Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Úloha č. 3. Pomocí známé tauberovské věty J. E. Littlewooda (viz G. H. Hardy: Divergent series, věta 90) se snadno zjistí, že platí následující

Věta. *Nechť* $\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ *(s konečné) a nechť posloupnost* $\{n^2(a_n - a_{n+1})\}_{n=0}^{\infty}$ *je omezená. Potom* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Dokažte právě uvedenou větu zcela elementárně, krátce a bez použití výše zmíněné Littlewoodovy věty!

Poznámka. G. H. Hardy a J. E. Littlewood na str. 459 své práce Contributions to the arithmetic theory of series, Proc. London Math. Soc. (2) *11* (1913), 411—478 podotýkají, že se jim nepodařilo tuto úlohu vyřešit.

Úloha č. 4. Rozhodněte, zda platí následující

Věta. *Existují posloupnosti* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *reálných čísel takové, že* $|\alpha_n| = |\beta_n| = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, *řady* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (n+1)^{-3/4}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (n+1)^{-3/4}$ *konvergují, ale řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} (k+1)^{-3/4} (n-k+1)^{-3/4}$ *nekonverguje.*

Poznámka 1. G. H. Hardy na str. 419—420 své práce The multiplication of conditionally convergent series, Proc. London Math. Soc. (2) *6* (1908), 410—423 vyslovil domněnku, že právě uvedená věta platí.

Poznámka 2. Zjistíme-li, že věta z této úlohy platí, pak jsme tím vlastně vyřešili i (obecnější) úlohu č. 1 z Čas. pěst. mat. *92* (1967), str. 356.

Úloha č. 5. Rozhodněte, zdali existuje posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že

1) funkce $F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$, $x \in I = \langle 0, +\infty)$, $k = 0, 1, \ldots$ jsou spojité v intervalu I [1]);

2) pro libovolný interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ je $\sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx \neq \int_\alpha^\beta F_0(x)\, dx$.

František Štěpánek, Praha

[1]) Zápis $f_n^{(k)}(x)$ značí ovšem k-tou derivaci funkce f_n v bodě x pokud $k > 0$; v případě $k = 0$ klademe samozřejmě $f_n^{(0)} = f_n$.