Bohdan Zelinka

Nevlastní uzly grafu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 2, 155--169

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108357`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

NEVLASTNÍ UZLY GRAFU

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 20. května 1968)

R. HALIN v [2] zavádí pojem konce grafu. V této práci se jistý druh těchto konců, tak zvané volné konce, uvažuje jako „nevlastní uzly" grafu a dokazují se pro tyto „nevlastní uzly" některá tvrzení týkající se souvislosti, známá pro uzly grafu v obvyklém smyslu.

Uveďme nejprve některé pojmy definované R. Halinem. Zbytkem jednosměrně nekonečné cesty V nazýváme její podgraf, který je sám jednosměrně nekonečnou cestou. Říkáme, že jednosměrně nekonečná cesta V má stále (immer wieder) určitou vlastnost, má-li tuto vlastnost každý její zbytek. Mějme nyní nekonečný neorientovaný graf a v něm dvě jednosměrně nekonečné cesty V_1 a V_2. Říkáme, že cesty V_1 a V_2 jsou ekvivalentní, existuje-li jednosměrně nekonečná cesta W v grafu G (ne nutně různá od V_1 a V_2), která má stále společné uzly s V_1 i s V_2. R. Halin dokazuje, že takto definovaná relace na množině všech jednosměrně nekonečných cest v G je skutečně reflexivní, symetrická a transitivní a název ekvivalence je tedy oprávněný. Třídy této ekvivalence se nazývají konce grafu G. Konec $\mathfrak{E}$ grafu G se nazývá volný, jestliže existuje konečná množina uzlů T v G taková, že odstraněním množiny T a všech hran incidentních s uzly z T vznikne z grafu G graf G', jehož jedna komponenta obsahuje alespoň jednu cestu z $\mathfrak{E}$, ale žádnou jednosměrně nekonečnou cestu nepatřící do $\mathfrak{E}$; říkáme, že množina T odděluje konec $\mathfrak{E}$ od ostatních konců grafu G.

V dalším, pokud to nebude jinak vyznačeno, budeme pod pojmem graf rozumět nekonečný, lokálně konečný neorientovaný graf bez smyček (vícenásobné hrany připouštíme).

Zaveďme si nyní pojem nevlastního uzlu grafu analogicky pojmu nevlastního bodu v geometrii. Budiž $\mathscr{E}$ systém všech volných konců grafu $G(U, H)$ a budiž U^∞ určitá množina prvků stejné mohutnosti jako $\mathscr{E}$; prvky množiny U^∞ budeme nazývat nevlastními uzly grafu G. Uzly grafu G v obvyklém smyslu budeme nazývat vlastními uzly grafu G. Budiž φ vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathscr{E}$ na U^∞. Nechť $\mathfrak{E}_1 \in \mathscr{E}$, $\mathfrak{E}_2 \in \mathscr{E}$ a $\varphi(\mathfrak{E}_1) = u_1^\infty$, $\varphi(\mathfrak{E}_2) = u_2^\infty$. Je-li v vlastní uzel grafu G, pak řekneme, že cesta V_1 spojuje uzly v a u_1^∞ právě tehdy, jestliže cesta V_1 je jednosměrně nekonečná cesta začínající v uzlu v a patřící konci $\mathfrak{E}_1$. O cestě V_2 řekneme, že spojuje uzly u_1^{∞} a u_2^{∞} právě tehdy, je-li cesta V_2 obousměrně nekonečná cesta vzniklá sjednocením dvou jednosměrně nekonečných cest V_2' a V_2'', které mají společný počáteční uzel a kromě něho žádný další uzel a $V_2' \in \mathfrak{E}_1$, $V_2'' \in \mathfrak{E}_2$. Dále budeme značit $\overline{U} = U \cup U^{\infty}$ a budeme tuto množinu nazývat rozšířenou množinou uzlů grafu G.

Dokážeme v dalším, že známé věty týkající se souvislosti platí pro nevlastní uzly grafu stejně jako pro vlastní. Nejprve ocitujeme jednu větu z [1].

Budiž G lokálně konečný graf, a libovolný uzel z G. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) *Existuje n (jednosměrně) nekonečných cest disjunktních až na a v G, které vycházejí z a.*

(2) *Odstraníme-li z G libovolných $n - 1$ uzlů různých od a, existuje ve vzniklém grafu vždy alespoň jedna (jednosměrně) nekonečná cesta začínající v a.*

(3) *Odstraníme-li z G libovolných $n - 1$ uzlů různých od a, leží a stále v nekonečné komponentě vzniklého grafu.*

Této věty budeme v dalším používat.

Jsou známy definice uzlového a hranového stupně souvislosti. Vyslovíme je zde nejprve pro vlastní uzly a budeme je definovat pouze pro dvojice různých uzlů a uzlový stupeň souvislosti dokonce pouze pro dvojice uzlů nespojených hranou. Tyto pojmy lze ovšem dodefinovat i pro zbývající dvojice, zde však toho nebude vcelku zapotřebí.

Jsou-li u, v dva různé uzly grafu G nespojené hranou, pak uzlový stupeň souvislosti uzlů u a v v grafu G je takové celé nezáporné číslo $\omega_G(u, v)$, že existuje podmnožina T množiny uzlů U grafu G, která má mohutnost $\omega_G(u, v)$ a v grafu vzniklém z G odstraněním množiny T a všech hran incidentních s uzly z T jsou uzly u a v v různých komponentách; přitom žádná podmnožina T' množiny U mohutnosti menší než $\omega_G(u, v)$ tuto vlastnost nemá.

Jsou-li u, v dva různé uzly grafu G, pak hranový stupeň souvislosti uzlů u a v v grafu G je takové celé nezáporné číslo $\sigma_G(u, v)$, že existuje podmnožina R množiny hran H grafu G, která má mohutnost $\sigma_G(u, v)$ a v grafu vzniklém z G odstraněním množiny R jsou uzly u a v v různých komponentách, přičemž žádná podmnožina R' množiny H mohutnosti menší než $\sigma_G(u, v)$ tuto vlastnost nemá.

Uzlovým stupněm souvislosti grafu G nazýváme takové celé nezáporné číslo $\omega(G)$, že existuje podmnožina T množiny uzlů U grafu G, která má mohutnost $\omega(G)$ a graf vzniklý z G odstraněním množiny T je nesouvislý, přičemž žádná podmnožina množiny U mohutnosti menší než $\omega(G)$ tuto vlastnost nemá.

Hranovým stupněm souvislosti grafu G nazýváme takové celé nezáporné číslo $\sigma(G)$, že existuje podmnožina R množiny hran H grafu G, která má mohutnost $\sigma(G)$ a graf vzniklý z G odstraněním množiny R je nesouvislý, přičemž žádná podmnožina R' množiny H mohutnosti menší než $\sigma(G)$ tuto vlastnost nemá.

Uzlovým řezem grafu G oddělujícím uzly u a v (které jsou navzájem různé a nejsou spojeny hranou) nazýváme podmnožinu T množiny uzlů U, jejímž odstraněním vznikne graf, v němž uzly u a v jsou v různých komponentách, přičemž žádná vlastní podmnožina množiny T tuto vlastnost nemá.

Hranovým řezem grafu G oddělujícím uzly u a v (navzájem různé) nazýváme podmnožinu R množiny hran H, jejímž odstraněním vznikne graf, v němž uzly u a v jsou v různých komponentách, přičemž žádná vlastní podmnožina množiny R tuto vlastnost nemá.

Tyto definice můžeme rozšířit i na nevlastní uzly. Je-li $u^\infty \in U^\infty$, $v \in U$, pak uzlový stupeň souvislosti uzlů u^∞, v v grafu G je takové nezáporné celé číslo $\omega_G(u^\infty, v)$, že existuje podmnožina T množiny U, která má mohutnost $\omega_G(u^\infty, v)$ a v grafu vzniklém odstraněním množiny T a všech hran incidentních s uzly z T existuje komponenta obsahující uzel v a neobsahující žádnou cestu náležející konci $\mathfrak{E} = \varphi^{-1}(u^\infty)$ grafu G, přičemž žádná podmnožina množiny U mohutnosti menší než $\omega_G(u^\infty, v)$ tuto vlastnost nemá. Je-li $u \in U$, $v^\infty \in U^\infty$, je $\omega_G(u, v^\infty) = \omega_G(v^\infty, u)$. Je-li $u^\infty \in U^\infty$, $v^\infty \in U^\infty$, pak uzlový stupeň souvislosti uzlů u^∞ a v^∞ v grafu G je takové nezáporné celé číslo $\omega_G(u^\infty, v^\infty)$, že existuje podmnožina T množiny U uzlů grafu G, která má mohutnost $\omega_G(u^\infty, v^\infty)$ a v grafu vzniklém odstraněním množiny T a všech hran incidentních s uzly z T existuje komponenta obsahující alespoň jednu cestu z $\varphi^{-1}(u^\infty) = \mathfrak{E}_1$ a neobsahující žádnou cestu z $\varphi^{-1}(v^\infty) = \mathfrak{E}_2$, přičemž žádná podmnožina množiny U mohutnosti menší než $\omega_G(u^\infty, v^\infty)$ tuto vlastnost nemá.

Dále je-li $u^\infty \in U^\infty$, $v \in U$, pak hranový stupeň souvislosti uzlů u^∞, v v grafu G je takové nezáporné celé číslo $\sigma_G(u^\infty, v)$, že existuje podmnožina R množiny H, která má mohutnost $\sigma_G(u^\infty, v)$ a v grafu vzniklém z G odstraněním množiny R existuje komponenta obsahující uzel v a neobsahující žádnou cestu náležející konci $\mathfrak{E}_1 = \varphi^{-1}(u^\infty)$ grafu G, přičemž žádná podmnožina množiny H mohutnosti menší než $\sigma_G(u^\infty, v)$ tuto vlastnost nemá. Je-li $u \in U$, $v^\infty \in U^\infty$, je $\sigma_G(u, v^\infty) = \sigma_G(v^\infty, u)$. Je-li $u^\infty \in U^\infty$, $v^\infty \in U^\infty$, pak hranový stupeň souvislosti uzlů u^∞ a v^∞ v grafu G je takové nezáporné celé číslo $\sigma_G(u^\infty, v^\infty)$, že existuje podmnožina R množiny H hran grafu G, která má mohutnost $\sigma_G(u^\infty, v^\infty)$ a v grafu vzniklém z G odstraněním množiny R existuje komponenta obsahující alespoň jednu cestu z $\mathfrak{E}_1 = \varphi^{-1}(u^\infty)$ a neobsahující žádnou cestu z $\mathfrak{E}_2 = \varphi^{-1}(v^\infty)$, přičemž žádná podmnožina množiny H mohutnosti menší než $\sigma_G(u^\infty, v^\infty)$ tuto vlastnost nemá.

Snadno nahlédneme, že jak uzlový, tak hranový stupeň souvislosti mezi libovolnými dvěma uzly, vlastními nebo nevlastními, definovaný zde jako konečné číslo, vždy existuje. Je-li některý z uzlů u, v vlastní, například u, pak $\omega_G(u, v)$ nemůže být větší než stupeň uzlu u (který je konečný, protože graf G je lokálně konečný), protože odstraněním všech uzlů incidentních s u a všech hran incidetních s těmito uzly z G vznikne graf, v němž u bude isolovaným uzlem a tedy bude tvořit komponentu obsahující u a neobsahující žádný jiný uzel a tedy ani žádnou nekonečnou cestu. Jsou-li oba uzly u, v nevlastní, pak $u = \varphi(\mathfrak{E}_1)$, $v = \varphi(\mathfrak{E}_2)$, kde $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ jsou volné konce grafu G; podle předpokladu $\mathfrak{E}_1 \neq \mathfrak{E}_2$. Protože $\mathfrak{E}_1$ je volný konec, existuje konečná množina uzlů $T \subset U$ taková, že v grafu vzniklém z G odstraněním množiny T a všech hran incidentních s uzly z T existuje komponenta obsahující alespoň jednu cestu z $\mathfrak{C}_1$ a neobsahující žádnou cestu z jiného konce než $\mathfrak{C}_1$, tedy ani z konce $\mathfrak{C}_2$. Stupeň souvislosti $\omega_G(u, v)$ musí být menší nebo roven mohutnosti této množiny T a je tedy také konečný. Dále je zřejmé, že po odstranění konečného počtu uzlů (a hran incidentních s těmito uzly) z grafu G neexistují dvě různé komponenty, které by obsahovaly cesty z téhož konce $\mathfrak{C}$. Je-li totiž $V_1 \in \mathfrak{C}$, $V_2 \in \mathfrak{C}$, obě cesty V_1, V_2 jsou v grafu vzniklém odstraněním T z G, pak podle definice existuje jednosměrně nekonečná cesta W, která má stále s oběma cestami V_1 a V_2 společné uzly. Pouze konečný počet uzlů cesty W může náležet do T a tedy v grafu vzniklém odstraněním množiny T bude vždy existovat zbytek cesty W, který bude mít stále s cestami V_1 a V_2 společné uzly, tudíž V_1 a V_2 budou náležet téže komponentě.

Ještě definujme uzlový stupeň nevlastního uzlu. Budiž $u^\infty \in U^\infty$, $u^\infty = \varphi(\mathfrak{C})$, kde $\mathfrak{C}$ je volný konec grafu G. Budiž T_0 uzlový řez grafu G oddělující $\mathfrak{C}$ od ostatních konců grafu G, budiž G_1 ta komponenta grafu vzniklého z G odstraněním řezu T_0, která obsahuje alespoň jednu cestu z $\mathfrak{C}$. Pro každé přirozené číslo n označme G_n podgraf grafu G_1 vytvořenými všemi uzly x takovými, že $\min_{y \in T_0} \delta(x, y) \geqq n$ kde $\delta(x, y)$ je vzdálenost uzlů x a y v G. Zřejmě všechny G_n jsou neprázdné. Graf G_1 totiž obsahuje alespoň jednu nekonečnou cestu, tedy obsahuje nekonečně mnoho uzlů. Protože G je lokálně konečný, je počet uzlů majících vzdálenost od daného uzlu menší než dané číslo vždy konečný. Protože T_0 je konečná množina, je také počet uzlů z G_1 nepatřících do G_n konečný, tedy G_n je neprázdný a lze snadno dokázat, že obsahuje alespoň jednu cestu z $\mathfrak{C}$ pro každé n. Nyní pro každé přirozené číslo n sestrojme graf $\tilde{G}_n$ tak, že ke grafu G_n přidáme uzel a_n nepatřící do G_n a spojíme jej se všemi uzly grafu G_n, které jsou v G spojeny s uzly nepatřícími do G_n. Zkoumejme nyní posloupnost čísel $\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty)$ pro všechna přirozená n. Mějme $m < n$. Pak zřejmě G_n je podgrafem G_m. V grafu $\tilde{G}_n$ existuje uzlový řez T mohutnosti $\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty)$ oddělující a_n od u^∞; uzly tohoto řezu jsou ovšem různé od a_n a leží tedy i v G_n. Každé cestě V v G patřící do $\mathfrak{C}$ a vycházející z nějakého uzlu nepatřícího do G_n odpovídá jednoznačně cesta V' v $\tilde{G}_n$ patřící do $\mathfrak{C}$, vycházející z a_n a taková, že její zbytek vzniklý odstraněním uzlu a_n a hrany s ním incidentní je totožný s určitým zbytkem cesty V. Poněvadž odstraněním řezu T z $\tilde{G}_n$ se zruší všechny nekonečné cesty vycházející z a_n a patřící do $\mathfrak{C}$, zruší se i všechny cesty v G (tedy i v grafu G_m, který je podgrafem grafu G) vycházející z uzlů nepatřících do G_n a patřící do $\mathfrak{C}$. Uzly spojené s a_m v $\tilde{G}_m$ nepatří do G_n. Je-li totiž x takový uzel, je x spojen v G s uzlem nepatřícím do G_m, tedy buď s uzlem z T, nebo s uzlem z grafu G, pro nějž $\min_{y \in T_0} \delta(y, z) < m$ (s uzlem nepatřícím do T ani do G_1 nemůže být spojen, protože graf G_1 by pak nebyl komponentou grafu G'). Pak ovšem $\delta(y, x) \leqq \delta(y, z) + 1$ pro všechna $y \in T$ a tedy $\min_{y \in T} \delta(x, y) \leqq$ $\leqq \min_{y \in T} \delta(y, z) + 1 < m + 1 \leqq n$, tedy x nepatří do G_n. Odstraníme-li tedy z $\tilde{G}_m$ uzel a_m a hrany s ním incidentní, vznikne z $\tilde{G}_m$ graf G_m a z každé cesty (jednosměrně nekonečné) v $\tilde{G}_m$ vycházející z a_n a patřící do $\mathfrak{E}$ cesta v G_m vycházející z uzlu nepatřícího do G_n a patřící do $\mathfrak{E}$. Všechny tyto cesty jsou zrušeny odstraněním řezu T (protože jsou zrušeny určité jejich zbytky) a tedy i cesty vycházející z a_m a patřící do $\mathfrak{E}$ jsou zrušeny odstraněním řezu T z grafu $\tilde{G}_m$. Z toho plyne $\omega_{\tilde{G}_m}(a_m, u^\infty) \leqq \omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty)$ a posloupnost $\{\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy neklesající. Poněvadž jde o celočíselnou posloupnost, je buď $\lim_{n\to\infty} \omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty) = \infty$, nebo $\lim_{n\to\infty} \omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty) = k$, kde k je určité přirozené číslo; to nastane tehdy, jestliže existuje N takové, že pro $n > N$ je $\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty) = k$. Označme $\varrho_G(u^\infty) = \lim_{n\to\infty} \omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty)$ a nazývejme toto číslo (respektive symbol ∞) uzlovým stupněm uzlu u^∞ v grafu G.

Dokážeme dvě věty; z nich potom vyplyne nezávislost hodnoty $\varrho_G(u^\infty)$ na volbě řezu T_0.

Věta 1. *Budiž u^∞ nevlastní uzel lokálně konečného grafu G odpovídající volnému konci $\mathfrak{E}$ tohoto grafu. Budiž $\varrho_G(u^\infty)$ konečné číslo. Pak v G existuje systém $\varrho_G(u^\infty)$ cest z $\mathfrak{E}$, z nichž žádné dvě nemají společný vlastní uzel, a neexistuje takový systém o více než $\varrho_G(u^\infty)$ cestách.*

Důkaz. Jak bylo uvedeno výše, existuje přirozené číslo N takové, že pro všechna $n > N$ je $\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty) = \varrho_G(u^\infty)$. Vezměme tedy $n > N$ a uvažujme graf $\tilde{G}_n$. V grafu vzniklém z $\tilde{G}_n$ odstraněním libovolných $\varrho_G(u^\infty) - 1$ uzlů musí existovat alespoň jedna cesta z a_n do u^∞, tedy jednosměrně nekonečná cesta vycházející z a_n. Podle Halinovy citované věty v $\tilde{G}_n$ existuje $\varrho_G(u^\infty)$ jednosměrně nekonečných cest vycházejících z a_n nemajících společné uzly kromě a_n. Po odstranění uzlu a_n z $\tilde{G}_n$ vzniknou z těchto cest jednosměrně nekonečné cesty, z nichž žádné dvě nemají společný uzel. Všechny tyto cesty patří do $\mathfrak{E}$, neboť leží v G_1 a graf G_1 neobsahuje žádnou jednosměrně nekonečnou cestu nepatřící do $\mathfrak{E}$.

Předpokládejme nyní, že existuje systém $\mathscr{S}'$ složený z $\varrho_G(u^\infty) + 1$ takovýchto cest. Je-li V cesta z tohoto systému, označme $\alpha(V)$ takové přirozené číslo, že počáteční uzel cesty V patří do $G_{\alpha(V)}$ a nepatří do $G_{\alpha(V)+1}$. Zvolme nyní n větší než maximum $\alpha(V)$ přes všechny cesty V ze systému $\mathscr{S}'$ a uvažujme $\tilde{G}_n$. Každá cesta z $\mathscr{S}'$ má určitý zbytek obsažený v G_n, jehož počáteční uzel je jeden z uzlů spojených v G s uzlem nepatřícím do G_n a tedy je v $\tilde{G}_n$ spojen s a_n. Z toho vyplývá, že v $\tilde{G}_n$ existuje $\varrho(u^\infty) + 1$ jednosměrně nekonečných cest vycházejících z a_n a patřících do $\mathfrak{E}$, které nemají společné uzly kromě a_n. K jejich zrušení je třeba odstranit nejméně $\varrho_G(u^\infty) + 1$ uzlů, tedy $\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty) \geqq \varrho_G(u^\infty) + 1$, což je spor.

Věta 2. *Budiž u^∞ nevlastní uzel lokálně konečného grafu G odpovídající volnému konci $\mathfrak{E}$ tohoto grafu. Budiž $\varrho_G(u^\infty) = \infty$. Pak pro každé přirozené k v G existuje systém k cest z $\mathfrak{E}$, z nichž žádné dvě nemají společný vlastní uzel.*

Důkaz je analogický důkazu věty 1.

Důsledek. *Stupeň nevlastního uzlu $\varrho_G(u^\infty)$ nezávisí na volbě řezu T_0 z jeho definice.*

Důkaz. Je-li $\varrho_G(u^\infty)$ konečný, pak podle věty 1 je roven maximálnímu možnému počtu uzlově disjunktních cest patřících do $\mathfrak{E}$; tento počet je v tomto případě konečný a nezávisí ovšem na volbě T_0. Rovnost $\varrho_G(u^\infty) = \infty$ podle věty 2 platí právě tehdy, existují-li systémy uzlově disjunktních cest o libovolném konečném počtu prvků; tento fakt samozřejmě také nezávisí na volbě T_0.

Věta 3. *Buďtež u, v dva uzly lokálně konečného grafu G, vlastní nebo nevlastní. Nutnou a postačující podmínkou, aby platilo $\omega_G(u, v) = n$, kde n je celé nezáporné číslo, je, aby maximální mohutnost systému cest z u do v, které nemají kromě u a v společné uzly, byla rovna n.*

Důkaz. Jsou-li u a v vlastní uzly grafu G, jde o Mengerovu větu zobecněnou P. Erdösem na nekonečné grafy [4]. Nechť tedy je $u \in U^\infty$, $v \in U$. Je tedy $u = \varphi(\mathfrak{E})$, kde $\mathfrak{E}$ je volný konec grafu G. Předpokládejme nejprve, že existuje množina T mohutnosti $\omega_G(u, v)$, která odděluje $\mathfrak{E}$ od v i od ostatních konců grafu G. Budiž H graf vzniklý z G odstraněním množiny T a hran incidentních s uzly této množiny, budiž H_1 jeho komponenta, která obsahuje alespoň jednu cestu z $\mathfrak{E}$ a neobsahuje žádnou cestu z jiného konce než $\mathfrak{E}$. Budiž H_2 graf vzniklý z G odstraněním všech uzlů komponenty H_1 a hran incidentních s těmito uzly. Graf $\tilde{H}_2$ sestrojíme tak, že ke grafu H_2 přidáme uzel a a spojíme jej se všemi uzly z T. Každé cestě V z v do u (nekonečné) v G je tedy jednoznačně přiřazena (konečná) cesta V' z v do a v $\tilde{H}_2$, která se skládá z úseku cesty V z v do prvního uzlu z T obsaženého ve V a z hrany spojující tento uzel s a. Existuje řez T' v $\tilde{H}_2$ obsahující $\omega_{\tilde{H}_2}(a, v)$ uzlů různých od a, jehož odstraněním se zruší všechny cesty z v do a v $\tilde{H}_2$; tím se ovšem zruší i všechny úseky cest vycházejících z v a patřících do $\mathfrak{E}$, které spojují v s některým uzlem z T, tudíž všechny cesty z v do u a je $\omega_G(u, v) \leqq \omega_{\tilde{H}_2}(a, v)$. Protože však řez T odděluje a od v, je právě $\omega_G(u, v) = \omega_{\tilde{H}_2}(a, v)$. Podle Mengerovy věty existuje v $\tilde{H}_2$ systém cest $\mathscr{S}_0$ z v do a mohutnosti $\omega_G(u, v)$, z nichž žádné dvě nemají společný uzel kromě v a a. Odstraněním uzlu a z $\tilde{H}_2$ dostaneme $\omega_G(u, v)$ cest z v do uzlů z T, z nichž žádné dvě nemají společný uzel kromě v. Každý uzel z T je zřejmě koncovým uzlem právě jedné z nich. Nyní označíme H_3 podgraf grafu G vzniklý odstraněním uzlů všech komponent různých od H_1 a hran s nimi incidentních. Graf $\tilde{H}_3$ z něho sestrojíme tak, že přidáme k H_3 uzel b (nepatřící do H_3) a spojíme jej se všemi uzly z H_3. Snadno dokážeme (analogicky předchozím úvahám), že po odstranění libovolných $\omega_G(u,v) - 1$ uzlů z H_3 bude existovat alespoň jedna cesta z b do u (v opačném případě by neexistovala ani v G cesta z v do u) a tedy existuje $\omega_G(u, v)$ jednosměrně nekonečných cest v $\tilde{H}_3$ vycházejících z b; tyto cesty patří do $\mathfrak{E}$, protože jiné nekonečné cesty se v $\tilde{H}_3$ nevyskytují; tedy spojují b s u. Odstraněním uzlu b vzniknou z těchto cest cesty spojující uzel z T s uzlem u; žádné dvě z těchto cest nemají společný vlastní uzel. Každý uzel z T je zřejmě počátečním uzlem právě jedné z nich, systém těchto cest označme $\mathscr{S}''$. Nyní vezměme systém $\mathscr{S}$ cest z v do u, z nichž každá je sjednocením cesty z $\mathscr{S}'$ s cestou z $\mathscr{S}''$, která s ní má společný uzel z T; tento systém zřejmě je hledaným systémem.

Nyní předpokládejme, že všechny uzlové řezy oddělující $\mathfrak{E}$ od ostatních konců grafu G mají větší mohutnost než $\omega_G(u, v)$. Zvolme tedy uzlový řez T oddělující u od v minimální možné mohutnosti, tedy $\omega_G(u, v)$; graf vzniklý z G odstraněním T označme G'. Komponenta grafu G' obsahující cesty patřící do $\mathfrak{E}$ obsahuje tedy také některé cesty nepatřící do $\mathfrak{E}$. Budiž nyní T' množina uzlů minimální mohutnosti oddělující v G konec $\mathfrak{E}$ od ostatních konců; její mohutnost budiž t'; zřejmě $t' > \omega_G(u, v)$. Množina T' zřejmě odděluje u a v v grafu G. Budiž H'_1 podgraf grafu G vytvořený všemi uzly grafu G s výjimkou uzlů komponenty grafu vzniklého z G odstraněním T', která obsahuje cesty z $\mathfrak{E}$. Budiž $\tilde{H}'_1$ graf vzniklý tím, že k H'_1 přidáme uzel a nepatřící do H'_1 a spojíme jej se všemi uzly množiny T'. Podobně jako v prvním případě bychom dokázali, že T je minimální uzlový řez oddělující v a a v $\tilde{H}_1$ a tedy $\omega_{\tilde{H}_1}(a, v) = \omega_G(u, v)$. Existuje tedy systém $\omega_G(u, v)$ cest z v do a, z nichž žádné dvě nemají společné uzly kromě v a a. Odstraněním uzlu a dostaneme z nich systém $\omega_G(u, v)$ cest $\mathscr{S}'$ z v do uzlů množiny T', z nichž žádné dvě nemají společný uzel kromě v. Každý uzel množiny T' je zřejmě koncovým uzlem nejvýše jedné z těchto cest. Dále označme H_2 podgraf grafu G vytvořený uzly množiny T' a komponenty grafu vzniklého z G odstraněním množiny T', která obsahuje alespoň jednu cestu z $\mathfrak{E}$. Graf $\tilde{H}_2$ vznikne přidáním uzlu b ke grafu H_2 a jeho spojením se všemi uzly množiny T'. Opět analogicky výše uvedenému dokážeme, že $\omega_{\tilde{H}_2}(b, u) = t'$ (vzhledem k minimálnosti množiny T'). Po odstranění libovolných $t' - 1$ uzlů z $\tilde{H}_2$ tedy bude vždy existovat nekonečná cesta vycházející z a; tudíž existuje t' jednosměrně nekonečných cest vycházejících z a v $\tilde{H}_2$, z nichž žádné dvě nemají společný vlastní uzel kromě a. Odstraněním uzlu a dostaneme t' jednosměrně nekonečných cest v H_2 vycházejících z uzlů množiny T' a nemajících společné vlastní uzly; každý uzel množiny T' je zřejmě počátečním uzlem právě jedné z nich; systém těchto cest označíme $\mathscr{S}''$. Sjednotíme-li nyní každou cestu V_1 z $\mathscr{S}'$ s cestou V_2 z $\mathscr{S}''$ takovou, že její počáteční uzel splývá s koncovým uzlem cesty V_1 různým od v (tedy v T'), dostaneme $\omega_G(u, v)$ hledaných cest.

Pro případ $u \in U^\infty$, $v \in U^\infty$ je důkaz analogický. Tam, kde se v předešlém případě užívalo Mengerovy věty pro vlastní uzly, použije se výsledku předešlého případu pro jeden uzel vlastní a druhý nevlastní.

Nyní podobně jako jsme sestrojovali grafy $\tilde{G}_n$ při definici uzlového stupně nevlastního uzlu, budeme sestrojovat pro určitý nevlastní uzel u^∞ grafy G_n^0. Budiž opět zvolen určitý řez T oddělující konec $\mathfrak{E} = \varphi^{-1}(u^\infty)$ od ostatních konců grafu G a budiž graf G_n definován stejně jako v definici uzlového stupně nevlastního uzlu u^∞. Nyní G_n^0 budiž podgraf grafu G vytvořený sjednocením množiny uzlů grafu G nepatřících do G_n s množinou T. Graf $\tilde{G}_n^0$ vznikne z grafu G_n^0 přidáním uzlu b_n a spojením tohoto uzlu se všemi uzly množiny T. Dokážeme větu.

Věta 4. *Budiž u^∞ nevlastní uzel lokálně konečného grafu G. Buďtež grafy $\tilde{G}_n^0$*

a uzly b_n definovány pro uzel u^∞, jak je uvedeno výše. Budiž v libovolný uzel grafu G, vlastní nebo nevlastní, různý od u^∞. Pak pro dostatečně velká n je v v G_n^0 a

$$\lim_{n \to \infty} \omega_{\tilde{G}_n^0}(v, b_n) = \omega_G(v, u^\infty)\,.$$

Důkaz. Podobně jako jsme dokázali, že posloupnost $\{\omega_{\tilde{G}_n}(a_n, u^\infty)\}_{n=1}^\infty$ je neklesající, dokážeme, že posloupnost $\{\omega_{\tilde{G}_n^0}(v, b_n)\}_{n=1}^\infty$ je nerostoucí. Je-li nyní T' řez minimální mohutnosti, tedy mohutnosti $\omega_G(v, u^\infty)$, oddělující v a u^∞, budiž N přirozené číslo takové, že žádný uzel grafu G_N nepatří do T'. Takové číslo existuje – stačí vzít $N > \max_{x \in T'} \min_{y \in T} \delta(x, y)$. Zřejmě pro všechna $n > N$ množina T' odděluje uzly v a b_n v $\tilde{G}_n^0$, tedy pro tato n platí $\omega_{\tilde{G}_n^0}(v, b_n) < \omega_G(v, u^\infty)$. Tudíž také $\lim_{n \to \infty} \omega_{\tilde{G}_n^0}(v, b_n) \leqq \leqq \omega_G(v, u^\infty)$. Kdyby platila ostrá nerovnost $\lim_{n \to \infty} \omega_{\tilde{G}_n^0}(v, b_n) < \omega_G(v, u^\infty)$, znamenalo by to, že existuje m takové, že $\omega_{\tilde{G}_m^0}(v, b_m) < \omega_G(v, u^\infty)$. Tedy odstraněním méně než $\omega_G(v, u^\infty)$ uzlů z $\tilde{G}_m^0$ by se zrušily všechny cesty z v do b_m a tudíž (což bychom dokázali analogicky předešlým důkazům) také všechny cesty z v do u^∞, čímž bychom dostali spor.

Věta 5. *Budiž $u \in U$, $v^\infty \in U^\infty$. Pak existuje uzel $w \in U$ takový, že*

$$\omega_G(u, w) \leqq \omega_G(u, v^\infty)\,.$$

Důkaz je jednoduchý. Budiž T řez mohutnosti $\omega_G(u, v^\infty)$ oddělující uzly u a v^∞. Budiž G_0 komponenta grafu vzniklého z G odstraněním T, která obsahuje alespoň jednu cestu z $\mathfrak{C} = \varphi^{-1}(u^\infty)$, budiž w libovolný její (vlastní) uzel. Pak T odděluje u a w a tedy $\omega_G(u, w) \leqq \omega_G(u, v^\infty)$.

Důsledek. *Uzlový stupeň souvislosti $\omega(G)$ grafu G je minimum všech $\omega_G(u, v)$, kde $u \in \bar{U}$, $v \in \bar{U}$, $u \neq v$ a u a v nejsou spojeny hranou.*

Důkaz: Je známo, že $\omega(G)$ je minimum všech $\omega_G(u, v)$, kde $u \in U$, $v \in U$ (ovšem pouze v grafu, který není úplný). Je-li nyní $u \in U$, $v \in U^\infty$, pak podle věty 5 existuje uzel $w \in U$ tak, že $\omega_G(u, w) \leqq \omega_G(u, v)$. Protože $u \in U$, $w \in U$, je $\omega_G(u, w) \geqq \omega(G)$ a tedy také $\omega_G(u, v) \geqq \omega(G)$. Podobně bychom dokázali, že $\omega_G(u, v) \geqq \omega(G)$ i v případech $u \in U^\infty$, $v \in U$ a $u \in U^\infty$, $v \in U^\infty$. Minimum $\omega_G(u, v)$ se tedy nezmění, přidáme-li taková $\omega_G(u, v)$, kde některý uzel je nevlastní.

Nyní si všimněme artikulací a členů grafu. Tyto pojmy, jak ukážeme, souvisí těsně s pojmem uzlového stupně nevlastního uzlu.

Věta 6. *Budiž $u^\infty = \varphi(\mathfrak{C})$ nevlastní uzel lokálně konečného grafu G. Je-li $\varrho_G(u^\infty) = = 1$, pak každá cesta z $\mathfrak{C}$ obsahuje nekonečný počet artikulací grafu G. Je-li $\varrho_G(u^\infty) \geqq 2$, pak existuje člen grafu G, který obsahuje zbytky všech cest z $\mathfrak{C}$.*

Důkaz: Budiž $V \in \mathfrak{C}$. Protože počet uzlů z G_1 nepatřících do G_n je pro každé G_n konečný, obsahuje cesta V uzly z G_n pro libovolně velká n (grafy G_n a uzly a_n byly definovány v definici uzlového stupně souvislosti grafu). Předpokládejme, že V obsahuje pouze konečný počet artikulací a existuje tedy N takové, že pro $n > N$ zbytek cesty V ležící v G_n neobsahuje artikulace. Buďtež v_1, v_2 uzly takového zbytku, znamená to, že $\omega_G(v_1, v_2) \geqq 2$, protože v opačném případě by každá cesta spojující v_1 a v_2 musela obsahovat artikulaci (viz [4]). Nechť v_1 leží v G_{m+1} pro nějaké $m \geqq 2$ a v_2 leží v G_l pro $l < m$ a neleží v G_{m+1}. Vezměme nyní graf G_m^0 (vzhledem k témuž u^∞ a T jako grafy G_n); zřejmě uzel v_1 v něm leží, neboť neleží v G_{m+1} a leží v G_1. Uzel v_2 je spojen v G alespoň s jedním uzlem z G_m^0, ovšem se žádným uzlem z G_{m-1}^0. Uzel b_{m-1} je v $\tilde{G}_m^0$ spojen právě se všemi uzly z G_{m-1} nepatřícími do G_{m-2}. Každý řez T', který odděluje v_1 od b_{m-1} v $\tilde{G}_{m-1}^0$, odděluje tedy i v_1 od v_2, tudíž $\omega_G(v_1, v_2) \leqq \omega_{\tilde{G}_{m-1}^0}(v_1, b_{m-1})$. Protože $\omega_G(v_1, v_2) \geqq 2$, je také $\omega_{\tilde{G}_{m-1}^0}(v_1, b_{m-1}) \geqq 2$. Toto platí zřejmě pro všechna $m > l$ a tedy také $\lim_{m \to \infty} \omega_{\tilde{G}_{m-1}^0}(v_1, b_{m-1}) \geqq 2$; tato limita je ovšem rovna $\omega_G(v_1, u^\infty)$. Existují tedy podle věty 3 dvě cesty z $\mathfrak{C}$, které vycházejí z v_1 a nemají společný vlastní uzel kromě v_1. Vezmeme-li nyní zbytky těchto cest vzniklé odstraněním u_1, dostáváme dvě jednosměrně nekonečné cesty patřící do $\mathfrak{C}$ bez společných vlastních uzlů, tedy $\varrho_G(u^\infty) \geqq 2$. Je-li tedy $\varrho_G(u^\infty) = 1$, musí každá cesta $V \in \mathfrak{C} = \varphi^{-1}(u^\infty)$ obsahovat nekonečné množství artikulací.

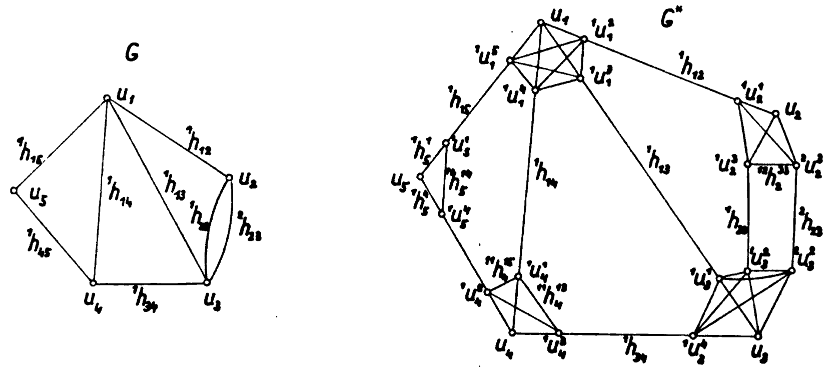
Nechť nyní $\varrho_G(u^\infty) \geqq 2$. Potom existují dvě cesty V_1 a V_2 patřící do $\mathfrak{C}$ bez společných vlastních uzlů. Protože V_1 a V_2 patří do téhož konce $\mathfrak{C}$, existuje cesta W, která má s V_1 a V_2 stále společné uzly. Vezměme úsek W' cesty W spojující uzel v_1' cesty V_1 s uzlem v_2' cesty V_2 a nemající kromě v_1' a v_2' společné uzly s V_1 a V_2. Dále označme V_1', V_2' po řadě zbytky cest V_1, V_2 jejichž počáteční uzly jsou po řadě v_1', v_2'. Mějme nyní hranu h_1 cesty V_1' a hranu h_2 cesty V_2'. Budiž V_1'' (resp. V_2'') zbytek cesty V_1' (resp. V_2') neobsahující hranu h_1 (resp. h_2). Cesta W musí mít společné uzly s úseky V_1'', V_2'' a tedy existuje úsek W'' cesty W spojující uzel v_1'' cesty V_1'' s uzlem v_2'' cesty V_2'' a nemající společné vnitřní uzly s V_1'' a s V_2''. Úseky W', W'', úsek cesty V_1' z v_1' do v_1'' a úsek cesty V_2 z v_1' do v_2'' tvoří dohromady kružnici obsahující hrany h_1, h_2. Je tedy $h_1 \circ h_2$, kde $\circ$ označuje relaci definovanou v [4] na množině hran grafu tak, že dvě hrany jsou v této relaci právě tehdy, jsou-li buď totožné, nebo existuje-li kružnice obsahující obě tyto hrany. Protože h_1 a h_2 jsme volili libovolně, platí $h_1 \circ h_2$ pro každou hranu h_1 z V_1' a každou hranu h_2 z V_2'. Protože tato relace je ekvivalencí, bude platit i $h_1 \circ h_1'$, $h_2 \circ h_2'$ pro libovolné hrany h_1 a h_1' z V_1' a h_2 a h_2' z V_2'. Člen grafu je v [4] definován jako podgraf vytvořený hranami náležejícími jedné třídě této ekvivalence a jejich koncovými uzly. Tedy V_1' a V_2' patří do téhož členu grafu G. Mějme nyní libovolnou cestu $V_3 \in \mathfrak{C}$. Existuje cesta W_1, která má s cestami V_1', V_3 stále společné uzly. Budiž W_1' úsek cesty W_1 spojující uzel v_1''' z V_1' s uzlem v_3 z V_3 a nemající kromě v_1''' společný uzel s V_1' a kromě v_3 společný uzel s V_3 (tento úsek se na rozdíl do případu cest V_1, V_2 může skládat i z jediného uzlu – společného uzlu cest V_1', V_3). Buďtež po řadě V_3', V_1''' zbytky cest V_3, V_1', jejichž počáteční uzly jsou po řadě v_3, v_1'''. Budiž h_3 libovolná hrana cesty V_3 a budiž V_3'' zbytek cesty V_3', jehož počáteční hranou je h_3. Jestliže V_3'' a V_1''' nemají společné uzly, dokážeme podobně jako pro V_1' a V_2', že pro libovolnou hranu h' cesty V_1''' platí $h' \circ h_3$. Jestliže V_3'' a V_1''' mají společné uzly, budiž x první uzel cesty V_3'' různý od jejího počátečního uzlu, který patří rovněž cestě V_1''' (první ve smyslu uspořádání uzlů cesty V_3'' podle vzdálenosti od počátečního uzlu této cesty brané po této cestě). Uzel x je různý od v_1''', protože jinak by úsek W_1' měl dva společné uzly s cestou V_3 – uzly v_3 a x ($v_3 \neq x$, protože x patří zbytku V_3'' cesty V_3' a není jeho počátečním uzlem). Vezměme tedy úsek W_1, úsek cesty V_3' z v_3 do x a úsek cesty V_1''' z v_1''' do x. Tyto úseky tvoří kružnici, která obsahuje hranu h_3 a nějakou hranu h_4 cesty V_1''' a tedy i cesty V_1'. Je tedy $h_3 \circ h_4$, kde h_4 patří do V_1' a tedy hrana h_3 (která je libovolně zvolenou hranou cesty V_3') patří do téhož členu jako hrany cesty V_1' a V_2' (protože $\circ$ je ekvivalence).

Budeme tedy říkat, že nevlastní uzel u^∞ patří do členu M grafu G právě tehdy, jestliže každá cesta konce $\mathfrak{E} = \varphi^{-1}(u^\infty)$ má zbytek v M. Je-li $\varrho_G(u^\infty) = 1$, pak říkáme, že u^∞ tvoří sám člen o jediném uzlu. Zřejmě platí další věta.

Věta 7. *Buďtež u, v dva uzly souvislého lokálně konečného grafu G, vlastní nebo nevlastní, $u \neq v$. Uzly u, v patří témuž členu M grafu G právě tehdy, je-li $\omega_G(u, v) \geqq 2$, anebo jsou spojeny hranou.*

Důkaz. Jsou-li u, v vlastní, jde o známé tvrzení. Nechť tedy $v \in U^\infty$, $v \in U$. Je-li $\omega_G(u, v) \geqq 2$, znamená to, že existují dvě cesty V_1, V_2 z v do u, které nemají společné vlastní uzly kromě v. Je-li h_1 hrana cesty V_1 a h_2 hrana cesty V_2, buďtež V_1', V_2' po řadě zbytky cest V_1, V_2 neobsahující po řadě hrany h_1, h_2. Protože V_1 a V_2 patří témuž konci grafu G, existuje cesta W, která má stále s cestami V_1 a V_2 společné uzly. Budiž tedy W_1 úsek cesty W spojující uzel w_1 cesty V_1' s uzlem w_2 cesty V_2' a nemající kromě w_1 a w_2 společné uzly s V_1', V_2'. Pak úsek W_1, úsek cesty V_1 z v do w_1 a úsek cesty V_2 z v do w_2 tvoří kružnici obsahující h_1 a h_2. Tedy cesty V_1 a V_2 náležejí celé do jednoho členu M grafu G, a podle věty 6 a po ní vyslovené definice u patří též do členu M. Je-li nyní $\omega_G(u, v) = 1$, pak buď $\varrho_G(u) = 1$, nebo $\varrho_G(u) \geqq 2$. V prvním případě u tvoří člen o jediném uzlu, tedy v do tohoto členu nepatří, poněvadž $v \neq u$. V druhém případě existuje uzel a oddělující v od u (artikulace), tedy od zbytku některé cesty patřící do $\mathfrak{E}$. Tento zbytek a s ním uzel u leží tedy v jiném členu než uzel v. V případě $u \in U^\infty$, $v \in U^\infty$ je důkaz analogický.

Nyní budeme zkoumat otázky týkající se hranového stupně souvislosti. K tomuto účelu budeme nejprve definovat určitý speciální graf přiřazený danému grafu. Buďtež u_i $(i \in I)$ uzly grafu G (vlastní), množinu těchto uzlů označme U. Buďtež ${}^\alpha h_{ij}$ $(\alpha \in K)$ hrany spojující uzly u_i, u_j $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j)$, pokud existují. Graf G^* obsahuje všechny uzly i hrany grafu G, graf G však není podgrafem grafu G^* (není zachována incidence uzlů a hran). Existuje-li v G hrana ${}^\alpha h_{ij}$ spojující uzly u_i, u_j, existují v G^* uzly ${}^\alpha u_j^i$, ${}^\alpha u_i^j$ (neobsažené v G) a hrany ${}^\alpha h_j^i$, ${}^\alpha h_i^j$ (neobsažené v množině H hran grafu G) tak, že ${}^\alpha h_j^i$ spojuje u_i, ${}^\alpha u_j^i$, ${}^\alpha h_i^j$ spojuje u_j, ${}^\alpha u_i^j$, ${}^\alpha h_{ij}$ spojuje ${}^\alpha u_j^i$, ${}^\alpha u_i^j$. Dále je-li uzel u_i v G incidentní s hranami ${}^{\alpha}h_{ij}$, ${}^{\beta}h_{ik}$ $(1 \leqq k \leqq n,\ k \neq i,\ k \neq j)$, pak v G^* existuje hrana ${}^{\alpha\beta}h_i^{jk} \notin H$ a spojuje ${}^{\alpha}u_i^j$, ${}^{\beta}u_i^k$. Přitom je ${}^{\alpha}u_i^j = {}^{\beta}u_k^l$, ${}^{\alpha}h_i^j = {}^{\beta}h_k^l$ právě tehdy, je-li současně $\alpha = \beta$, $i = k$, $j = l$ a ${}^{\alpha\beta}h_i^{jk} = {}^{\gamma\delta}h_l^{mn}$ právě tehdy, je-li současně $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma, \delta\}$, $i = l$, $\{j, k\} = \{m, n\}$ (jakožto neuspořádané dvojice).



Obr. 1.

Příklad grafu G^* přiřazeného grafu G je na obr. 1.

Množinu uzlů, skládající se ze všech uzlů, které mají dole index i, budeme značit U_i. Je zřejmé, identifikujeme-li všechny uzly množiny U_i pro každé i v G^*, dostaneme z grafu G^* graf G.

O grafu G^* platí jedna důležitá věta.

Věta 8. *Nechť $u \in U$, $v \in U$. Pak $\sigma_G(u, v) = \omega_{G^*}(u, v)$.*

Důkaz. Budiž ${}^1x$ uzel grafu G^* a $\{{}^1x\} \neq U_i$ pro žádné i. Budiž ${}^1G^*$ graf vzniklý odstraněním uzlu ${}^1x$ z G^* a budiž ${}^1G$ graf vzniklý z ${}^1G^*$ identifikací uzlů množiny U_i pro každé i. Je ${}^1x \in U_l$ pro určité l. Je-li ${}^1x \in U$, není incidentní s hranou množiny H a ${}^1G = G$. Není-li $x \in U$, pak je ${}^1x$ incidentní právě s jednou hranou ${}^1h$ množiny H a ${}^1G$ je graf vzniklý z G odstraněním právě této hrany ${}^1h$. Množinu skládající se ze všech uzlů množiny U a z koncového uzlu hrany ${}^1h$ různého od ${}^1x$ označme ${}^1U$. Budiž ${}^2x$ uzel grafu ${}^1G^*$, $\{{}^1x, {}^2x\} \neq U_i$ pro žádné i, a ${}^2G^*$ graf vzniklý z ${}^1G^*$ odstraněním uzlu ${}^2x$ a ${}^2G$ graf vzniklý z ${}^2G^*$ identifikací uzlů množiny U_i pro každé i. Je-li ${}^2x \in {}^1U$, pak ${}^2G = {}^1G$, je-li ${}^2x \notin {}^1U$, pak ${}^2x$ je incidentní v ${}^1G$ právě s jednou hranou ${}^2h \in H$ a graf ${}^2G$ vznikne z ${}^1G$ odstraněním právě této hrany ${}^2h$. Analogicky můžeme vzít ${}^2U$, ${}^3x$, ${}^3G$ atd. Docházíme k závěru: odstraníme-li n uzlů z G^* tak, abychom neodstranili všechny uzly některé z množin U_l (podmínka P), dostáváme graf ${}^nG^*$, z něhož identifikací uzlů množiny U_i pro každé i dostaneme graf ${}^nG$, který vznikne z G odstraněním nejvýše n hran. Chceme-li dosáhnout toho, aby uzly u, v v ${}^nG$ spolu nesouvisely, nemusíme porušit podmínku P, protože odstraníme-li všechny uzly kromě u_i z množiny U_i pro některé i, je u_i v ${}^nG^*$ i v ${}^nG$ isolovaným uzlem a nic bychom tedy nezměnili na souvislosti uzlů u, v, kdybychom jej odstranili. Je tedy $\omega_{G^*}(u, v) \geqq \sigma_G(u, v)$. Je-li R hranový řez minimální mohutnosti oddělující u a v v G, pak je hranovým řezem minimální mohutnosti i v G^*. Označme P množinu koncových uzlů hran množiny R, které náležejí téže komponentě grafu vzniklého z G^* odstraněním řezu R. Odstraněním množiny P (je zřejmě $u \notin P$, $v \notin P$) odstraníme současně všechny hrany hranového řezu P, čímž se zruší souvislost uzlů u a v. Je tedy $\omega_{G^*}(u, v) \leqq \sigma_G(u, v)$. Zřejmě tedy platí $\omega_{G^*}(u, v) = \sigma_G(u, v)$.

Zde se mluvilo zatím pouze o vlastních uzlech grafu. Lze však mluvit v souvislosti s grafem G^* i o nevlastních uzlech. Mějme dány dvě jednosměrně nekonečné cesty V_1 a V_2 v grafu G a nechť tyto cesty náležejí témuž konci $\mathfrak{E}$ grafu G. Budiž nyní V_1^* (resp. V_2^*) jednosměrně nekonečná cesta v grafu G^*, jejíž všechny uzly patřící do U jsou právě všechny uzly cesty V_1 (resp. V_2) a vyskytují se po této cestě ve stejném pořadí jako po cestě V_1 (resp. V_2). Snadno bychom dokázali, že cesty V_1^* a V_2^* náležejí témuž konci $\mathfrak{E}^*$ grafu G^*. Je-li v grafu G nevlastní uzel $u^\infty = \varphi(\mathfrak{E})$ (za předpokladu, že konec $\mathfrak{E}$ je volný), pak tentýž uzel u^∞ přiřadíme i konci $\mathfrak{E}^*$ grafu G^* (který bude zřejmě také volný). Pak analogicky větě 8 pro vlastní uzly můžeme dokázat i zobecnění této věty.

Věta 8a. *Nechť $u \in \overline{U}$, $v \in \overline{U}$. Pak $\omega_{G^*}(u, v) = \sigma_G(u, v)$.*

Pomocí grafu G^* teď vyslovíme větu analogickou Mengerově větě pro hranový stupeň souvislosti a pro vlastní a nevlastní uzly. Pro vlastní uzly je tato věta známa, viz např. [3]. Nejprve však vyslovíme lemma.

Lemma. *Budiž G^* graf přiřazený grafu G výše popsaným způsobem. Buďtež u, v uzly grafu G, $u \neq v$. V grafu G existuje k cest z u do v z nichž žádné dvě nemají společné uzly kromě u a v právě tehdy, jestliže v G existuje k cest z u do v, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu.*

(Uzly u a v mohou být ovšem vlastní i nevlastní.)

Důkaz. Nechť v G^* existuje k cest z u do v, z nichž žádné dvě nemají společné uzly kromě u a v. Proveďme identifikaci uzlů množiny U_l pro každé l, čímž z grafu G^* vznikne graf G. Z každé cesty C^* v G^* vznikne cesta C v G, která obsahuje všechny hrany z H, které byly obsaženy v cestě C^* (protože hrany ${}^\gamma h_{mn}$ jsou jediné hrany spojující uzel z U_m s uzlem z U_n v G^*). Nemají-li tedy libovolné dvě cesty v G^* společnou hranu, nemají ji ani cesty z nich vzniklé identifikací uzlů množiny U_l pro každé l. Nechť nyní v G existuje k cest $C_1, \ldots, C_k$ z u do v, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu. Sestrojíme v G^* systém cest $C_1^*, \ldots, C_k^*$ z u do v následujícím způsobem. Cesta C_α^* $(\alpha = 1, \ldots, k)$ obsahuje všechny hrany cesty C_α a také uzly u, v. Obsahuje-li C_α hranu ${}^\beta h_{il}$, znamená to, že cesta C_α^* obsahuje její koncový uzel (v G^*) ${}^\beta u_i^l$. Pak C_α^* obsahuje také hranu ${}^\beta h_i^l$ spojující uzly ${}^\beta u_i$, ${}^\beta u_i^l$. Analogicky pro hranu ${}^\gamma h_{jm}$. Obsahuje-li nyní C_α hrany ${}^\delta h_{np}$, ${}^\varepsilon h_{pq}$ a jejich společný koncový uzel (v G) u_p, obsahuje C_α^* koncový uzel (v G^*) ${}^\delta u_p^n$ hrany ${}^\delta h_{np}$ a koncový uzel ${}^\varepsilon u_p^q$ hrany ${}^\varepsilon h_{pq}$.

Pak obsahuje také hranu ${}^{\delta\varepsilon}h_p^{nq}$ spojující uzly ${}^{\delta}u_p^n$, ${}^{\varepsilon}u_p^q$. Tím je cesta C_α^* určena. Všechny cesty $C_1^*, \ldots, C_\alpha^*$ obsahují pouze koncové uzly v G^* hran z množiny H hran grafu G a uzly u, v. Víme, že s uzlem grafu G^* je incidentní nejvýše jedna hrana z H, proto dvě různé hrany z H nemohou mít v G^* společný koncový uzel. Žádné dvě z cest $C_1^*, \ldots$ $\ldots, C_k^*$ nemají tedy společný uzel kromě u a v. Nemohou mít ani společnou hranu, protože by musely mít společné oba její koncové uzly (z konstrukce je patrno, že každá z cest $C_1^*, \ldots, C_k^*$ obsahuje alespoň dvě hrany).

Pomocí tohoto lemmatu nyní budeme dokazovat větu.

Věta 9. *Pro dva uzly u, v grafu G, vlastní nebo nevlastní, $u \neq v$, je $\sigma_G(u, v) = k$ právě tehdy, existuje-li v G systém k cest z u do v, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a neexistuje takový systém o více než k cestách.*

Důkaz. Přiřaďme grafu G graf G^* výše popsaným způsobem. Je $\sigma_G(u, v) = k$ právě tehdy, je-li $\omega_{G^*}(u, v) = k$ (podle věty 8a). Je $\omega_{G^*}(u, v) = k$ právě tehdy, existuje-li v grafu G^* systém k cest z u do v, z nichž žádné dvě nemají společné uzly kromě u a v (podle věty 3) a neexistuje žádný systém této vlastnosti o více než k uzlech. Toto je však splněno právě tehdy, existuje-li v G systém k cest z u do v, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a neexistuje-li žádný systém této vlastnosti o více než k cestách (podle lemmatu).

Grafy G_n a G_n^0 budou v dalším tytéž jako na začátku článku. Místo grafů $\tilde{G}_n$ a $\tilde{G}_n^0$ budeme používat grafů $\hat{G}_n$ a $\hat{G}_n^0$. Graf $\hat{G}_n$ (resp. $\hat{G}_n^0$) sestrojujeme stejně jako $\tilde{G}_n$ (resp. $\tilde{G}_n^0$), pouze s tou výjimkou, že uzel z G_n (resp. G_n^0) spojený v G s uzlem nepatřícím do G_n (resp. do G_n^0) spojíme s uzlem a_n (resp. b_n) nikoli vždy pouze jednou hranou, ale tolika hranami, kolika je spojen v G s uzly nepatřícími do G_n (resp. do G_n^0). Hranový stupeň $\varrho_G^*(u^\infty)$ nevlastního uzlu u^∞ grafu G definujeme tak, že

$$\varrho_G^*(u^\infty) = \lim_{n \to \infty} \sigma_{\hat{G}_n}(a_n, u^\infty)\,.$$

Nyní podobně jako jsme pomocí grafu G^* odvodili z věty 3 větu 9, odvodíme z výše dokázaných vět pro uzlový stupeň souvislosti věty pro hranový stupeň souvislosti. Uvedeme zde tyto věty bez důkazů, protože metoda důkazu je zcela analogická metodě důkazu věty 9.

Věta 10. *Budiž u^∞ nevlastní uzel lokálně konečného grafu G odpovídající volnému konci $\mathfrak{E}$ tohoto grafu. Budiž $\varrho_G^*(u^\infty)$ konečné číslo. Pak v G existuje systém $\varrho_G^*(u^\infty)$ cest z $\mathfrak{E}$, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, a neexistuje takovýto systém o více než $\varrho_G^*(u^\infty)$ cestách.*

Věta 11. *Budiž u^∞ nevlastní uzel lokálně konečného grafu G odpovídající volnému konci $\mathfrak{E}$ tohoto grafu. Budiž $\varrho_G^*(u^\infty) = \infty$. Pak pro každé přirozené k v G existuje systém k cest z $\mathfrak{E}$, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu.*

Důsledek. *Hranový stupeň nevlastního uzlu* $\varrho_G^*(u^\infty)$ *nezávisí na volbě řezu* T_0 *z jeho definice.*

Věta 12. *Budiž* u^∞ *nevlastní uzel lokálně konečného grafu G. Buďtež grafy* $\hat{G}_n^0$ *a uzly* b_n *definovány pro uzel* u^∞*, jak je uvedeno výše. Budiž v libovolný uzel grafu G, vlastní nebo nevlastní, různý od* u^∞*. Pak pro dostatečně velká n je v v* $\hat{G}_n^0$ *a*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{\hat{G}_n^0}(v, b_n) = \sigma_G(v, u^\infty)\,.$$

Věta 13. *Budiž* $u \in \bar{U}$, $v^\infty \in U^\infty$. *Pak existuje uzel* $w \in U$ *takový, že*

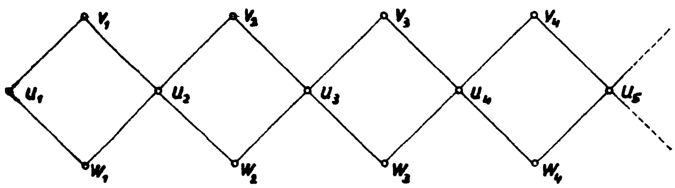
$$\sigma_G(u, w) \leqq \sigma_G(u, v^\infty)\,.$$

Důsledek. *Hranový stupeň souvislosti* $\sigma(G)$ *grafu G je minimum všech* $\sigma_G(u, v)$, *kde* $u \in \bar{U}$, $v \in \bar{U}$, $u \neq v$.

Věta 14. *Budiž* $u^\infty = \varphi(\mathfrak{E})$ *nevlastní uzel lokálně konečného grafu G. Je-li* $\varrho_G^*(u^\infty) = 1$, *pak každá cesta z* $\mathfrak{E}$ *obsahuje nekonečný počet mostů grafu G. Je-li* $\varrho_G^*(u^\infty) \geqq 2$, *pak existuje list grafu G, který obsahuje zbytky všech cest z* $\mathfrak{E}$.

Věta 15. *Buďtež u, v dva uzly souvislého lokálně konečného grafu G, vlastní nebo nevlastní,* $u \neq v$. *Uzly u, v patří témuž listu L grafu G právě tehdy, je-li* $\sigma_G(u, v) \geqq 2$.

(Říkáme opět, že nevlastní uzel u^∞ patří do listu L grafu G právě tehdy, jestliže každá cesta konce $\mathfrak{E} = \varphi^{-1}(u^\infty)$ má zbytek v L. Je-li $\varrho_G^*(u^\infty) = 1$, pak říkáme, že u^∞ tvoří sám list o jediném uzlu.)



Obr. 2.

Hranový stupeň $\varrho_G^*(u^\infty)$ nevlastního uzlu u^∞ nemusí být vždy roven jeho uzlovému stupni $\varrho_G(u^\infty)$. Příkladem je graf na obr. 2, který obsahuje uzly u_i, v_i, w_i pro všechna přirozená i a hrany u_iv_i, u_iw_i, v_iu_{i+1}, w_iu_{i+1} pro všechna přirozená i. Tento graf G má jediný nevlastní uzel u^∞, pro nějž $\varrho_G(u^\infty) = 1$, $\varrho_G^*(u^\infty) = 2$.

Poznámka. Grafu G^* jsem použil (v případě konečného grafu) ve své diplomové práci z roku 1962 (nepublikované). Možnost použití podobného grafu k odvození vět pro hranový stupeň souvislosti z vět pro uzlový stupeň souvislosti mi tehdy naznačil prof. M. FIEDLER, kterému tímto děkuji.

Literatura

[1] *R. Halin:* Über trennende Eckenmengen in Graphen und den Mengerschen Satz. Math. Annalen *157* (1964), 34—41.

[2] *R. Halin:* Über unendliche Wege in Graphen. Math. Annalen 157 (1964), 125—137.

[3] *A. Kotzig:* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov. Bratislava 1956.

[4] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Zusammenfassung

UNEIGENE KNOTENPUNKTE EINES GRAPHEN

BOHDAN ZELINKA, Liberec

In dieser Arbeit werden lokal-endliche Graphen untersucht.

R. Halin definiert die Enden eines Graphen folgendermaßen. Ein Rest eines einseitig unendlichen Weges ist sein Untergraph, der auch ein einseitig unendlicher Weg ist. Wir sagen, daß der einseitig unendliche Weg V eine gewisse Eigenschaft immer wieder hat, wenn alle seine Reste diese Eigenschaft haben. Zwei einseitig unendliche Wege V_1 und V_2 heißen miteinander äquivalent, wenn es einen einseitig unendlichen Weg W gibt, der immer wieder gemeinsame Knotenpunkte mit V_1 und V_2 hat. Jede Klasse der paarweise äquivalenten Wege heisst ein Ende des Graphen. Ein Ende heißt frei, wenn es von einem anderen durch eine endliche Knotenmenge getrennt werden kann.

In diesem Artikel wird jedem freien Ende des Graphen ein sogenannter „uneigener Knotenpunkt“ zugeordnet (als eine Analogie zu den uneigenen Punkten in der Geometrie). Für diese uneigenen Knotenpunkte werden einige Sätze über den Zusammenhang eines Graphen, die für eigene Knotenpunkte bekannt sind, bewiesen.