0$, a sú rôzne, keď a_2 nie je reálne. Pri reálnom a_2 všetky splývajú s priamkou p.

2. $\Delta \neq 0$. Podľa (3) vytvorí potom bod $[z]$ kružnicu k o rovnici

$$\Delta z\bar{z} - \bar{b}_1(a_2 - 1)\,z + b_1(\bar{a}_2 - 1)\,\bar{z} = 0 ,$$

ktorá prechádza opäť samodružnými bodmi $[0]$ a $\left[\dfrac{b_1}{1 - a_1}\right]$. Nositeľka bodu $[z_0]$ kružnice k má rovnicu

$$(1 - \bar{a}_2)\,\bar{z}_0 w - (1 - a_2)\,z_0\bar{w} + (\bar{a}_2 - a_2)\,z_0\bar{z}_0 = 0$$

a pretína kružnicu k v ďalšom bode $\left[\dfrac{b_1}{\Delta}(a_2 - \bar{a}_2)\right]$. Keďže jeho súradnica nezávisí na z_0, prechádzajú ním nositeľky všetkých bodov kružnice k.

Zhrnujeme výsledky z časti II: Nosná sieť sústavy L je tvorená buď zväzkom, buď osnovou priamok, buď jedinou priamkou q; iný prípad nemôže nastať. V prvom prípade sú útvarmi sústavy len kružnice, idúce stredom zväzku; v druhom prípade len priamky, rôznobežné s priamkami osnovy; konečne v treťom prípade len priamka q sama.

Pri úprave textu tohoto článku mi veľmi ochotne a výdatne pomohol s. dr. Zbyněk Nádeník, *za čo mu vrelo ďakujem.*