

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 4, 428

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108332>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÚLOHY A PROBLÉMY

Úloha č. 3. Pomocí známé tauberovské věty J. E. Littlewooda (viz G. H. Hardy: Divergent series, věta 90) se snadno zjistí, že platí následující

Věta. *Nechť* $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ (s konečně) *a nechť posloupnost* $\{n^2(a_n - a_{n+1})\}_{n=0}^{\infty}$ *je omezená. Potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Dokažte právě uvedenou větu zcela elementárně, krátce a bez použití výše zmíněné Littlewoodovy věty!

Poznámka. G. H. Hardy a J. E. Littlewood na str. 459 své práce Contributions to the arithmetic theory of series, Proc. London Math. Soc. (2) 11 (1913), 411–478 podotýkají, že se jim nepodařilo tuto úlohu vyřešit.

Úloha č. 4. Rozhodněte, zda platí následující

Věta. *Existují posloupnosti* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *reálných čísel takové, že* $|\alpha_n| = |\beta_n| = 1$, $n = 0, 1, \dots$, *řady* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (n+1)^{-3/4}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (n+1)^{-3/4}$ *konvergují, ale řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} (k+1)^{-3/4} (n-k+1)^{-3/4}$ *nekonverguje.*

Poznámka 1. G. H. Hardy na str. 419–420 své práce The multiplication of conditionally convergent series, Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), 410–423 vyslovil domněnku, že právě uvedená věta platí.

Poznámka 2. Zjistíme-li, že věta z této úlohy platí, pak jsme tím vlastně vyřešili i (obecnější) úlohu č. 1 z Čas. pěst. mat. 92 (1967), str. 356.

Úloha č. 5. Rozhodněte, zdali existuje posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

1) funkce $F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$, $x \in I = \langle 0, +\infty \rangle$, $k = 0, 1, \dots$ jsou spojitě v intervalu I ¹⁾;

2) pro libovolný interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ je $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx \neq \int_{\alpha}^{\beta} F_0(x) dx$.

František Štěpánek, Praha

¹⁾ Zápís $f_n^{(k)}(x)$ značí ovšem k -tou derivaci funkce f_n v bodě x pokud $k > 0$; v případě $k = 0$ klademe samozřejmě $f_n^{(0)} = f_n$.