Vladimír Kohout
Kvasieliptická teorie ploch

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 2, 170--177

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108358`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

KVASIELIPTICKÁ TEORIE PLOCH

VLADIMÍR KOHOUT, Praha

(Došlo dne 28. května 1968)

1. Článek je věnován diferenciální geometrii ploch v kvasieliptickém prostoru, tedy, zhruba řečeno, diferenciální geometrii „dvouparametrických soustav poloh" jedné eukleidovské roviny v druhé. Jeho obsah tedy souvisí s rovinnou kinematickou geometrií. V rámci kinematické geometrie byly plochy v kvasieliptickém prostoru lokálně studovány zejména s použitím Cliffordových bikvaternionů (viz např. [1]); v tomto článku je použito jiné metody, která bezprostředně poskytuje některé zajímavé výsledky. Roli základního pracovního prostředku zde hraje Lieova algebra Lieovy grupy přímých shodností orientované eukleidovské roviny.

2. Nechť E_2, $\tilde{E}_2$ jsou reálné orientované eukleidovské roviny, V_2, $\tilde{V}_2$ jejich vektorové prostory (zaměření), $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ Lieovy grupy přímých shodností rovin E_2, $\tilde{E}_2$ a $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ jejich Lieovy algebry. Označme dále $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{G}}$ Lieovy podgrupy translací a $\mathfrak{h}$, $\tilde{\mathfrak{h}}$ jejich Lieovy algebry. Položíme-li pro $a, b \in V_2$: $[a, b] = 0$, lze ztotožnit $\mathfrak{h} = V_2$; podobně $\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{V}_2$. Obecněji: každý vektor $X \in \mathfrak{g}$ ztotožníme s odpovídajícím vektorovým polem roviny E_2, jehož hodnotu v bodě $A \in E_2$ označíme $X(A)$, tj. $X(A) = (\mathrm{d}\sigma_A)_e X$, kde $g \in \mathcal{G} \Rightarrow \sigma_A g = gA$, $e \in \mathcal{G}$ je identita. Je-li $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, existuje právě jeden bod $C \in E_2$ tak, že $X(C) = 0$. Bod C nazveme střed pole X. Zvolíme-li kladnou kartézskou soustavu souřadnic (C, e_1, e_2) v rovině E_2, pak $A = C + a_1 e_1 + a_2 e_2 \Rightarrow X(A) = -c a_2 e_1 + c a_1 e_2$, kde reálné číslo c nezávisí na volbě base (e_1, e_2). Definujme $\{X\} = c$. $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ je úplně určeno bodem C a číslem c; pišme $X = (C, c)$. Položme $\{X\} = 0$ pro $X \in \mathfrak{h}$.

Snadno se lze přesvědčit, že platí (R – těleso reál. čísel):

1. $a \in R, X = (C, c) \Rightarrow aX = (C, ac)$,

2. $X = (C, c)$, $c \neq 0$, $Y \in \mathfrak{h} \Rightarrow X + Y = (C + (1/c)\, Y^*, c)$, kde pro $Y \neq 0$ je $((1/|Y|)\, Y, (1/|Y|)\, Y^*)$ kladná ortonormální base $\mathfrak{h}$, $0^* = 0$,

3. $X_1 = (C_1, c_1), X_2 = (C_2, c_2), c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 = c_2(C_1 - C_2)^*$, kde * má tentýž význam jako v 2,

4. $X_1 = (C_1, c_1), X_2 = (C_2, c_2), c_1 + c_2 \neq 0 \Rightarrow X_1 + X_2 = (1/(c_1 + c_2)(c_1C_1 + c_2C_2), c_1 + c_2)$,

5. $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, a_1, a_2 \in R \Rightarrow \{a_1X_1 + a_2X_2\} = a_1\{X_1\} + a_2\{X_2\}$,

6. $X_1, X_2 \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X_1, X_2] = (\{X_2\} X_1 - \{X_1\} X_2)^*$, kde * má opět tentýž význam jako v 2.

3. Množinu M všech přímých shodných zobrazení $\tilde{E}_2$ na E_2 nazveme kvasieliptickým prostorem. Na M lze přirozeným způsobem sestrojit strukturu analytické variety dimense 3, kterou opět označíme M; M je analyticky difeomorfní s $\mathscr{G}$. Analogicky definujeme analytickou varietu $\tilde{M}$. V dalším se omezíme na M.

Nechť D je otevřená podmnožina prostoru R^n (n – přirozené číslo), $\mathscr{P} : D \to M$ třídy C^1. Obraz bodu $u = (u^1, \ldots, u^n) \in D$ v zobrazení $\mathscr{P}$ označíme $\mathscr{P}_u$, bodovou funkci p (s hodnotami v E_2), definovanou takto: $p(u) = (\mathscr{P}_u)(\tilde{A})$, kde $\tilde{A} \in \tilde{E}_2$, označíme $\mathscr{P}(\tilde{A})$.

Pro $x \in M$ definujeme $f_x : \mathscr{G} \to M$ takto: $g \in \mathscr{G} \Rightarrow f_x g = g \circ x$ a položíme $v \in T_x(M) \Rightarrow \omega(v) = (\mathrm{d}f_x^{-1})_x\, v \in \mathfrak{g}$; $T_x(M)$ je tečný prostor variety M v bodě x. ω je zřejmě analytická lineární forma (s hodnotami v $\mathfrak{g}$), zobrazující prostě každý $T_x(M)$ na $\mathfrak{g}$ a dovolující ztotožnit $T_x(M) = \mathfrak{g}$. Toto přirozené splývání tečných prostorů variety M s $\mathfrak{g}$ definuje na M jistou afinní konexi, kterou se však nebudeme blíže zabývat. ω splňuje podmínku $X, Y \in T_x(M) \Rightarrow \mathrm{d}\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)]$.

Platí tedy: $\mathrm{d}\mathscr{P}$ je $\mathfrak{g}$-značná lineární forma na D, $\mathrm{d}\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{n} (\partial\mathscr{P}/\partial u^i)\,\mathrm{d}u^i$, kde $\partial\mathscr{P}/\partial u^i$ jsou $\mathfrak{g}$-značné funkce na D. Dále je $(\mathrm{d}\mathscr{P})(p) = \mathrm{d}p$.

4. Nechť v E_2, $\tilde{E}_2$ jsou zvoleny (kladné) kartézské soustavy souřadnic; pak každé přímé shodné zobrazení $x : \tilde{E}_2 \to E_2$ je dáno rovnicemi

$$\xi_1 = \tilde{\xi}_1 \cos \varphi - \tilde{\xi}_2 \sin \varphi + c_1 ,$$
$$\xi_2 = \tilde{\xi}_1 \sin \varphi + \tilde{\xi}_2 \cos \varphi + c_2 .$$

Zvolme libovolně $\varphi_0 \in R$ a uvažujme množinu U těch $x \in M$, pro něž $\varphi \neq \varphi_0 + k\pi$ (k-celé číslo). Pak zobrazení $x \in U \leftrightarrow (c_1, c_2, \varphi)$, kde $\varphi_0 - \pi < \varphi < \varphi_0 + \pi$ je lokální soustava souřadnic na M v oblasti U; nazveme ji normální lokální soustavou souřadnic a označme $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = \varphi$.

Každá podvarieta $N \subset M$, daná v některé normální lokální soustavě souřadnic rovnicí $x_3 =$ konst., může být přirozeným způsobem vybavena strukturou orientované eukleidovské roviny se zaměřením $\mathfrak{h} = V_2$. Na množině všech těchto eukleidovských rovin je pak možno sestrojit přirozeným způsobem strukturu eliptické přímky, kterou označíme l.

Položme (při zvolené normální lokální soustavě souřadnic) $\mathscr{P}_u = x$, kde $u = (x_1, x_2, x_3)$. $\mathscr{P}$ nazveme pak normální lokální parametrisací prostoru M. Platí: $\{\partial\mathscr{P}/\partial x_1, \partial\mathscr{P}/\partial x_2)$ je pro každý bod $u \in D$ kladná ortonormální base $\mathfrak{h}$, $\{\partial\mathscr{P}/\partial x_3\} = 1$.

Nechť $g \in \mathscr{G}$, $\tilde{g} \in \tilde{\mathscr{G}}$, pak zobrazení $s : M \to M$ takové, že $x \in M \Rightarrow sx = g \circ x \circ \tilde{g}$, nazveme shodností prostoru M. Lieovu grupu všech shodností prostoru M označme S. Je patrné, že každá shodnost $s \in S$ indukuje na l eliptickou shodnost, přičemž pro $N \in l$ indukuje s přímou shodnost $N \to sN$.

5. Uveďme několik pomocných tvrzení (pro jednoduchost bez důkazu a v co nejjednodušším tvaru), která budeme potřebovat v dalším.

Lemma 5.1. *Nechť* $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$, $x \in M$, $y \in M$, $|[X_1, X_2]| = |[Y_1, Y_2]| \neq 0$, $\{X_1\} = \{Y_1\}$, $\{X_2\} = \{Y_2\}$. *Pak existuje jediná shodnost* $s \in S$, *pro niž* $sx = y$, $\mathrm{d}sX_i = Y_i$, $i = 1, 2$.

Lemma 5.2. *Nechť* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou* $\mathfrak{g}$-*značné funkce na* D, *vyhovující systému*

$$(5.1) \qquad \mathrm{d}X_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k X_k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kde ω_i^k *jsou lineární diferenciální formy na* D. *Nechť* $g \in \mathscr{G}$. *Pak* $\mathrm{ad}gX_i$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, *vyhovují systému* (5.1.).

Správnost tohoto tvrzení plyne bezprostředně z nejjednodušších vlastností zobrazení $\mathrm{ad}g$. Poznamenejme, že $\mathrm{ad}gX$ jakožto vektorové pole roviny E_2 (viz odst. 2) je obrazem pole X v zobrazení $\mathrm{d}g$.

Nechť $\mathscr{Q} : D \to M$, $\tilde{g} \in \tilde{\mathscr{G}}$. Označme $\mathscr{Q}\tilde{g}$ zobrazení D do M, pro něž $u \in D \Rightarrow (\mathscr{Q}\tilde{g})_u = \mathscr{Q}_u \circ \tilde{g}$.

Lemma 5.3. *Nechť* $\mathscr{P} : D \to M$, $\mathscr{Q} : D \to M$, $\mathrm{d}\mathscr{P} = \mathrm{d}\mathscr{Q}$; *pak existuje* $\tilde{g} \in \tilde{\mathscr{G}}$ *tak, že* $\mathscr{P} = \mathscr{Q}\tilde{g}$.

Lemma 5.4. *Nechť* $D \subset R^2$, $\mathscr{P} : D \to M$ *je zobrazení třídy* C^2, $\mathrm{d}\mathscr{P} = X_1\,\mathrm{d}u^1 + X_2\,\mathrm{d}u^2$, *kde* X_1, X_2 *jsou* $\mathfrak{g}$-*značné funkce na* D. *Pak*

$$(5.2) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial u^2} - \frac{\partial X_2}{\partial u^1} = [X_1, X_2]\,.$$

Lemma 5.5. *Nechť* X_1, X_2 *jsou* $\mathfrak{g}$-*značné funkce třídy* C^1 *na* $D \subset R^2$, *vyhovující podmínce* (5.2). *Dále nechť* $u_0 \in D$, $x_0 \in M$. *Pak existuje okolí* $D' \subset D$ *bodu* u_0 *a jediné zobrazení* $\mathscr{P} : D' \to M$ *takové, že*

1) $\mathrm{d}\mathscr{P} = X_1\,\mathrm{d}u^1 + X_2\,\mathrm{d}u^2$,

2) $\mathscr{P}_{u_0} = x_0$.

6. Nechť Ω, Ω' jsou dvoudimensionální orientované souvislé variety třídy C^p, f, f' regulární zobrazení $f : \Omega \to M$, $f' : \Omega' \to M$ třídy C^p. Řekneme, že dvojice (Ω, f),

(Ω', f') jsou ekvivalentní a zapíšeme $(\Omega, f) \sim (\Omega', f')$, právě když existuje difeomorfismus $\chi : \Omega \to \Omega'$ třídy C^p zachovávající orientaci, tak, že $f = f' \circ \chi$.

Definice. Každou třídu navzájem ekvivalentních dvojic (Ω, f) nazveme (orientovanou) plochou v M třídy C^p.

Poznámka. Je-li plocha P v M určena dvojicí (Ω, f), budeme psát $P \sim (\Omega, f)$. V dalším budeme pro jednoduchost uvažovat plochy třídy C^∞ (diferencovatelné plochy), ač by bylo možno připustit pro naše účely plochy třídy C^4. Termín „plocha" tedy v dalším vždy znamená (orientovanou) plochu třídy C^∞ (diferencovatelnou plochu) v M.

Plochu P budeme vždy uvažovat jako diferencovatelnou souvislou varietu přirozeným způsobem difeomorfní s každou Ω, pro níž $P \sim (\Omega, f)$; příslušný difeomorfismus P na Ω označme p_Ω. Je-li $y \in P$ (y je bod plochy), $P \sim (\Omega, f)$, pak $f(p_\Omega y) \in M$ nazveme realisací bodu y. Realisace bodu plochy nezávisí na výběru dvojice (Ω, f) takové, že $P \sim (\Omega, f)$. Tečný vektor Y_y plochy P v bodě y ztotožníme ovšem s vektorem $\mathrm{d}(f \circ p_\Omega)\, Y_y \in \mathfrak{g}$.

Nechť U je oblast lokálních souřadnic na P, (y_1, y_2) lokální souřadnice bodu $y \in U$. Označme D otevřenou množinu v R^2 takovou, že $(y_1, y_2) \in D \Leftrightarrow y \in U$ a položme $(y_1, y_2) \in D \Rightarrow \mathscr{P}_{(y_1, y_2)} = f(p_\Omega y) =$ realisace bodu y, kde $P \sim (\Omega, f)$. Zobrazení $\mathscr{P} : D \to M$ nazveme pak lokální parametrisací plochy P (v oblasti U, definovanou na D). Bod y plochy P, v němž tečný prostor $T_y(P)$ plochy splývá s $\mathfrak{h} : \mathfrak{h} = T_y(P)$, nazveme translačním bodem plochy. Označme $\mathrm{d}\varphi$ lineární diferenciální formu na P s vlastností: $Y \in T_y(P) \Rightarrow \mathrm{d}\varphi(Y) = \{Y\}$. Platí tedy: y je translační bod plochy P, právě když v bodě y je $\mathrm{d}\varphi = 0$, tj. $\mathrm{d}\varphi(Y_y) = 0$ pro každý $Y_y \in T_y(P)$.

7. Nechť Q je plocha v M, Q_1 množina jejích translačních bodů. Předpokládejme, že Q je isolovaná. Pak $P = Q - Q_1$ je plocha; nechť $\mathscr{P}$ je nějaká její kladná lokální parametrisace v oblasti $U \subset P$ definovaná na $D \subset R^2$. Položme $\partial\mathscr{P}/\partial u^i = X_i$, $i = 1, 2$, $\varphi_i = \{X_i\}$. V dalším budeme používat zkráceného zápisu součtů, obvyklého v tensorovém počtu; indexy budou vždy probíhat hodnoty 1, 2. Pak zřejmě platí na U (podle odst. 2): $\mathrm{d}\varphi = \varphi_i\, \mathrm{d}u^i$, kde $\mathrm{d}\varphi$ je lineární diferenciální forma na Q, definovaná v odst. 6. Z lineární nezávislosti X_1, X_2 plyne $0 \neq [X_1, X_2] \in \mathfrak{h}$ v každém bodě $u \in D$. Položíme $\varrho = |[X_1, X_2]|$, $n = (1/\varrho)[X_1, X_2]$; tedy $|n| = 1$. Protože X_1, X_2, n jsou v každém bodě $u \in D$ lineárně nezávislé, lze položit

$$(7.1) \qquad \partial_i X_k = \Gamma^s_{ik} X_s + \alpha_{ik} n\,, \quad i, k = 1, 2\,.$$

Je snadno patrné, že α_{ik} jsou souřadnice jistého tensorového (diferencovatelného) pole α na P a Γ^s_{ik} koeficienty jisté afinní konexe Γ na P v uvažované lokální soustavě souřadnic v U. Označme dále $\beta_{ik} = \alpha_{ki} - \alpha_{ik}$, $i, k = 1, 2$; β_{ik} jsou souřadnice antisymetrického vektorového pole β na P. Podle (5.2) a z (7.1) plyne $\beta_{12} = \varrho > 0$.

Definujme ještě β^{ik} vztahem $\beta_{ik}\beta^{jk} = \delta_i^j$ a položme $\varphi^i = \varphi_k\beta^{ik}$. Výpočtem zjistíme, že platí $\partial_i n = -\alpha_{is}\varphi^s\varphi^k X_k$, položíme proto

$$h_j^i = -\alpha_{js}\varphi^s\varphi^i \tag{7.2}$$

a dostáváme

$$\partial_i n = h_i^s X_s . \tag{7.3}$$

Označíme-li ještě $R_{jik}^l = \partial_k \Gamma_{ji}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{si}^l$ souřadnice tensoru křivosti konexe Γ, lze vyslovit větu, jejíž důkaz, spočívající v delších výpočtech, opět vynecháváme.

Věta 7.1. *Na ploše Q platí*

$$\int_{\mathscr{C}} d\varphi = 2k\pi , \tag{7.4}$$

kde $\mathscr{C}$ je libovolná uzavřená křivka na Q, k celé číslo (závisející ovšem na $\mathscr{C}$). Na ploše $P = Q - Q_1$ platí

$$\begin{aligned} \nabla_i \varphi_j &= 0 , \\ \nabla_i \beta_{jk} &= 0 , \\ R_{[ij]k}^l + h_{[i}^l \alpha_{j]k} &= 0 , \\ \nabla_{[i}\alpha_{j]k} &= 0 , \end{aligned} \tag{7.5}$$

kde hranatou závorkou je vyznačeno alternování (např. $R_{[ij]k}^l = \frac{1}{2}(R_{ijk}^l - R_{jik}^l)$), ∇_i je symbol kovariantní derivace v konexi Γ podle u^i.

8. Na ploše P definujeme dvě funkce $K = -\det \alpha_{ij}/\det \beta_{ij}$, $H = h_i^i$. Funkci K nazveme hlavní křivost plochy P, funkci H translační křivost plochy P. Označíme-li $R_{ij} = R_{ijk}^k$ (Ricciho tensor), platí

$$R_{ij} = -K\varphi_i\varphi_j . \tag{8.1}$$

Význam funkce H je následující: Nechť v okolí U bodu $y \in P$ je sestrojena taková kladná lokální soustava souřadnic, že $\varphi_2 = 0$ a bod y má souřadnice $(0, 0)$. Křivka $\mathscr{C}$ na ploše P daná rovnicemi $u^1 = 0$, $u^2 = t$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ není nic jiného než „řez“ jistého okolí bodu y na ploše eukleidovskou rovinou $N \in l$ (viz odst. 4), procházející realisací bodu y, tj. realisace všech bodů plochy P, ležících na $\mathscr{C}$, leží v N. C je tedy orientovaná křivka orientované eukleidovské roviny a její křivost v bodě y je právě $H(y)$.

Poznámka 1. Ze (7.5) a (8.1) plyne ihned, že plocha P je prostor s ekviafinní konexí Γ a že je příkladem tzv. prostoru S_2, který studoval A. P. NORDEN v [3].

Tento autor dospívá k prostoru S_2 jako k zobecnění variety přímek eukleidovské roviny. My jsme dospěli k prostoru S_2 jiným způsobem. Lze říci, že plocha P v M je prostor S_2, na němž je dáno tensorové pole α_{ij} tak, že platí

$$\beta_{ij} = \alpha_{ji} - \alpha_{ij}$$

a (7.5) (přitom β_{ij} má tentýž význam jako ε_{ij} v [3]).

Poznámka 2. Přímka roviny E_2, obsahující středy polí $\partial\mathscr{P}/\partial u^i$, $i = 1, 2$ (alespoň jeden vždy existuje), jejíž zaměření obsahuje vektor n, je tzv. pólová přímka, hrající důležitou roli v kinematické geometrii.

9. Předpokládejme nyní, že je dána orientovaná souvislá dvoudimensionální diferencovatelná varieta Θ, na níž je definovaná lineární diferenciální forma $d\varphi$ a antisymetrické dvakrát kovariantní tensorové pole β, pro jehož souřadnici β_{12} platí (v kladné lok. soustavě souřadnic) $\beta_{12} \geqq 0$, přičemž

$$(X_u \in T_u(\Theta) \Rightarrow d\varphi(X_u) = 0) \Leftrightarrow u \in \Theta_1 ,$$
$$(X_u, Y_u \in T_u(\Theta) \Rightarrow \beta(X_u \otimes Y_u) = 0) \Leftrightarrow u \in \Theta_1 ,$$

kde $\Theta_1 \subset \Theta$ je isolovaná množina. Předpokládejme dále, že na varietě $\Omega = \Theta - \Theta_1$ je dána afinní konexe Γ a dvakrát kovariantní tensorové pole α, pro jehož souřadnice platí $\beta_{ij} = \alpha_{ji} - \alpha_{ij}$, a že jsou splněny podmínky (7.4) a (7.5), kde nyní ovšem $\mathscr{C}$ znamená libovolnou uzavřenou křivku na Ω.

Ptáme se, zda existuje $f : \Omega \to M$ tak, že $P \sim (\Omega, f)$ je plocha v M a lineární diferenciální forma $d\varphi$ definovaná na P v odst. 6, tensorová pole α, β a afinní konexe Γ, definované v odst. 7 splývají s $d\varphi$, α, β, Γ, které na P přirozeným způsobem přeneseme z Ω. Této otázce jsou věnovány následující odstavce.

10. Nechť Φ_{ux} je zobrazení množiny $(u) \cup (T_u(\Omega) \oplus T_u(\Omega) \otimes T_u(\Omega))$ do $(x) \cup \mathfrak{g}$, $u \in \Omega$, $x \in M$, splňující tyto podmínky

1. $\Phi_{ux}(u) = x$,
2. Φ_{ux} lineárně zobrazuje $T_u(\Omega) \oplus T_u(\Omega) \otimes T_u(\Omega)$ do $\mathfrak{g}$,
3. $t \in T_u(\Omega) \otimes T_u(\Omega) \Rightarrow \Phi_{ux}(t) = v\, \alpha(t)$, kde $v \in \mathfrak{h}$.

Množinu všech těchto zobrazení Φ_{ux} označme B. Dále označme $\pi : B \to \Omega$, $\pi_M : B \to M$ zobrazení, pro něž $\Phi_{ux} \in B \Rightarrow \pi(\Phi_{ux}) = u$, $\pi_M(\Phi_{ux}) = x$ a konečně $F = M \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} - F_1$, kde F_1 je uzavřená podmnožina všech bodů tvaru (x, X_1, X_2, v), takových, že X_1, X_2, v jsou lineárně závislé. Na F operuje zprava grupa $GL(2, R)$ takto:

$$(y = (x, X_1, X_2, v) \in F , \quad A = (A^i_j) \in GL(2, R)) \Rightarrow yA = (x, A^i_1 X_i, A^i_2 X_i, v) .$$

Nechť $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in I$ je otevřené pokrytí variety Ω souřadnicovými okolími, tj. každá U_α je oblastí jisté kladné lokální soustavy souřadnic na Ω. Pro $\Phi_{ux} \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ položme (lokální souřadnice v U_α jsou označeny u^1, u^2):

$$\Psi_{U_\alpha}(\Phi_{ux}) = \left(u, x, \Phi_{ux}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right), \Phi_{ux}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right), v\right),$$

kde $\Phi_{ux}(t) = \alpha(t)\, v$ pro každý $t \in T_u(\Omega) \otimes T_u(\Omega)$. Ψ_{U_α} je zřejmě difeomorfismus $\pi^{-1}(U_\alpha)$ na $U_\alpha \times F$. Množinu všech těchto Ψ_{U_α} označme Ψ.

Je snadno patrné, že na B lze sestrojit strukturu fibrovaného prostoru s basí Ω, projekcí π, standartním fibrem F, grupou struktury $GL(2, R)$ a systémem lokálních difeomorfismů Ψ. Zřejmě $\dim B = 13$.

Označme $\mathscr{B}$ podmnožinu variety B, definovanou takto:

$$\Phi_{ux} \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \beta(X_u \otimes Y_u) = |[\Phi_{ux}(X_u), \Phi_{ux}(Y)]| \\ 2.\ \Phi_{ux}(X_u \otimes Y_u) = \alpha(X_u \otimes Y_u) \dfrac{[\Phi_{ux}(X_u), \Phi_{ux}(Y_u)]}{\beta(X_u \otimes Y_u)} \end{cases}$$

pro každou kladnou basi X_u, Y_u prostoru $T_u(\Omega)$. Ukáže se snadno, že $\mathscr{B}$ je diferencovatelná podvarieta variety B, přičemž $\dim \mathscr{B} = 10$.

11. V každém bodě $(u, x, X_1, X_2, v) \in U_\alpha \times F$ sestrojme dva tečné vektory Z_1, Z_2 variety $U_\alpha \times F$ takto:

$$Z_1 = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, X_1, \Gamma^i_{11} X_i + \alpha_{11} v, \Gamma^i_{12} X_i + \alpha_{12} v, h^i_1 X_i\right),$$

$$Z_2 = \left(\frac{\partial}{\partial u^2}, X_2, \Gamma^i_{21} X_i + \alpha_{21} v, \Gamma^i_{22} X_i + \alpha_{22} v, h^i_2 X_i\right),$$

kde Γ^i_{jk}, α_{ij} jsou koeficienty konexe Γ a souřadnice tensorového pole α v lokální soustavě souřadnic v U_α; h^i_j je definováno vzorcem (7.2). Vektory Z_1, Z_2 jsou lineárně nezávislé a určují v $U_\alpha \times F$ jistou dvoudimensionální diferencovatelnou distribuci $\bar{\Delta}^\alpha(q \in U_\alpha \times F \Rightarrow \bar{\Delta}^\alpha(q) = \bar{\Delta}^\alpha_q$ kde $(Z_i)_q \in \bar{\Delta}^\alpha_q)$. Definujeme nyní diferencovatelnou dvoudimensionální distribuci Δ^α v $\pi^{-1}(U_\alpha)$ takto: $q' = \Psi^{-1}_{U_\alpha}(q) \in \pi^{-1}(U_\alpha) \Rightarrow \Delta^\alpha_{q'} = (\mathrm{d}\Psi^{-1}_{U_\alpha})_q\, \bar{\Delta}^\alpha_q$ (Δ^α je obraz distribuce $\bar{\Delta}^\alpha$ v zobrazení $\Psi^{-1}_{U_\alpha}$). Přímým výpočtem (který opět pro stručnost vynecháváme) je možno ukázat, že v případě $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ splývají distribuce Δ^α a Δ^β v $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$. Předpisem $\Delta^B = \Delta^\alpha$ v $\pi^{-1}(U_\alpha)$ je tedy na varietě B definovaná dvoudimensionální diferencovatelná distribuce Δ^B. S použitím rovnic (7.5) a odst. 5 se ukáže, že v každém bodě $p \in B$ je prostor Δ^B_p podprostorem tečného prostoru variety $\mathscr{B}$, tedy že Δ^B indukuje na $\mathscr{B}$ jistou dvoudimensionální diferencovatelnou distribuci Δ a že Δ je involutorní.

Uvažujme maximální (orientovanou) integrální varietu $\mathscr{I}$ distribuce Δ, procházející bodem $p \in \mathscr{B}$. Stejně jako v [4] ukážeme, že $\mathscr{I}$ pokrývá Ω (pokrývajícím zobrazením je omezení π na $\mathscr{I}$). Označme $\pi_M/\mathscr{I}$ omezení π_M na $\mathscr{I}$ a položme $P \sim (\mathscr{I}, \pi_M/\mathscr{I})$; P je plocha v M, $\pi_M(p)$ je realisace jednoho jejího bodu.

Dále snadno ukážeme (na základě odst. 5 a konstrukce variety $\mathscr{I}$), že platí: je-li $\pi(p') = \pi(p)$ a $\mathscr{I}'$ je maximální integrální (orientovaná) varieta distribuce Δ, procházející bodem p', pak existuje $s \in S$ tak, že $P' \sim (\mathscr{I}', \pi_M/\mathscr{I}') = (\mathscr{I}, (s \circ \pi_M)/\mathscr{I})$. Označíme-li $sP = (\mathscr{I}, (s \circ \pi_M)/\mathscr{I})$, lze psát $P' = sP$.

Konečně je zřejmé, že (stručně řečeno) afinní konexe Γ, tensorová pole α, β a diferenciální forma $d\varphi$ se přenášejí z Ω přirozeným způsobem na $\mathscr{I}$, tedy na P a že na P splývají s afinní konexí, tensorovými poli a diferenciální formou definovanými na ploše v M v odst. 6 a 7. Můžeme tedy vyslovit následující větu:

Věta 11.1. *Nechť Θ, Ω, $d\varphi$, Γ, α, β splňují předpoklady vyslovené v odst. 9. Pak existuje až na shodnost prostoru M jediná plocha $P \sim (\mathscr{I}, \pi_M/\mathscr{I})$ tak, že $\mathscr{I}$ pokrývá Ω a diferenciální forma $d\varphi$, afinní konexe Γ a tensorová pole α, β, definované na P v odst. 6, 7 splývají se stejně označenou diferenciální formou, afinní konexí a tensorovými poli přenesenými na P z Ω.*

Poznámka. Dá se ukázat, že každému bodu $u \in \Theta_1$ lze přiřadit jedinou $N \in l$ takto: uvažujme posloupnost u_n bodů z Ω takovou, že $u_n \to u$. Nechť p_n je libovolná posloupnost bodů z $\mathscr{I}$ taková, že $\pi(p_n) = u_n$ a nechť $x_n = \pi_M(p_n)$. Dále nechť $x_n \in$ $\in N_n \in l$. Pak $N_n \to N$.

Literatura

[1] *W. Blaschke:* Ebene Kinematik, Leipzig und Berlin 1938.

[2] *K. Nomizu:* Lie groups and differential geometry. Math. Soc. of Japan, 1956.

[3] *A. P. Norden:* Обобщенная геометрия двумерного линейчатого пространства. Мат. сб. 18, Москва 1946.

[4] *S. Sasaki:* A global formulation of the fundamental theorem of the theory of surfaces in three-dimensional Euclidean space. Nagoya Math. J., *13*, 1958.

Adresa autora: Praha 6 - Dejvice, Technická 1902 (Elektrotechnická fakulta ČVUT).

Zusammenfassung

QUASIELLIPTISCHE THEORIE DER FLÄCHEN

Vladimír Kohout, Praha

Im Artikel sind im quasielliptischen Raum Flächen vom Gesichtspunkt der ebenen kinematischen Geometrie d. h. Zweiparameterbewegungen untersucht. Zum Schluss wird ein globaler Existenzsatz formuliert.