Karel Svoboda

Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 287–316

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108299`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

PROJEKTIVNÍ VLASTNOSTI MINIMÁLNÍCH PLOCH S KRUŽNICEMI NORMÁLNÍ KŘIVOSTI

KAREL SVOBODA, Brno

(Došlo dne 17. června 1957) DT: 513.736.36

V této práci jsou vyšetřovány projektivní vlastnosti ploch n-rozměrného prostoru konstantní křivosti, jejichž indikatrice normální křivosti v každém bodě plochy jsou až do určitého řádu kružnicemi se středy v bodě plochy. Jsou odvozeny nutné a postačující podmínky k tomu, aby plocha n-rozměrného projektivního prostoru mohla býti považována za plochu vnořenou do n-rozměrného prostoru konstantní křivosti a mající uvedené metrické vlastnosti. Tyto podmínky vyplývají z vlastností sdružených sítí, které jsou na plochách vytvořeny jejich minimálními křivkami.

Úvahy o těchto plochách navazují na výsledky O. Borůvky, obsažené v pojednání *Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante* a v několika jiných pracích.

1. Úvod

1.1. V n-rozměrném prostoru $\mathbf{S}_n$ ($n \geqq 4$) konstantní křivosti c uvažujme pohyblivý bod M a přiřaďme ke každé jeho poloze n jednotkových a navzájem kolmých vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Soustava složená z bodu M a uvedených vektorů tvoří pohyblivý reper a zvláště platí rovnice

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= -c\omega_i M + \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in}\mathbf{e}_n \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

jejichž koeficienty ω jsou lineárními formami v diferenciálech parametrů, na nichž závisí uvažovaný reper. Formy ω vyhovují vzhledem k předpokladům o vektorech $\mathbf{e}$ vztahům

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

a kromě toho splňují vnější kvadratické relace

$$[\mathrm{d}\omega_i] = [\omega_1\omega_{1i}] + [\omega_2\omega_{2i}] + \ldots + [\omega_n\omega_{ni}]\,, \tag{1.3}$$

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + \ldots + [\omega_{in}\omega_{nj}] - c[\omega_i\omega_j] \qquad (1.3)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

které jsou rovnicemi struktury prostoru $\mathbf{S}_n$ konstantní křivosti c.

Abychom nemuseli přerušovati pozdější úvahy, uveďme nejprve několik předběžných poznámek a označme za tím účelem znakem $\mathbf{P}_n$ projektivní rozšíření prostoru $\mathbf{S}_n$. Soustava diferenciálních rovnic (1.1) spolu s relacemi (1.2) a rovnicemi struktury (1.3) prostoru $\mathbf{S}_n$ může býti považována za soustavu rovnic, definujících v n-rozměrném projektivním prostoru $\mathbf{P}_n$ geometrické místo bodu M a současně pohyblivý reper tvořený body M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ prostoru $\mathbf{P}_n$. Vzhledem k tomuto souřadnicovému systému lze vyjádřiti každý bod X prostoru $\mathbf{P}_n$ ve tvaru lineární kombinace

$$X = xM + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n\,, \qquad (1.4)$$

jejíž koeficienty jsou souřadnicemi bodu X vzhledem k uvažované soustavě souřadnic.

Je-li $c = 0$, je prostor $\mathbf{S}_n$ eukleidovský a snadno lze odvoditi, že kvadrika $\mathbf{A}$, určená rovnicemi

$$x = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0\,, \qquad (1.5)$$

je pevná a že je to absolutní kvadrika, která z projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ vytváří eukleidovský prostor $\mathbf{S}_n$.

Podobně v případě $c \neq 0$, kdy prostor $\mathbf{S}_n$ je neeukleidovský, lze ukázati, že kvadrika $\mathbf{A}$ o rovnici

$$\frac{1}{c}\,x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \qquad (1.6)$$

je pevná a že jest absolutní kvadrikou, která vytváří z projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ neeukleidovský prostor $\mathbf{S}_n$.

V obou uvedených případech leží body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ v polární nadrovině bodu M vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$ (pro $c = 0$ považujeme za polární nadrovinu bodu M nevlastní nadrovinu příslušného eukleidovského prostoru) a jsou po dvou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$. Zavedeme-li do dalších výpočtů body

$$E_k = \mathbf{e}_{2k-1} + i\mathbf{e}_{2k}\,,\quad E_{-k} = \mathbf{e}_{2k-1} - i\mathbf{e}_{2k} \qquad (1.7)$$
$$(i = +\sqrt{-1}\,;\ k = 1, 2, \ldots, [\tfrac{1}{2}n])\,,$$

je patrno, že body E_k (E_{-k}) leží na kvadrice $\mathbf{A}$ a že jsou při každé volbě pohyblivého reperu vzhledem k ní po dvou polárně sdruženy. Odtud plyne, že každý lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_n$,určený libovolnou skupinou bodů E_k (E_{-k}), leží na kvadrice $\mathbf{A}$.

1.2. Buď m přirozené číslo takové, že $2 \leqq m \leqq [\frac{1}{2}n]$. V dalších úvahách *se budeme zabývati plochami prostoru* $\mathbf{S}_n$, *jejichž indikatrice normální křivosti řádu* 1, 2, ..., $m - 1$ *jsou v každém bodě* M *plochy kružnicemi se středy v bodě* M.

Podle výsledků, odvozených O. Borůvkou v pojednání [3], jsou tyto plochy definovány soustavou diferenciálních rovnic (1.1), pro jejíž koeficienty ω platí kromě rovnic (1.2) vztahy

$$\begin{aligned}
&\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_n = 0\,, \\
&\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 - i\omega_2)\,, \\
&\omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 + i\omega_2)\,, \\
&\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k(\omega_1 - i\omega_2)\,, \\
&\omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = -\,iR_k(\omega_1 + i\omega_2)\,, \\
&\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0\,, \\
&\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0 \\
&(i = +\sqrt{-1}\,;\;\; k = 1, 2, \ldots, m-1\,;\;\; R_k > 0)\,,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

z nichž je třeba vypustit rovnice vzniklé z rovnic napsaných v předposledních dvou řádcích pro $k = m - 1$, jestliže $2m = n$.

Podmínky integrability soustavy diferenciálních rovnic (1.8) jsou vyjádřeny vnějšími kvadratickými relacemi

$$\begin{gathered}
\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0\,,\quad [(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m-1\,;\;\; j = 2m+1\,,\, 2m+2, \ldots, n)\,,
\end{gathered} \tag{1.9}$$

z nichž je třeba vynechati rovnice napsané v předposledním řádku, jestliže $2m = n$. Tyto rovnice ukazují, že v každém prostoru $\mathbf{S}_n$ konstantní křivosti existují uvažované plochy, a to i v tom případě, že formy některé ze soustav $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ a $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ $(j = 2m+1,\; 2m+2, \ldots, n)$, případně formy obou soustav jsou současně identicky rovny nule.

Soustava diferenciálních rovnic (1.8), která definuje analyticky uvažované plochy, má dvě soustavy charakteristických křivek, určených diferenciální rovnicí $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$. Poněvadž pro lineární element plochy je $\mathrm{d}s^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$, jsou tyto křivky minimálními křivkami na uvažovaných plochách. V dalších úvahách položíme

$$\Omega_1 = \omega_1 + i\omega_2\,,\quad \Omega_{-1} = \omega_1 - i\omega_2 \tag{1.10}$$

a diferenciální rovnici minimálních křivek budeme psát ve tvaru $\Omega_1\Omega_{-1} = 0$.

Poněvadž indikatrix normální křivosti prvního řádu má střed v bodě plochy, je vektor střední křivosti nulový podél celé plochy a uvažované plochy jsou tedy minimálními plochami. Abychom zjednodušili vyjadřování v následujících úvahách, nazveme každou plochu prostoru S_n, jejíž indikatrice normální křivosti řádu 1, 2, ..., $m - 1$ jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v bodě M, *minimální plochou s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti* a označíme ji $\boldsymbol{M}$.

Úkolem tohoto pojednání je podat nutné a postačující podmínky k tomu, aby reálná plocha projektivního prostoru P_n mohla býti považována za minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do eukleidovského nebo neeukleidovského prostoru S_n vzniklého z prostoru P_n vhodnou volbou kvadriky A prostoru P_n za absolutní kvadriku prostoru S_n. Úvahy, které je třeba za tím účelem provést, jsou odlišné v obou uvedených případech a budou proto probrány odděleně.

2. Plochy vnořené do eukleidovského prostoru

2.1. Předpokládejme nejprve, že prostor S_n jest eukleidovský ($c = 0$). Každá plocha $\boldsymbol{M}$ je podle předcházejícího analyticky určena soustavou diferenciálních rovnic (1.1), pro jejíž koeficienty platí rovnice (1.2) a (1.8). Užijeme-li označení zavedeného v rovnicích (1.7) a (1.10), můžeme zmíněnou soustavu nahradit ekvivalentní soustavou diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,, \\
\mathrm{d}E_1 &= - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,, \\
\mathrm{d}E_k &= - R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,, \\
\mathrm{d}E_{-k} &= - R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,, \qquad (2.1) \\
\mathrm{d}E_m &= - R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + \sum_{j=2m+1}^{n} (\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})\, \mathbf{e}_j\,, \\
\mathrm{d}E_{-m} &= - R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n} (\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})\, \mathbf{e}_j\,, \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} - i\omega_{2m,h})\, E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} + i\omega_{2m,h})\, E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n} \omega_{hj}\mathbf{e}_j
\end{aligned}
$$

$$(k = 2,3, \ldots, m - 1;\ h = 2m+1, 2m+2, \ldots, n)\,.$$

Vycházejíce z této soustavy dokážeme nejprve následující vlastnost minimálních křivek na uvažované ploše $\boldsymbol{M}$ eukleidovského prostoru S_n.

Věta 2.1. *Minimální křivky na minimální ploše $\boldsymbol{M}$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do n-rozměrného eukleidovského prostoru S_n, tvoří sdruženou síť, jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v obou směrech po první transformaci Laplaceovým způsobem na křivkách, které leží i se svými* *oskulačními prostory řádu $m - 1$ na absolutní kvadrice A prostoru S_n. Uvedená síť má oba invarianty rovné nule.*

Důkaz. Považujme plochu $\boldsymbol{M}$ za plochu projektivního prostoru P_n, který je projektivním rozšířením uvažovaného eukleidovského prostoru S_n. Tato plocha je v prostoru P_n analyticky určena soustavou diferenciálních rovnic (2.1).

Ze soustavy (2.1) je však patrno, že bod E_1 (E_{-1}) opisuje křivku $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$), jejíž tečna v každém bodě prochází bodem E_2 (E_{-2}), a že je pevný, pohybuje-li se bod M po určité křivce soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$). Zvolíme-li na ploše $\boldsymbol{M}$ libovolnou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$), prochází tečna každé křivky soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$), sestrojená v průsečíku se zvolenou křivkou, pevným bodem E_1 (E_{-1}). Odtud plyne, že křivky obou soustav $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tvoří na ploše $\boldsymbol{M}$ sdruženou síť a že plochy tvořené tečnami křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$) v jejich průsečících s křivkami soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$) jsou kuželovými plochami s vrcholy na křivce $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$). Posloupnost laplaceovských transformací uvedené sítě na ploše $\boldsymbol{M}$ se tedy ukončí Laplaceovým způsobem po první transformaci v obou směrech na křivkách $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$, ležících na absolutní kvadrice A prostoru S_n.

Oskulační prostor řádu $m - 1$ křivky $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$) jest určen body E_1, $\mathrm{d}E_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{d}^{m-1}E_1$ ($E_{-1}, \mathrm{d}E_{-1}, \ldots, \mathrm{d}^{m-1}E_{-1}$). Ze soustavy (2.1) je však snadno patrno, že pro $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ je bod $\mathrm{d}^k E_1$ ($\mathrm{d}^k E_{-1}$) lineární kombinací bodů $E_1, E_2, \ldots, E_{k+1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(k+1)}$), takže tedy uvažovaný oskulační prostor jest určen lineárně nezávislými body $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-m}$), které leží na absolutní kvadrice A a jsou po dvou vzhledem k ní polárně sdruženy. Odtud vychází, že oskulační prostory řádu $m - 1$ uvažovaných křivek leží na kvadrice A.

Položíme-li $\Omega_1 = e^p\, du$, $\Omega_{-1} = e^q\, dv$, jest $i\omega_{12} = q_u\, du - p_v\, dv$ a ze soustavy diferenciálních rovnic (2.1) dostaneme po jednoduchém výpočtu $M_{uv} = 0$. Odtud plyne, že invarianty uvažované sítě jsou rovny nule, čímž je důkaz všech tvrzení předcházející věty proveden.

Vzhledem k tomu, že v následujících úvahách o plochách $\boldsymbol{M}$ eukleidovského prostoru S_n budeme neustále jednati o sdružených sítích majících vlastnost uvedenou v předcházející větě, *nazveme libovolnou sdruženou síť na ploše n-rozměrného projektivního prostoru P_n sítí (U), jestliže její posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v obou směrech po první transformaci Laplaceovým způsobem na křivkách, které leží i se svými oskulačními prostory řádu $m - 1$ na regulární kvadrice A lineárního $(n - 1)$-rozměrného podprostoru projektivního prostoru P_n.* Při přechodu od projektivního prostoru P_n k eukleidovskému prostoru S_n budeme vždy předpokládati, že právě uvedená kvadrika A jest absolutní kvadrikou eukleidovského prostoru S_n.

Výsledek odvozený v předcházející větě doplníme tím, že ukážeme, že uvažované plochy jsou uvedenými projektivními vlastnostmi dokonale charakterisovány. Za tím účelem rozlišíme příslušné úvahy podle toho, zda pro $j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n$ všechny formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ a podobně všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ nejsou nebo jsou současně rovny nule. Dostaneme tím tři navzájem odlišné druhy uvažovaných ploch, jejichž vlastnosti vyšetříme v následujících úvahách.

2.2. Předpokládejme nejprve, že pro všechna $j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n$ nejsou ani formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule. Vzhledem k předcházejícímu předpokladu a vzhledem k tomu, že formy ω_{ij} $(i, j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n)$ nejsou podrobeny žádným podmínkám, nemůže býti dimense n prostoru $\mathbf{S}_n$ menší než $2m+1$. Označme $\boldsymbol{M}_1$ každou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathbf{S}_n$ určena za uvedeného předpokladu soustavou diferenciálních rovnic (2.1). Pro tyto plochy dokážeme následující větu, podávající jejich charakteristické projektivní vlastnosti.

Věta 2.2. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (U). Křivky, které vzniknou po první transformaci sítě (U) v obou směrech, jsou libovolné až na podmínku, že žádná z nich není vnořena do lineárního podprostoru dimense $m - 1$ prostoru $\mathbf{P}_n$.*

Důkaz. Ve větě 2.1 jsme dokázali, že na každé ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do eukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$, existuje sdružená síť (U), vytvořená minimálními křivkami uvažované plochy. Důkaz zmíněné věty je třeba doplniti v tom směru, že křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ nejsou za daných předpokladů vnořeny do lineárních podprostorů dimense $m - 1$. Vskutku, na základě rovnic (2.1) je patrno, že bod $\mathrm{d}^m E_1$ $(\mathrm{d}^m E_{-1})$ není lineární kombinací pouze bodů $E_1, E_2, \ldots, E_m (E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-m})$, nýbrž závisí také na bodech $\mathbf{e}_{2m+1}, \mathbf{e}_{2m+2}, \ldots, \mathbf{e}_n$. Odtud plyne, že oskulační prostory řádu m křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ mají dimensi větší než $m - 1$, takže uvedené křivky nejsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense $m - 1$.

Předcházející úvahou je doplněn důkaz věty 2.1, čímž bylo úplně dokázáno, že na každé uvažované ploše $\boldsymbol{M}_1$ eukleidovského prostoru existuje sdružená síť (U) mající uvedené vlastnosti. Předpokládejme nyní naopak, že na ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ existuje sdružená síť (U) s výše uvedenými vlastnostmi, a ukažme, že lze tuto plochu považovat za plochu $\boldsymbol{M}_1$ eukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$.

Přiřaďme ke každému bodu M projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ pohyblivý reper tvořený lineárně nezávislými body $M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Pro každý bod X prostoru $\mathbf{P}_n$ pak platí vztah (1.4) a zvláště je

$$\mathrm{d}M = \omega_0 M + \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n \mathbf{e}_n ,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_{i0}M + \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in}\mathbf{e}_n \qquad (2.2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Z těchto rovnic plyne, že bod X nezávisí na volbě reperu tehdy a jen tehdy, když jeho souřadnice vyhovují diferenciálním rovnicím

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x + x\omega_0 + x_1\omega_{10} + x_2\omega_{20} + \ldots + x_n\omega_{n0} &= 0\,, \\ \mathrm{d}x_i + x\omega_i + x_1\omega_{1i} + x_2\omega_{2i} + \ldots + x_n\omega_{ni} &= 0 \\ (i = 1, 2, .., n)\,. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Vyjádříme-li požadavek, že regulární kvadrika $\mathbf{A}$ lineárního $(n-1)$-rozměrného podprostoru prostoru $\mathbf{P}_n$ je v každém z uvažovaných reperů vyjádřena rovnicemi (1.5), dostaneme vztahy

$$\omega_{i0} = 0\,, \quad \omega_{ii} = \omega_0\,, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,, \qquad (2.4)$$

k nimž lze připojiti rovnici $\omega_0 = 0$, která vyjadřuje, že determinant utvořený ze souřadnic základních bodů reperu má konstantní hodnotu.

Zvolme reper přiřazený k uvažované ploše tak, aby body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ležely v tečné rovině plochy v bodě M. Tato volba je vyjádřena rovnicemi

$$\omega_j = 0 \qquad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \qquad (2.5)$$

z nichž na základě rovnic struktury projektivního prostoru dostaneme

$$[\omega_1\omega_{1j}] + [\omega_2\omega_{2j}] = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \qquad (2.6)$$

Předpokládejme, že sdružená síť křivek na ploše je tvořena křivkami, které mají v označení (1.10) rovnice $\Omega_1 = 0$, $\Omega_{-1} = 0$, a označme E_1 (E_{-1}) laplaceovskou transformaci této sítě ve směru křivek soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$). Bod E_1 (E_{-1}) leží v tečné rovině plochy v bodě M a je proto lineární kombinací bodů M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; poněvadž však podle předpokladu o síti (U) leží na kvadrice $\mathbf{A}$, je lineárně závislý na bodu $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$). Můžeme proto jednoduše položiti $E_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, $E_{-1} = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$ a z rovnic (2.2) pak dostaneme podle (2.4) a zavedených označení

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_1 &= -i\omega_{12}E_1 + (\omega_{13} + i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} + i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + (\omega_{13} - i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} - i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Vyjádříme nyní předpoklad, že posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě (U) se ukončí v obou směrech po první transformaci Laplaceovým způsobem. K tomu je nutné a stačí, aby bod E_1 (E_{-1}) opisoval křivku $\mathbf{E}_1$ ($\mathbf{E}_{-1}$) a aby byl pevný, když se bod M pohybuje na ploše po křivce soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$). Nutné a postačující podmínky pro to jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\omega_{1j} + i\omega_{2j} = a_{1j}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{1j} - i\omega_{2j} = b_{1j}\Omega_1 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \qquad (2.8)$$

které vedou na základě rovnic struktury projektivního prostoru k relacím

$$\left.\begin{aligned}&[\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{1j} + 2ia_{1j}\omega_{12} + \sum_{\nu=3}^{n} a_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0\,,\\ &[\Omega_1(\mathrm{d}b_{1j} - 2ib_{1j}\omega_{12} + \sum_{\nu=3}^{n} b_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0\end{aligned}\right\} \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{2.9}$$

V těchto rovnicích nejsou všechny funkce a_{1j} (b_{1j}) současně rovny nule, neboť v opačném případě by bod E_1 (E_{-1}) byl pevný a neopisoval by křivku.

Z rovnic (2.7) a (2.8) je patrno, že tečna v bodě $E_1(E_{-1})$ křivky $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_{-1})$ obsahuje bod $E_2(E_{-2})$, který je lineárně závislý na bodu $a_{13}\mathbf{e}_3 + a_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n$ ($b_{13}\mathbf{e}_3 + b_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + b_{1n}\mathbf{e}_n$). Poněvadž bod E_2 (E_{-2}) je kromě toho polárně sdružen s bodem $E_1(E_{-1})$ vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$, je nutná a postačující podmínka k tomu, aby tečna křivky $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_{-1})$ ležela na kvadrice $\boldsymbol{A}$, vyjádřena požadavkem, aby bod E_2 (E_{-2}) ležel na kvadrice $\boldsymbol{A}$. To však nastane tehdy a jen tehdy, když

$$a_{13}^2 + a_{14}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 0\,, \quad b_{13}^2 + b_{14}^2 + \ldots + b_{1n}^2 = 0\,. \tag{2.10}$$

Na základě relací (2.9) je však patrno, že lze vhodnou volbou pohyblivého reperu přiřazeného k ploše dosáhnouti toho, aby předcházející rovnice (2.10) byly splněny hodnotami

$$\begin{aligned}&a_{13} = a_1\,, \quad a_{14} = ia_1\,, \quad a_{15} = a_{16} = \ldots = a_{1n} = 0\,,\\ &b_{13} = b_1\,, \quad b_{14} = -ib_1\,, \quad b_{15} = b_{16} = \ldots = b_{1n} = 0\,,\end{aligned} \tag{2.11}$$

při čemž $a_1 > 0$, $b_1 > 0$. Při této volbě reperu je bod E_2 (E_{-2}) závislý na bodu $\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$ ($\mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$) a pro jednoduchost lze předpokládat, že $E_2 = \mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$ ($E_{-2} = \mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$). Z rovnic (2.9) pro $j = 3,4$ pak snadno vychází, že poměr funkcí a_1 a b_1 není invariantní, takže lze položiti

$$a_1 = b_1 = R_1\,. \tag{2.12}$$

Vhodnou volbou reperu přiřazeného k ploše lze tedy podle (2.11) a (2.12) dosáhnouti toho, že relace (2.8) a (2.9) mají tvar

$$\begin{gathered}\omega_{13} + i\omega_{23} = R_1\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{13} - i\omega_{23} = R_1\Omega_1\,,\\ \omega_{14} + i\omega_{24} = iR_1\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{14} - i\omega_{24} = -iR_1\Omega_1\,,\\ \omega_{15} = \omega_{16} = \ldots = \omega_{1n} = 0\,, \quad \omega_{25} = \omega_{26} = \ldots = \omega_{2n} = 0\,,\\ \left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + i\,.\,\overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0\,, \quad \left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} - i\,.\,\overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0\,,\\ [\Omega_{-1}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})] = 0\,, \quad [\Omega_1(\omega_{3j} - i\omega_{4j})] = 0\\ (j = 5, 6, \ldots, n)\,.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Při téže volbě reperu přiřazeného k ploše a při zavedeném označení má pak soustava (2.2) tvar

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_2 &= -\,R_1\Omega_1 E_1 - i\omega_{34}E_2 + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}E_{-2} &= -\,R_1\Omega_{-1}E_{-1} + i\omega_{34}E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} - i\omega_{4j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{3h} - i\omega_{4h})\,E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_{3h} + i\omega_{4h})\,E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j\\
&\qquad (h = 5, 6, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Předcházející rovnice (2.13) vyjadřují předpokládané vlastnosti sítě (U) na uvažované ploše pro $m = 2$. Poněvadž křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ jsou podle předpokladu vnořeny do podprostoru alespoň dvojrozměrného, nemohou býti v rovnicích (2.14) ani formy $\omega_{3j} + i\omega_{4j}$, ani formy $\omega_{3j} - i\omega_{4j}$ současně rovny nule pro všechna $j = 5, 6, \ldots, n$. Srovnáním rovnic (2.14) s rovnicemi (2.1) zjistíme, že výše uvedené tvrzení je pro $m = 2$ správné, takže uvažovaná plocha prostoru $\boldsymbol{P}_n$ může býti považována v případě $m = 2$ za plochu $\boldsymbol{M}_1$ s jednou kružnicí normální křivosti, vnořenou do eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Abychom dokázali uvedenou větu zcela obecně, postupujme dále metodou úplné indukce. Buď tedy $m > 2$ a předpokládejme, že křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$, které vzniknou po první transformaci sdružené sítě (U) na uvažované ploše, leží i se svými oskulačními prostory řádu $m - 2$ na kvadrice $\boldsymbol{A}$ a nejsou vnořeny do $(m - 2)$-rozměrného lineárního podprostoru projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$. Předpokládejme dále, že tyto vlastnosti jsou analyticky vyjádřeny při vhodné volbě pohyblivého reperu přiřazeného k ploše rovnicemi (2.4), (2.5) a soustavou diferenciálních rovnic

$$
\begin{gathered}
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_1\,,\\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = -\,iR_k\Omega_1\,,\\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0\,,\\
\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0\\
(k = 1, 2, \ldots, m - 2)\,,
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

které mají podle rovnic struktury projektivního prostoru za následek vnější relace

$$
\begin{gathered}
\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,,\\
\left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,,\\
[\Omega_{-1}(\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})] = 0\,, \quad [\Omega_1(\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})] = 0\\
(k = 1, 2, \ldots, m - 2;\ j = 2m - 1, 2m, \ldots, n)\,.
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

Volba pohyblivého reperu byla při tom provedena tak, že oskulační prostor řádu $m - 2$ křivky $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$) jest určen, užijeme-li označení zavedeného v (1.7), lineárně nezávislými body $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(m-1)}$), takže soustava rovnic (2.2) má tvar

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,, \\
\mathrm{d}E_1 &= -\,i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,, \\
\mathrm{d}E_k &= -\,R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,, \\
\mathrm{d}E_{-k} &= -\,R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,, \\
\mathrm{d}E_{m-1} &= -\,R_{m-2}\Omega_1 E_{m-2} - i\omega_{2m-3,2m-2}E_{m-1} + \\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n} (\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})\,\mathbf{e}_j\,, \qquad (2.17) \\
\mathrm{d}E_{-(m-1)} &= -\,R_{m-2}\Omega_{-1}E_{-(m-2)} + i\omega_{2m-3,2m-2}E_{-(m-1)} + \\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n} (\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})\,\mathbf{e}_j\,, \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} - i\omega_{2m-2,h})\,E_{m-1} - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} + i\omega_{2m-2,h})\,E_{-(m-1)} + \sum_{j=2m-1}^{n} \omega_{hj}\mathbf{e}_j \\
&\quad (k = 2, 3, \ldots, m-2\,;\ h = 2m-1\,,\ 2m, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
$$

Podle předpokladu nejsou v soustavě (2.17) pro $j = 2m - 1, 2m, \ldots, n$ ani formy $\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j}$, ani formy $\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j}$ současně rovny nule, neboť v opačném případě by alespoň jedna z obou křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ byla obsažena v podprostoru dimense $m - 2$.

Ukažme nyní, že za uvedených předpokladů leží oskulační prostory řádu $m - 1$ křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ na kvadrice $\boldsymbol{A}$. Z rovnic napsaných v předposledních dvou řádcích (2.16) předně plynou vztahy

$$
\begin{aligned}
\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j} &= a_{m-1,j}\Omega_{-1}\,, \\
\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j} &= b_{m-1,j}\Omega_1
\end{aligned}
\quad (j = 2m-1\,,\ 2m, \ldots, n)\,, \qquad (2.18)
$$

v nichž ani funkce $a_{m-1,j}$, ani funkce $b_{m-1,j}$ nejsou současně rovny nule. Ze soustavy (2.17) je pak patrno, že oskulační prostor řádu $m - 1$ křivky $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_{-1})$ obsahuje kromě bodů $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(m-1)}$), určujících její oskulační prostor řádu $m - 2$, bod $E_m(E_{-m})$, který je lineárně závislý na bodu $a_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + a_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + a_{m-1,n}\mathbf{e}_n$ ($b_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + b_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + b_{m-1,n}\mathbf{e}_n$), a že právě uvedené body jsou lineárně nezávislé. Bod E_m (E_{-m}) je však polárně sdružen vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ s každým z bodů $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(m-1)}$). Oskulační prostory řádu $m - 1$ uvažovaných křivek budou tedy ležeti na uvedené kvadrice tehdy a jen tehdy, když body E_m a E_{-m} budou body kvadriky $\boldsymbol{A}$, a to nastane právě tehdy, když

$$
\begin{aligned}
a^2_{m-1,2m-1} + a^2_{m-1,2m} + \ldots + a^2_{m-1,n} &= 0\,, \\
b^2_{m-1,2m-1} + b^2_{m-1,2m} + \ldots + b^2_{m-1,n} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Rovnice (2.18) však vedou na základě rovnic struktury projektivního prostoru k vnějším kvadratickým relacím

$$
[\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{m-1,j} + i a_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2}} + \sum_{\nu=2m-1}^{n} a_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})] = 0\,,
$$

$$
[\Omega_{1}\,(\mathrm{d}b_{m-1,j} - i b_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2}} + \sum_{\nu=2m-1}^{n} b_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})] = 0
$$

$$
(j = 2m - 1\,, 2m, \ldots, n)\,. \tag{2.20}
$$

Z těchto rovnic je patrno, že lze vhodnou volbou pohyblivého reperu dosáhnouti toho, že rovnice (2.19) jsou splněny hodnotami

$$
\begin{aligned}
a_{m-1,2m-1} = a_{m-1}\,,\ a_{m-1,2m} &= i a_{m-1}\,,\ a_{m-1,2m+1} = \ldots = a_{m-1,n} = 0\,, \\
b_{m-1,2m-1} = b_{m-1}\,,\ b_{m-1,2m} &= -\,i b_{m-1}\,,\ b_{m-1,2m+1} = \ldots = b_{m-1,n} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

při čemž $a_{m-1} > 0$, $b_{m-1} > 0$. Při této volbě reperu přiřazeného k ploše je bod $E_m\,(E_{-m})$ lineárně závislý na bodu $\mathbf{e}_{2m-1} + i\mathbf{e}_{2m}$ $(\mathbf{e}_{2m-1} - i\mathbf{e}_{2m})$ a pro jednoduchost můžeme tedy položiti $E_m = \mathbf{e}_{2m-1} + i\mathbf{e}_{2m}$, $E_{-m} = \mathbf{e}_{2m-1} - i\mathbf{e}_{2m}$. Rovnice (2.20) pro $j = 2m - 1$, $2m$ pak ukazují, že poměr funkcí a_{m-1} a b_{m-1} není invariantní, takže lze předpokládati, že

$$
a_{m-1} = b_{m-1} = R_{m-1}\,. \tag{2.22}
$$

Vzhledem k (2.21) a (2.22) se rovnice (2.18) zjednoduší na tvar

$$
\begin{aligned}
&\omega_{2m-3,2m-1} + i\omega_{2m-2,2m-1} = R_{m-1}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2m-3,2m-1} - i\omega_{2m-2,2m-1} = R_{m-1}\Omega_{1}\,, \\
&\omega_{2m-3,2m} + i\omega_{2m-2,2m} = iR_{m-1}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2m-3,2m} - i\omega_{2m-2,2m} = -\,iR_{m-1}\Omega_{1}\,, \\
&\omega_{2m-3,2m+1} = \omega_{2m-3,2m+2} = \ldots = \omega_{2m-3,n} = 0\,, \\
&\omega_{2m-2,2m+1} = \omega_{2m-2,2m+2} = \ldots = \omega_{2m-2,n} = 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

a mají podle (2.20) za podmínky integrability vztahy

$$
\begin{aligned}
&\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2} - \omega_{2m-1,2m}}\right)\right] = 0\,, \\
&\left[\Omega_{1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2} - \omega_{2m-1,2m}}\right)\right] = 0\,, \\
&[\Omega_{-1}(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0\,,\ [\Omega_{1}(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0 \\
&(j = 2m + 1,\, 2m + 2, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Předcházející rovnice (2.23) určují při vhodné volbě reperu analytické vyjádření předpokladu o oskulačních prostorech řádu $m - 1$ křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ a dávají spolu se soustavou rovnic (2.15) rovnice (1.8), takže uvažované plochy projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ jsou určeny soustavou diferenciálních rovnic, která splývá se soustavou (2.1). Poněvadž křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ nejsou podle předpokladu vnořeny do podprostorů dimense $m - 1$, nemohou býti ani formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule pro všechna $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$.

Z předcházejícího tedy plyne, že každá plocha projektivního prostoru P_n, na níž existuje sdružená síť (U) uvažovaných vlastností, je v eukleidovském prostoru S_n, jehož absolutní kvadrikou je výše uvedená kvadrika A, plochou $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti. Tím je důkaz věty 2.2 proveden.

Nejjednodušší zvláštní případ uvažovaných ploch s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti dostaneme za předpokladu, že daná plocha $\boldsymbol{M}_1$ je vnořena do prostoru dimense $n = 2m + 1$. Pro $m = 2$ obsahuje pak předcházející věta 2.2 výsledek, odvozený O. Borůvkou v pojednání [2], o minimálních plochách pětirozměrného eukleidovského prostoru, jejichž indikatrix normální křivosti v každém bodě plochy je kružnicí.

2.3. Obraťme se nyní k druhému z případů uvedených na konci odstavce 2.1 a předpokládejme vzhledem k souměrnosti soustavy (2.1), že pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ jsou všechny formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ rovny nule, zatím co všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně nevymizí. Označme v dalším $\boldsymbol{M}_2$ každou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je v n-rozměrném eukleidovském prostoru S_n určena soustavou diferenciálních rovnic (2.1), jejíž koeficienty splňují výše uvedený předpoklad. Také v tomto případě je dimense n prostoru S_n nutně větší než $2m$. O uvedených plochách dokážeme nyní následující větu.

Věta 2.3. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru P_n může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného eukleidovského prostoru S_n, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (U). Křivky, které vzniknou po první transformaci sítě (U) v obou směrech, jsou libovolné až na podmínku, že právě jedna z nich je vnořena do lineárního podprostoru dimense $m - 1$ projektivního prostoru P_n.*

Podle definice sítě (U) jest uvedený lineární podprostor dimense $m - 1$, v němž jest obsažena jedna z obou zmíněných křivek, oskulačním prostorem řádu $m - 1$ ve všech bodech této křivky.

D ů k a z. Podle věty 2.1 existuje na každé ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do eukleidovského prostoru S_n, sdružená síť (U) určená minimálními křivkami uvažované plochy. Položíme-li v soustavě (2.1) $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j} = 0$ pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$, jest okamžitě patrno, že oskulační prostory řádu vyššího než $m - 1$ křivky $\boldsymbol{E}_1$ mají vesměs dimensi $m - 1$, a odtud plyne, že křivka $\boldsymbol{E}_1$ je vnořena do lineárního podprostoru dimense $m - 1$ prostoru P_n. Z téže soustavy rovnic současně plyne, že pro křivku $\boldsymbol{E}_{-1}$ zůstává v platnosti úvaha provedená na začátku důkazu věty 2.2. Vidíme tedy, že každá plocha $\boldsymbol{M}_2$ eukleidovského prostoru S_n má projektivní vlastnosti uvedené v dokazované větě.

Abychom kromě toho dokázali opačné tvrzení předcházející věty, použijme postupu druhé části důkazu věty 2.2, kde jsme odvodili, že předpokládané vlastnosti ploch projektivního prostoru P_n, pokud jednají o sdružené síti (U), lze při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše vyjádřiti analyticky soustavou diferenciálních rovnic (1.8), takže uvažované plochy jsou pak určeny soustavou diferenciálních rovnic tvaru (2.1). Učiníme-li ve smyslu předcházející věty předpoklad, že z obou křivek E_1 a E_{-1} právě křivka E_1 je vnořena do $(m - 1)$-rozměrného podprostoru prostoru P_n, musí míti její oskulační prostory řádu vyššího než $m - 1$ vesměs dimensi $m - 1$. To však podle (2.1) nastane jen tehdy, když pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ bude $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j} = 0$. Poněvadž křivka E_{-1} splňuje týž předpoklad jako příslušná křivka ve větě 2.2, nemohou býti formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule pro všechna uvažovaná $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$.

Skutečně tedy každá plocha projektivního prostoru P_n, mající uvedené projektivní vlastnosti, může býti považována za plochu M_2 eukleidovského prostoru S_n.

Předcházející věta platí pro každé $n \geqq 2m + 1$ a zvláště vyjadřuje pro plochy vnořené do pětirozměrného prostoru okolnost, že právě jedna z křivek, které vzniknou po první transformaci sítě (U), je přímkou. V tomto případě jsou tedy předcházející větou doplněny výsledky pojednání zmíněného na konci odstavce 2.2.

2.3. Všimněme si nakonec ještě ploch, které jsou v eukleidovském prostoru S_n určeny soustavou (2.1) a předpokladem, že pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots$ $\ldots, n$ jsou jak formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, tak i formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule. Vzhledem k tomuto předpokladu lze souditi, že pro dimensi n prostoru S_n je v tomto případě $n \geqq 2m$. V následující větě označíme M_3 libovolnou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, určenou v n-rozměrném eukleidovském prostoru S_n soustavou diferenciálních rovnic (2.1) s předepsanými podmínkami o výše uvedených formách.

Věta 2.4. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru P_n může býti definována jako minimální plocha M_3 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného eukleidovského prostoru S_n, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (U). Křivky, které vzniknou po první transformaci sítě (U) v obou směrech jsou libovolné až na podmínku, že obě jsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense $m - 1$ projektivního prostoru P_n.*

Podle definice sítě (U) je každý z uvedených lineárních podprostorů dimense $m - 1$, obsahujících příslušnou křivku, oskulačním prostorem řádu $m - 1$ ve všech bodech této křivky.

Důkaz. Správnost obou tvrzení této věty se zjistí tím, že se důkazy vět 2.1 a 2.2 doplní, pokud se týká uvedených vlastností křivek E_1 a E_{-1}, týmž způsobem, jehož bylo použito při důkazu věty 2.3 v případě křivky E_1.

Předcházející věta zahrnuje jako nejjednodušší případ plochy M_3 s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do eukleidovského prostoru dimense $n = 2m$. Příslušné vlastnosti těchto ploch, obsažené ve větě 2.4, byly odvozeny O. Borůvkou v pojednání [3].

3. Plochy vnořené do neeukleidovského prostoru

3.1. Obraťme se nyní k zjištění některých vlastností ploch M za předpokladu, že prostor S_n je neeukleidovský ($c \neq 0$). Každá taková plocha je podle dřívějších poznámek analyticky určena soustavou diferenciálních rovnic (1.1) s koeficienty vyhovujícími rovnicím (1.2) a (1.8). Zaveďme opět označení (1.7) a (1.10) a nahraďme uvedenou soustavu ekvivalentní soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= -R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= -R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} - i\omega_{2m,h})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} + i\omega_{2m,h})\,E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m - 1\,;\ h = 2m + 1\,,\ 2m + 2, \ldots, n)\,.$$

Užitím této soustavy rovnic odvodíme nejprve následující větu jednající o minimálních křivkách na uvažované ploše M neeukleidovského prostoru S_n. Použijeme v ní rčení, že dvě laplaceovské transformace dané sdružené sítě jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice, v tom smyslu, že každé dva odpovídající si body uvedených transformací jsou vzhledem ke kvadrice polárně sdruženy.

Věta 3.1. *Minimální křivky na minimální ploše M s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do n-rozměrného neeukleidovského prostoru S_n, tvoří sdruženou síť, jejíž první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace v obou směrech leží na absolutní kvadrice **A** prostoru S_n tak, že laplaceovské transformace, vzniklé z uvedené sítě stejným počtem transformací v obou směrech, jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice **A** se všemi laplaceovskými transformacemi počáteční sítě, které jsou v její posloupnosti laplaceovských transformací obsaženy mezi zmíněnými transformacemi. Uvedená síť má oba invarianty stejné.*

Důkaz. Považujme plochu $\boldsymbol{M}$ za plochu projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$, který vznikne z neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$ jeho projektivním rozšířením. Tato plocha je podle úvodních poznámek určena v prostoru $\mathbf{P}_n$ soustavou diferenciálních rovnic (3.1).

Ze soustavy (3.1) je patrno, že body M, E_k, E_{-k} $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ opisují plochy, které označíme $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{E}_{-k}$, a že každým bodem libovolné z těchto ploch prochází právě jedna křivka každé ze soustav $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$. Z téže soustavy plyne, že geometrickým místem bodu E_m (E_{-m}) je buď plocha nebo křivka $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ podle toho, zda formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ $(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})$ nejsou nebo jsou pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ současně rovny nule. Poněvadž bližší rozlišení provedeme až v následujících odstavcích, budeme pro jednoduchost mluviti o plochách $\boldsymbol{E}_m$ a $\boldsymbol{E}_{-m}$.

Zvolme na ploše $\boldsymbol{M}$ libovolnou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a uvažujme na ploše $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$ křivku $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$, která jí odpovídá v jednojednoznačné příbuznosti mezi plochami $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$). Pohybuje-li se bod M po zvolené křivce, jest jeho spojnice s příslušným bodem E_1 (E_{-1}) tečnou v bodě E_1 (E_{-1}) uvažované křivky na ploše $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$. Na druhé straně je z první rovnice soustavy (3.1) patrno, že tato přímka je tečnou v bodě M ke křivce soustavy $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, která tímto bodem prochází. Odtud plyne, že tečny křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ plochy $\boldsymbol{M}$ v průsečících se zvolenou křivkou soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ vyplňují rozvinutelnou plochu, jejíž hranou vratu jest odpovídající křivka soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ na ploše $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$. Soustavy křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tedy tvoří na ploše $\boldsymbol{M}$ sdruženou síť a plocha $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$ je laplaceovskou transformací plochy $\boldsymbol{M}$ ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$. Poněvadž body E_1 a E_{-1} leží na kvadrice $\mathbf{A}$ a jsou vzhledem k ní polárně sdruženy s bodem M, mají první laplaceovské transformace počáteční sítě vlastnosti uvedené v předcházející větě.

Abychom dokázali další tvrzení o uvažované síti na ploše $\boldsymbol{M}$, zvolme libovolné přirozené číslo i tak, že $2 \leqq i \leqq m$, a připomeňme, že podle (1.9) jsou formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ $(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})$ pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ lineárně závislé na Ω_{-1} (Ω_1). Předpokládejme, že $(i - 1)$-ní laplaceovské transformace sdružené sítě na ploše $\boldsymbol{M}$ mají vlastnosti uvedené ve větě 3.1, a dokažme, že tyto vlastnosti zůstávají v platnosti také pro i-té laplaceovské transformace.

Uvažujme za tím účelem na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$ určitou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a jí odpovídající křivku na ploše $\boldsymbol{E}_i$ $(\boldsymbol{E}_{-i})$. Pohybuje-li se bod E_{i-1} $(E_{-(i-1)})$ po zvolené křivce, je přímka spojující bod E_{i-1} $(E_{-(i-1)})$ s odpovídajícím bodem E_i (E_{-i}) tečnou v bodě $E_i (E_{-i})$ křivky opsané tímto bodem a současně tečnou v bodě E_{i-1} $(E_{-(i-1)})$ ke křivce soustavy $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, procházející na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$ uvažovaným bodem. Odtud je patrno, že plochy tečen křivek $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ na ploše $\boldsymbol{E}_i$ $(\boldsymbol{E}_{-i})$ se dotýkají plochy

$\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$ podél křivek $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a že jejich tvořicí přímky jsou tečnami křivek soustavy $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$. Křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$ tvoří tedy sdruženou síť a plocha $\boldsymbol{E}_i$ $(\boldsymbol{E}_{-i})$ jest její laplaceovskou transformací ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$. Vzhledem k tomu, že body E_i a E_{-i} leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$ a jsou vzhledem k ní polárně sdruženy se všemi body M, E_s, E_{-s} $(s = 1, 2, \ldots, i - 1)$, mají i-té laplaceovské transformace uvažované sítě výše zmíněné vlastnosti.

Položíme-li $\Omega_1 = e^p\,du$, $\Omega_{-1} = e^q\,dv$, jest $i\omega_{12} = q_u\,du - p_v\,dv$ a ze soustavy diferenciálních rovnic (3.1) odvodíme snadno rovnici $M_{uv} = -\frac{1}{2}ce^{p+q}M$. Pro invarianty h, k uvažované sítě tím dostaneme hodnoty $h = k = -\frac{1}{2}ce^{p+q}$ a důkaz předcházející věty je tím dokončen.

Abychom zjednodušili vyjadřování v následujících větách, *nazveme libovolnou sdruženou síť na ploše n-rozměrného projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ sítí (V), jestliže její první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace v obou směrech leží na regulární kvadrice $\boldsymbol{A}$ projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ tak, že laplaceovské transformace, vzniklé z uvedené sítě stejným počtem transformací v obou směrech, jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ se všemi laplaceovskými transformacemi počáteční sítě, které jsou v její posloupnosti laplaceovských transformací obsaženy mezi zmíněnými transformacemi.* Při přechodu od projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ k neeukleidovskému prostoru $\boldsymbol{S}_n$ budeme vždy předpokládati, že právě uvedená kvadrika $\boldsymbol{A}$ jest absolutní kvadrikou neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

V následujících úvahách dokážeme, že existence sítě (V) na ploše projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ zaručuje, že lze tuto plochu považovati za plochu $\boldsymbol{M}$ neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, a budeme uvažovati opět o třech možnostech na základě téže zásady, již jsme uvedli na konci odstavce 2.1.

3.2. Vyšetříme nejprve případ, kdy pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ nejsou ani formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule. V tomto případě označíme opět $\boldsymbol{M}_1$ každou plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která jest určena v n-rozměrném neeukleidovském prostoru $\boldsymbol{S}_n$ soustavou diferenciálních rovnic (3.1) s výše uvedeným předpokladem. Pro dimensi n prostoru $\boldsymbol{S}_n$ platí v tomto případě nerovnost $n \geqq 2m + 1$. Pro uvažovaný případ ploch dokážeme nyní větu, která podává jejich charakteristické projektivní vlastnosti.

Věta 3.2. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se v žádném z obou směrů neukončí po m transformacích.*

Důkaz. Podle věty 3.1 existuje na každé minimální ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do n-rozměrného neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, sdružená síť (V), vytvořená minimálními křivkami uvažované plochy.

Stačí tedy doplniti důkaz této věty zjištěním, že m-té laplaceovské transformace sítě (V) v obou směrech jsou sítě na plochách $\boldsymbol{E}_m$ a $\boldsymbol{E}_{-m}$. To je však vzhledem k učiněným předpokladům ihned patrno ze soustavy (3.1), která ukazuje, že geometrickým místem bodu E_m (E_{-m}) je plocha $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ a nikoliv křivka.

Tímto zjištěním je ukázáno, že na každé uvažované ploše $\boldsymbol{M}_1$ neeukleidovského prostoru existuje sdružená síť (V) mající uvedené vlastnosti. Předpokládejme nyní naopak, že na ploše projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ existuje sdružená síť (V) s výše uvedenými vlastnostmi, a ukažme, že tuto plochu lze považovati za plochu $\boldsymbol{M}_1$ neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Přiřaďme ke každému bodu M prostoru $\boldsymbol{P}_n$ pohyblivý reper tvořený lineárně nezávislými body M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Pro libovolný bod X prostoru $\boldsymbol{P}_n$ lze pak psáti vztah (1.4) a zvláště dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega_0 M + \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n \mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= \omega_{i0} M + \omega_{i1} \mathbf{e}_1 + \omega_{i2} \mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in} \mathbf{e}_n \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nutné a postačující podmínky pro to, aby bod X nezávisel na volbě reperu, jsou opět vyjádřeny diferenciálními rovnicemi (2.3), z nichž plyne, že regulární kvadrika $\boldsymbol{A}$ prostoru $\boldsymbol{P}_n$ jest určena v libovolném z uvažovaných reperů rovnicí (1.6) tehdy a jen tehdy, když platí

$$\omega_{i0} + c\omega_i = 0\,, \quad \omega_{ii} = \omega_0\,, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.3}$$

K těmto rovnicím lze připojiti vztah $\omega_0 = 0$, který vyjadřuje, že determinant utvořený ze souřadnic bodů reperu má konstantní hodnotu.

Pro další výpočty je přirozené voliti reper tak, aby body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ byly při každé poloze reperu v tečné rovině plochy v bodě M. Provedeme-li tuto volbu, dostaneme vztahy

$$\omega_j = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{3.4}$$

které dávají na základě rovnic struktury projektivního prostoru vnější kvadratické relace

$$[\omega_1 \omega_{1j}] + [\omega_2 \omega_{2j}] = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{3.5}$$

Předpokládejme nyní, že sdružená síť křivek na ploše je tvořena křivkami, které jsou určeny rovnicemi $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$, v nichž Ω_1 a Ω_{-1} jest označení zavedené v (1.10). Ve smyslu dokazované věty označme dále E_1 (E_{-1}) první laplaceovskou transformaci uvažované sítě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$. Poněvadž bod E_1 (E_{-1}) musí ležet v tečné rovině plochy v bodě M, je lineární kombinací bodů M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; vzhledem k předpokladům je však bod E_1 (E_{-1}) polárně sdružen s bodem M vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ a to vede k poznatku, že je pouze kombinací bodů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; poněvadž však kromě toho leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$, je lineárně závislý na bodu $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ $(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)$. Pro jednoduchost můžeme proto položiti $E_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, $E_{-1} = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$, takže podle (3.2), (3.3) a užitím zavedených označení dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_1 &= -c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + (\omega_{13} + i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} + i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}E_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + (\omega_{13} - i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} - i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vyjádříme nyní analyticky předpoklad učiněný o bodech E_1 a E_{-1}. Bod E_1 (E_{-1}) je při každé poloze bodu M na ploše laplaceovskou transformací bodu M ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$) tehdy a jen tehdy, když pro libovolně zvolenou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$) na ploše opsané bodem M je spojnice bodů M a E_1 (M a E_{-1}) tečnou v bodě E_1 (E_{-1}) křivky, která je geometrickým místem tohoto bodu a odpovídá zvolené křivce soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$). Nutné a postačující podmínky pro to jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\omega_{1j} + i\omega_{2j} = a_{1j}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{1j} - i\omega_{2j} = b_{1j}\Omega_1 \qquad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{3.7}$$

z nichž na základě rovnic struktury projektivního prostoru dostaneme

$$\begin{aligned} &[\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{1j} + 2ia_{1j}\omega_{12} + \sum_{\nu=3}^{n} a_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0\,, \\ &[\Omega_1\,(\mathrm{d}b_{1j} - 2ib_{1j}\omega_{12} + \sum_{\nu=3}^{n} b_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0 \\ &(j = 3, 4, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

V předcházejících rovnicích nemohou býti všechny funkce a_{1j} (b_{1j}) současně rovny nule, neboť v opačném případě by bod E_1 (E_{-1}) opisoval podle (3.6) a (3.7) křivku a posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě by byla proti předpokladu ukončena v obou směrech po první transformaci.

Bod E_1 (E_{-1}) tedy opisuje plochu $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$), na níž tvoří křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ sdruženou síť. Označme E_2 (E_{-2}) laplaceovskou transformaci této sítě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$). Bod E_2 (E_{-2}) leží tedy v tečné rovině plochy $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$) v bodě E_1 (E_{-1}) a je proto lineárně závislý na bodech M, E_1, $a_{13}\mathbf{e}_3 + a_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n$ (M, E_{-1}, $b_{13}\mathbf{e}_3 + b_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + b_{1n}\mathbf{e}_n$); poněvadž však je podle předpokladu polárně sdružen vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$ s body M, E_1, E_{-1}, je závislý jen na bodu $a_{13}\mathbf{e}_3 + a_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n$ ($b_{13}\mathbf{e}_3 + b_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + b_{1n}\mathbf{e}_n$). Vzhledem k předpokladu, že body E_2 a E_{-2} leží na kvadrice $\mathbf{A}$, odtud plyne platnost vztahů

$$a_{13}^2 + a_{14}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 0\,, \quad b_{13}^2 + b_{14}^2 + \ldots + b_{1n}^2 = 0\,. \tag{3.9}$$

Užitím rovnic (3.8) lze snadno nahlédnouti, že lze reper přiřazený k ploše vhodně zvoliti tak, aby předcházející rovnice (3.9) byly splněny hodnotami

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_1\,, \quad a_{14} = ia_1, \quad a_{15} = a_{16} = \ldots = a_{1n} = 0\,, \\ b_{13} &= b_1\,, \quad b_{14} = -ib_1\,, \quad b_{15} = b_{16} = \ldots = b_{1n} = 0\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

při čemž $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, takže při uvažované volbě pohyblivého reperu je bod E_2 (E_{-2}) závislý na bodu $\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$ ($\mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$) a lze proto pro jednoduchost položiti $E_2 = \mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$, $E_{-2} = \mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$. Rovnice (3.8) pro $j = 3,4$ pak dále ukazují, že poměr funkcí a_1 a b_1 není invariantní, a to umožňuje položiti

$$a_1 = b_1 = R_1 . \tag{3.11}$$

Shrnutím předcházejících výpočtů tedy vidíme, že lze vhodnou volbou reperu přiřazeného k ploše dosáhnouti toho, že relace (3.7) a (3.8) mají vzhledem k (3.10) a (3.11) tvar

$$\begin{gathered}
\omega_{13} + i\omega_{23} = R_1\Omega_{-1} , \quad \omega_{13} - i\omega_{23} = R_1\Omega_1 , \\
\omega_{14} + i\omega_{24} = iR_1\Omega_{-1} , \quad \omega_{14} - i\omega_{24} = - iR_1\Omega_1 , \\
\omega_{15} = \omega_{16} = \ldots = \omega_{1n} = 0 , \\
\omega_{25} = \omega_{26} = \ldots = \omega_{2n} = 0 , \\
\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + i \,.\, \overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0 , \quad \left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} - i \,.\, \overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0 , \\
[\Omega_{-1}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})] = 0 , \quad [\Omega_1(\omega_{3j} - i\omega_{4j})] = 0 \\
(j = 5, 6, \ldots, n) .
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Při téže volbě reperu přiřazeného k ploše má pak soustava diferenciálních rovnic (3.2) tvar

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1E_{-1} , \\
\mathrm{d}E_1 &= - c\Omega_1M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2 , \\
\mathrm{d}E_{-1} &= - c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1E_{-2} , \\
\mathrm{d}E_2 &= - R_1\Omega_1E_1 - i\omega_{34}E_2 + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})\, \mathbf{e}_j , \\
\mathrm{d}E_{-2} &= - R_1\Omega_{-1}E_{-1} + i\omega_{34}E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} - i\omega_{4j})\, \mathbf{e}_j , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= - \tfrac{1}{2}(\omega_{3h} - i\omega_{4h})\, E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_{3h} + i\omega_{4h})\, E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j \\
&\qquad (h = 5, 6, \ldots, n) .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Rovnicemi (3.12) jsou analyticky vyjádřeny předpokládané vlastnosti sítě (V) na uvažované ploše pro $m = 2$. Poněvadž posloupnost laplaceovských transformací této sítě se podle předpokladu neukončí v žádném z obou směrů po dvou transformacích, neopisují body E_2 a E_{-2} křivky, takže podle (3.13) nemohou býti pro $j = 5, 6, \ldots, n$ ani formy $\omega_{3j} + i\omega_{4j}$, ani formy $\omega_{3j} - i\omega_{4j}$ současně rovny nule. Zároveň však rovnice soustavy (3.13) ukazují, porovnáme-li je se soustavou rovnic (3.1), že tvrzení dokazované věty je pro $m = 2$ správné a že tedy lze uvažovanou plochu prostoru $\mathbf{P}_n$ v případě $m = 2$ považovati za plochu $\boldsymbol{M}_1$ s jednou kružnicí normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

V další části důkazu budeme postupovat metodou úplné indukce. Předpokládejme za tím účelem, že $m > 2$ a že sdružená síť (V) na uvažované ploše má vlastnost, že její první, druhé, ..., $(m-1)$-ní laplaceovské transformace v obou směrech leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$ a že příslušná posloupnost laplaceovských transformací není v žádném z obou směrů ukončena po $m-1$ transformacích, při čemž poslední laplaceovské transformace v této posloupnosti jsou vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ polárně sdruženy se všemi laplaceovskými transformacemi obsaženými v uvedené posloupnosti mezi nimi. Předpokládejme dále, že právě uvedené vlastnosti jsou při vhodné volbě pohyblivého reperu přiřazeného k ploše vyjádřeny rovnicemi (3.3), (3.4) a soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{gathered}
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_1\,, \\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = -iR_k\Omega_1\,, \\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0\,, \\
\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m-2)\,,
\end{gathered} \tag{3.14}$$

z nichž podle rovnic struktury projektivního prostoru vychází vnějším diferencováním relace

$$\begin{gathered}
\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
\left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
[\Omega_{-1}(\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})] = 0\,, \quad [\Omega_1(\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})] = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m-2\,;\; j = 2m-1, 2m, \ldots, n)\,.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Při volbě pohyblivého reperu bylo postupováno tak, že pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$ jest i-tá laplaceovská transformace sítě (V) na ploše vytvořena ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ bodem E_i (E_{-i}), zavedeným v (1.7); takže soustava rovnic (3.2) má tvar

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1E_{-1}\,, \\
\mathrm{d}E_1 &= -c\Omega_1M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1E_{-2}\,, \\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega_1E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,, \\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1E_{-(k+1)}\,, \\
\mathrm{d}E_{m-1} &= -R_{m-2}\Omega_1E_{m-2} - i\omega_{2m-3,2m-2}E_{m-1} + \\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n}(\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})\,\mathbf{e}_j\,,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_{-(m-1)} &= -R_{m-2}\Omega_{-1}E_{-(m-2)} + i\omega_{2m-3,2m-2}E_{-(m-1)} + \\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n} (\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})\, \mathbf{e}_j\,, \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} - i\omega_{2m-2,h})\, E_{m-1} - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} + i\omega_{2m-2,h})\, E_{-(m-1)} + \sum_{j=2m-1}^{n} \omega_{hj}\mathbf{e}_j \\
&\quad (k = 2, 3, \ldots, m-2\,; \quad h = 2m-1\,, 2m\,, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
$$

V předcházející soustavě (3.16) nejsou pro $j = 2m - 1, 2m, \ldots, n$ ani formy $\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j}$, ani formy $\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j}$ současně rovny nule, neboť v opačném případě by $(m - 1)$-ní laplaceovská transformace uvažované sítě (V) aspoň v jednom z obou směrů byla křivkou, a to je ve sporu s učiněnými předpoklady.

Vzhledem k těmto předpokladům je $(m - 1)$-ní laplaceovská transformace sítě (V) ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ vytvořena bodem E_{m-1} $(E_{-(m-1)})$, který opisuje plochu $\boldsymbol{E}_{m-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(m-1)})$, na níž tvoří křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ sdruženou síť. Abychom dokázali, že laplaceovská transformace sítě na ploše $\boldsymbol{E}_{m-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(m-1)})$ ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, tedy m-tá laplaceovská transformace sítě (V) v tomto směru, má vlastnosti dokazované věty, uveďme nejprve vztahy

$$
\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j} = a_{m-1,j}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j} = b_{m-1,j}\Omega_1 \quad (j = 2m-1,\ 2m, \ldots, n) \tag{3.17}
$$

plynoucí z rovnic napsaných v předposledním řádku (3.15). V rovnicích (3.17) nejsou ani funkce $a_{m-1,j}$, ani funkce $b_{m-1,j}$ pro všechna uvažovaná j současně rovny nule.

Označíme-li E_m (E_{-m}) laplaceovskou transformaci sítě na ploše $\boldsymbol{E}_{m-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(m-1)})$ ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, leží bod E_m (E_{-m}) v tečné rovině plochy $\boldsymbol{E}_{m-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(m-1)})$ v bodě E_{m-1} $(E_{-(m-1)})$, která je podle (3.16) a (3.17) určena body E_{m-2}, E_{m-1}, $a_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + a_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + a_{m-1,n}\mathbf{e}_n$ $(E_{-(m-2)}, E_{-(m-1)}, b_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + b_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + b_{m-1,n}\mathbf{e}_n)$, a je proto lineární kombinací těchto bodů. Poněvadž bod E_m (E_{-m}) je dále polárně sdružen vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ s body $E_{m-1}, \ldots, E_1, M, E_{-1}, \ldots, E_{-(m-1)}$, je lineárně závislý jen na bodu $a_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + a_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + a_{m-1,n}\mathbf{e}_n$ $(b_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + b_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + b_{m-1,n}\mathbf{e}_n)$; vyjádříme-li ještě, že leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$, dostaneme relace

$$
\begin{aligned}
a^2_{m-1,2m-1} + a^2_{m-1,2m} + \ldots + a^2_{m-1,n} &= 0\,, \\
b^2_{m-1,2m-1} + b^2_{m-1,2m} + \ldots + b^2_{m-1,n} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Na základě rovnic struktury projektivního prostoru odvodíme z rovnice (3.17) vnější kvadratické relace

$$
\begin{aligned}
&[\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{m-1,j}+ia_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}}+\sum_{\nu=2m-1}^{n}a_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})]=0\,,\\
&[\Omega_{1}\,(\mathrm{d}b_{m-1,j}-ib_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}}+\sum_{\nu=2m-1}^{n}b_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})]=0\\
&\qquad (j=2m-1\,,2m,\ldots,n)\,,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

z nichž lze usouditi, že je možné vhodnou volbou pohyblivého reperu přiřazeného k uvažované ploše dosáhnouti toho, aby rovnice (3.18) byly splněny hodnotami

$$
\begin{aligned}
&a_{m-1,2m-1}=a_{m-1}\,,\quad a_{m-1,2m}=\ \ ia_{m-1}\,,\quad a_{m-1,2m+1}=\ldots=a_{m-1,n}=0\,,\\
&b_{m-1,2m-1}=b_{m-1}\,,\quad b_{m-1,2m}=-ib_{m-1}\,,\quad b_{m-1,2m+1}=\ldots=b_{m-1,n}=0\,,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

při čemž $a_{m-1}>0$, $b_{m-1}>0$. Uvažovaná volba reperu tedy vede k tomu, že bod E_m (E_{-m}) je závislý na bodu $\mathbf{e}_{2m-1}+i\mathbf{e}_{2m}$ $(\mathbf{e}_{2m-1}-i\mathbf{e}_{2m})$, takže pro jednoduchost můžeme položiti $E_m=\mathbf{e}_{2m-1}+i\mathbf{e}_{2m}$, $E_{-m}=\mathbf{e}_{2m-1}-i\mathbf{e}_{2m}$. Poněvadž podle (3.19) není poměr funkcí a_{m-1} a b_{m-1} invariantní, můžeme v dalším předpokládati, že

$$
a_{m-1}=b_{m-1}=R_{m-1}\,. \tag{3.21}
$$

Předcházející úvaha tedy vede k tomu, že rovnice (3.17) se vzhledem k (3.20) a (3.21) zjednoduší na tvar

$$
\begin{aligned}
&\omega_{2m-3,2m-1}+i\omega_{2m-2,2m-1}=R_{m-1}\Omega_{-1}\,,\quad \omega_{2m-3,2m-1}-i\omega_{2m-2,2m-1}=R_{m-1}\Omega_{1}\,,\\
&\omega_{2m-3,2m}+i\omega_{2m-2,2m}=iR_{m-1}\Omega_{-1}\,,\quad \omega_{2m-3,2m}-i\omega_{2m-2,2m}=-iR_{m-1}\Omega_{1}\,,\\
&\qquad \omega_{2m-3,2m+1}=\omega_{2m-3,2m+2}=\ldots=\omega_{2m-3,n}=0\,,\\
&\qquad \omega_{2m-2,2m+1}=\omega_{2m-2,2m+2}=\ldots=\omega_{2m-2,n}=0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

a vnější kvadratické relace (3.19) přejdou v rovnice

$$
\begin{aligned}
&\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}}+i\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}-\omega_{2m-1,2m}}\right)\right]=0\,,\\
&\left[\Omega_{1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}}-i\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}-\omega_{2m-1,2m}}\right)\right]=0\,,\\
&[\Omega_{-1}(\omega_{2m-1,j}+i\omega_{2m,j})]=0\,,\quad [\Omega_{1}(\omega_{2m-1,j}-i\omega_{2m,j})]=0\\
&\qquad (j=2m+1,\,2m+2,\ldots,n)\,,
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

vyjadřující podmínky integrability soustavy rovnic (3.22).

Při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše je rovnicemi (3.22) analyticky vyjádřen předpoklad o m-tých laplaceovských transformacích sítě (V) v obou směrech. Tyto rovnice (3.22) doplňují rovnice (3.14) na soustavu rovnic, která je totožná se soustavou (1.8), takže uvažované plochy projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ jsou určeny touž soustavou diferenciálních rovnic jako minimální plochy neeukleidovského prostoru s $m-1$ kružnicemi normální křivosti. Poněvadž body E_m a E_{-m} opisují podle předpokladu plochy, nejsou ani formy $\omega_{2m-1,j}+$

$+ i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule pro všechna $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$.

Z předcházejících úvah tedy plyne, že každá plocha projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$, na níž existuje sdružená síť (V) mající uvedené vlastnosti, je v neeukleidovském prostoru $\mathbf{S}_n$ s absolutní kvadrikou $\mathbf{A}$ plochou $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti. Důkaz věty 3.2 je tím úplně proveden.

Předcházející věta platí v každém neeukleidovském prostoru dimense $n \geqq 2m + 1$ a obsahuje tedy jako nejjednodušší případ projektivní charakterisaci minimálních ploch $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořených do neeukleidovského prostoru dimense $n = 2m + 1$. V tomto případě lze o uvažovaných plochách získati přesnější výsledek, který zahrnuje pro $m = 2$ větu dokázanou O. Borůvkou v citovaném pojednání [2].

Věta 3.3. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť autopolární vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{A}$ prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ a periodická s periodou $2(m + 1)$.*

Důkaz. Každá minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, je podle (3.1) určena soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= - c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= - c\Omega_{-1} M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= - R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= - R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= - R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + (\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= - R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + (\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_{2m+1} &= - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,E_{-m}\\
&\qquad (k = 2, 3, \ldots, m - 1)\,,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

v níž obě formy $\omega_{2m-1,2m+1} \pm i\omega_{2m,2m+1}$ nejsou současně rovny nule. Podle vět 3.1 a 3.2 tvoří minimální křivky této plochy sdruženou síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se v žádném z obou směrů neukončí po m transformacích. Odtud plyne, že křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tvoří na ploše $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$, opsané bodem E_m (E_{-m}), sdruženou síť, a ze soustavy (3.24) jest ihned patrno, že bod $\mathbf{e}_{2m+1}$ opisuje plochu. Uvažujme nyní na ploše $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ libovolnou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a jí odpovídající křivku na ploše vytvořené bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$. Pohybuje-li se bod E_m (E_{-m}) po zvolené křivce, je spojnice bodu $E_m (E_{-m})$ s odpovídajícím bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$ tečnou v bodě $\mathbf{e}_{2m+1}$ křivky $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ opsané tímto bodem a současně tečnou v bodě E_m (E_{-m}) ke křivce soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$), jdoucí na ploše $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) uvažovaným bodem E_m (E_{-m}). Odtud je patrno, že soustavy křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tvoří na ploše opsané bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$ sdruženou síť, která je laplaceovskou transformací sítě na ploše $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$).

S použitím dřívějších výsledků je předcházející úvahou dokázáno, že $(m + 1)$-ní laplaceovské transformace sítě minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ splynou v jediné síti vytvořené odpovídajícími křivkami na ploše opsané bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$. Je tedy posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ periodická a snadno se vidí, že její perioda je $2(m + 1)$. Poněvadž kromě toho je bod M v každé své poloze polárně sdružen vzhledem k absolutní kvadrice $\mathbf{A}$ prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$ se všemi body$E_1, E_{-1}, \ldots, E_m, E_{-m}$, $\mathbf{e}_{2m+1}$, je posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě autopolární vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$. Vidíme tedy, že každá minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$ má projektivní vlastnosti, jež jsme uvedli v předcházející větě.

Dokážeme nyní obráceně, že každou plochu projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$, která má uvažované vlastnosti, lze považovati za minimální plochu neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, a opřeme se při tom o druhou část důkazu věty 3.2.

Poněvadž posloupnost laplaceovských transformací sítě na dané ploše je periodická s periodou $2(m + 1)$ a autopolární vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$, jsou první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace této sítě v obou směrech položeny na kvadrice $\mathbf{A}$ a mají vlastnost, že laplaceovské transformace vzniklé v obou směrech stejným počtem transformací, jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$ se všemi laplaceovskými transformacemi, které jsou v posloupnosti patřící k počáteční síti obsaženy mezi nimi. Je tedy síť na uvažované ploše sítí (V) a podle důkazu předcházející věty 3.2 lze tuto okolnost analyticky vyjádřiti při vhodné volbě pohyblivého reperu přiřazeného k ploše soustavou diferenciálních rovnic, která je totožná se soustavou (1.8). Užitím této soustavy nabudou diferenciální rovnice (3.2) právě tvaru (3.24) a odtud plyne, že každá plocha projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$, na níž existuje sdružená síť mající výše uvedené vlastnosti, může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, čímž je důkaz předcházející věty 3.3 dokončen.

3.3. Vyšetříme nyní podobným způsobem druhý z výše zmíněných případů, který jest určen požadavkem, že pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ je právě jedna z obou soustav forem $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ a $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ tvořena formami vesměs rovnými nule. Pro určitost budeme vzhledem k souměrnosti soustavy (3.1) předpokládati, že formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ jsou současně rovny nule, zatím co všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ vesměs nevymizí. Podobně jako v předcházejícím případě je dimense n prostoru $\mathbf{S}_n$ větší než $2m$. V dalším označíme $\boldsymbol{M}_2$ každou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je v n-rozměrném neeukleidovském prostoru S_n určena soustavou diferenciálních rovnic (3.1) s koeficienty vyhovujícími výše uvedenému předpokladu. O těchto plochách platí následující věta.

Věta 3.4. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru* P_n *může býti definována jako minimální plocha* $\boldsymbol{M}_2$ *s* $m - 1$ *kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného neeukleidovského prostoru* S_n, *tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť* (V), *jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí právě v jednom z obou směrů po m transformacích Goursatovým způsobem.*

Důkaz. Vzhledem k větě 3.1 existuje na každé minimální ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do neeukleidovského prostoru S_n, sdružená síť (V), vytvořená minimálními křivkami na ploše. Důkaz této věty je třeba doplniti tím, že ukážeme, že m-tá laplaceovská transformace uvažované sítě je v jednom směru sítí na ploše $\boldsymbol{E}_{-m}$ a v druhém směru křivkou $\boldsymbol{E}_m$. Vzhledem k výše učiněným předpokladům jsou však tyto vlastnosti snadno patrné ze soustavy (3.1), zvláště pokud jednají o uvedené transformaci ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$. Pokud se týká m-té laplaceovské transformace ve směru křivek $\Omega_1 = 0$, je patrno, že bod E_m opisuje křivku $\boldsymbol{E}_m$, jejíž tečny tvoří soustavu křivek $\Omega_1 = 0$ na ploše $\boldsymbol{E}_{m-1}$. Je tedy křivka $\boldsymbol{E}_m$ hranou vratu rozvinutelné plochy vytvořené bodem E_{m-1}, takže uvažovaná posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše se ukončí ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ po m transformacích Goursatovým způsobem.

K důkazu opačného tvrzení použijeme postupu druhé části důkazu věty 3.2, v níž jsme odvodili, že předpokládané vlastnosti ploch projektivního prostoru P_n, pokud jednají o sdružené síti (V), lze při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše vyjádřiti analyticky soustavou diferenciálních rovnic (1.8), takže uvažované plochy jsou pak určeny soustavou diferenciálních rovnic (3.1). Učiníme-li ve smyslu předcházející věty předpoklad, že posloupnost laplaceovských transformací se ukončí po m transformacích Goursatovým způsobem právě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$, musí bod E_{m-1} opisovati rozvinutelnou plochu $\boldsymbol{E}_{m-1}$, jejíž tvořicí přímky patří k soustavě $\Omega_1 = 0$ a jsou tečnami křivky $\boldsymbol{E}_m$ opsané bodem E_m. To však podle (3.1) nastane pouze tehdy, když pro $j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n$ bude $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j} = 0$. Poněvadž m-tá laplaceovská transformace sítě ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$ je v uvažovaném případě sítí na ploše, nemohou býti pro uvedená j všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule.

Zjistili jsme tedy, že každá plocha projektivního prostoru P_n, která má uvedené projektivní vlastnosti, může býti považována za plochu $\boldsymbol{M}_2$ neeukleidovského prostoru S_n.

Je-li ve zvláštním případě pro dimensi n prostoru S_n splněn vztah $n = 2m + 1$, lze předcházející výsledek vysloviti přesněji, čímž dostaneme výsledek zobecňující větu odvozenou O. Borůvkou pro $m = 2$ v pojednání uvedeném na konci odstavce 3.2.

Věta 3.5. *Plocha* $(2m + 1)$*-rozměrného projektivního prostoru* $\mathbf{P}_{2m+1}$ *může býti definována jako plocha* $\boldsymbol{M}_2$ *s* $m - 1$ *kružnicemi normální křivosti, vnořená do* $(2m + 1)$*-rozměrného neeukleidovského prostoru* $\mathbf{S}_{2m+1}$*, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť autopolární vzhledem k regulární kvadrice* $\mathbf{A}$ *prostoru* $\mathbf{P}_{2m+1}$*, jejíž první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace leží na kvadrice* $\mathbf{A}$ *a jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v jednom směru po* m *transformacích Goursatovým způsobem a v druhém směru po* $m + 1$ *transformacích Laplaceovým způsobem.*

Důkaz. Každá uvažovaná minimální plocha neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$ jest analyticky vyjádřena soustavou diferenciálních rovnic (3.24), v níž z obou forem $\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1}$ a $\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1}$ je pouze první identicky rovna nule. Podle vět 3.1 a 3.2 tvoří minimální křivky na dané ploše sdruženou síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí právě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ po m transformacích Goursatovým způsobem. Po m transformacích ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$ dostaneme tedy sdruženou síť na ploše $\boldsymbol{E}_{-m}$ opsané bodem E_{-m}. Ze soustavy rovnic (3.24), v níž je dosazeno podle hořejšího předpokladu, nyní plyne, že tečny křivek soustavy $\Omega_{-1} = 0$ v jejích průsečících s pevně zvolenou křivkou soustavy $\Omega_1 = 0$ jdou bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$, který je pevný, pohybuje-li se bod E_{-m} po zvolené křivce. Bod $\mathbf{e}_{2m+1}$ opisuje křivku, která je geometrickým místem vrcholů kuželových ploch, které se dotýkají plochy $\boldsymbol{E}_{-m}$ podél křivek soustavy $\Omega_1 = 0$. Odtud je patrno, že posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě se ukončí ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$ po $m + 1$ transformacích Laplaceovým způsobem. Použijeme-li nakonec téže okolnosti jako v důkazu věty 3.3, zjistíme, že uvedená posloupnost je autopolární vzhledem k absolutní kvadrice prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$, takže síť minimálních křivek na uvažované ploše má v tomto případě všechny vlastnosti obsažené v předcházející větě.

Chceme-li podat důkaz opačného tvrzení, všimneme si, že z předpokladů o síti existující na dané ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ zejména plyne, že je sdruženou sítí (V). Podle důkazu věty 3.2 je tato okolnost vyjádřena soustavou diferenciálních rovnic (1.8), vedoucích podle (3.2) k rovnicím tvaru (3.24). V těchto rovnicích je z důvodu, použitého na konci důkazu věty 3.4. $\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1} = 0$ a odtud je vidět, že uvažovanou plochu projektivního prostoru $\mathbf{P}_{2m+1}$ lze považovat za plochu $\boldsymbol{M}_2$ vnořenou do neeukleidovského prostoru $\mathbf{S}_{2m+1}$.

3.4. Zbývá nám ještě zmíniti se o plochách majících uvažované metrické vlastnosti a podrobených analytické podmínce, že jak formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, tak i formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ jsou pro všechna $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ současně rovny nule. Označíme v tomto případě $\boldsymbol{M}_3$ každou plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je za uvedeného předpokladu určena v n-rozměrném neeukleidovském prostoru $\mathbf{S}_n$ soustavou diferenciálních rovnic

(3.1). Předcházející předpoklad vede k tomu, že pro dimensi n prostoru $\mathbf{S}_n$ je $n \geqq 2m$.

Věta 3.6. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru* $\mathbf{P}_n$ *může býti definována jako minimální plocha* $\boldsymbol{M}_3$ *s* $m - 1$ *kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného neeukleidovského prostoru* $\mathbf{S}_n$, *tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v obou směrech po m transformacích Goursatovým způsobem.*

Důkaz. Správnost této věty se zjistí tím, že se důkazy vět 3.1 a 3.2 doplní, pokud se týká nově přistupujících vlastností sdružené sítě (V), týmž způsobem, jehož bylo použito při důkazu věty 3.3.

Předcházející věta platí v každém prostoru dimense $n \geqq 2m$ a její znění v případě minimální plochy $\boldsymbol{M}_3$ vnořené do $2m$-rozměrného prostoru se od předcházející obecné věty neliší a proto je nebudeme zvlášť uváděti. Těmito výsledky jsou doplněny úvahy O. Borůvky z pojednání [1].

LITERATURA

[1] *O. Borůvka:* O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti, Rozpravy České akademie věd a umění, třída II, *XXXVII*, 1928.

[2] *O. Borůvka:* Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university *106*, 1929.

[3] *O. Borůvka:* Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university I, *165*, 1932; II, *212*, 1935, III, *214*, 1935.

Резюме

ПРОЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОКРУЖНОСТЯМИ НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно

(Поступило в редакцию 17/VI 1957 г.)

Пусть $\mathbf{S}_n$ ($n \geqq 4$) — пространство n измерений с постоянной кривизной c. Рассмотрим минимальную поверхность $\boldsymbol{M}$, вложенную в это пространство, и предположим, что индикатрисы нормальной кривизны, в числе $m - 1$ ($2 \leqq m \leqq [\frac{1}{2}n]$), являются в каждой точке M поверхности окружностями. Каждая поверхность $\boldsymbol{M}$ определена системой дифференциальных уравне-

ний (2,1) в случае евклидова пространства S_n ($c = 0$) и системой (3,1) в случае неевклидова пространства S_n ($c \neq 0$). Поверхность M обозначена через M_1, M_2, M_3, если, соотвественно, по крайней мере одна форма каждой из обеих систем $\omega_{2m-1,j} \pm i\omega_{2m,j}$ ($j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n$) не равна нулю, или по крайней мере одна форма только одной из обеих систем не равна нулю, тогда как все формы второй системы равны нулю, или, наконец, все формы обеих систем равны нулю. Измерение пространства S_n удовлетворяет в этих случаях неравенству $n \geqq 2m+1$, или $n \geqq 2m+1$, или, наконец, $n \geqq 2m$.

Главные результаты этой работы содержатся в следующих теоремах:

Для того, чтобы поверхность проективного пространства P_n n измерений могла быть определена как поверхность M_1, M_2, M_3 евклидова пространства S_n, необходимо и достаточно, чтобы на поверхности существовала такая сопряжённая сеть, последовательность Лапласа которой обрывается в обоих направлениях после первого преобразования по способу Лапласа на кривых, которые принадлежат и с их соприкасающимися пространствами порядка $m - 1$ неособому многообразию второго порядка A линейного пространства $n - 1$ измерений пространства P_n. Эти кривые произвольны, но удовлетворяют условию, что ни одна из них не погружена, или только одна из них погружена, или, наконец, каждая из них погружена в линейное пространство $m - 1$ измерений пространства P_n.

Для того, чтобы поверхность проективного пространства P_n n измерений могла быть определена как M_1, M_2, M_3 неевклидова пространства S_n, необходимо и достаточно, чтобы на поверхности существовала такая сопряжённая сеть, что первые, вторые, ..., m-ые преобразования Лапласа в обоих направлениях принадлежат неособому многообразию второго порядка A пространства P_n и преобразования Лапласа, возникшие из рассматриваемой сети равным числом преобразований в обоих направлениях, полярно сопряжены относительно гиперповерхности A со всеми преобразованиями Лапласа начальной сети, которые находятся между упомянутыми преобразованиями. Эта последовательность не обрывается ни в каком из обоих направлений после m преобразований, или обрывается только в одном направлении после m преобразований по способу Гурсата, или, наконец, обрывается в обоих направлениях после m преобразований по способу Гурсата. Если $n = 2m + 1$, то последовательность Лапласа является периодической с периодом $2(m + 1)$ и автополярной относительно гиперповерхности A, или обрывается во втором направлении после $m + 1$ преобразований по способу Лапласа.

Résumé

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES SURFACES MINIMA A CIRCONFÉRENCES DE COURBURE NORMALE

KAREL SVOBODA, Brno

(Reçu le 17 juin 1957)

Soit $\mathbf{S}_n (n \geqq 4)$ un espace à n dimensions à courbure constante c. Considérons une surface minimum $\boldsymbol{M}$ plongée dans cet espace et supposons que les indicatrices de courbure normale, en nombre de $m - 1$ $(2 \leqq m \leqq [\frac{1}{2}n])$, en chaque point M de la surface soient des circonférences. La surface $\boldsymbol{M}$ se trouve déterminée par le système d'équations différentielles (2.1) dans le cas de l'espace euclidien $\mathbf{S}_n (c = 0)$, et par le système (3.1) dans le cas d'un espace non-euclidien $\mathbf{S}_n$ $(c \neq 0)$. Nous désignons la surface $\boldsymbol{M}$ par $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$ suivant qu'au moins une forme de chaque des deux systèmes $\omega_{2m-1,j} \pm i\omega_{2m,j}$ $(j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n)$ soit différente de zéro, ou bien qu'au moins une forme d'un de ces systèmes soit différente de zéro tandis que les formes de l'autre système s'annulent identiquement, ou bien, finalement, que toutes les formes des deux systèmes soient nulles. La dimension de l'espace $\mathbf{S}_n$ satisfait dans ces cas à l'inégalité $n \geqq 2m + 1$, ou bien $n \geqq 2m + 1$, ou bien, finalement $n \geqq 2m$.

Les résultats principaux contenus dans ce Mémoire sont fournis par les théorèmes suivants:

Pourqu'une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_n$ à n dimensions puisse être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$ de l'espace euclidien $\mathbf{S}_n$, il faut et il suffit qu'elle soit douée d'un réseau conjugué tel, que la suite des transformations laplaciennes s'arrête, dans les deux sens, après la première transformation de la manière de Laplace aux courbes qui sont situées elles mêmes, ainsi que leurs espaces osculateurs d'ordre $m - 1$, sur une quadrique régulière $\mathbf{A}$ d'un sous-espace linéaire à $n - 1$ dimensions de l'espace $\mathbf{P}_n$. Les courbes en question peuvent être arbitraires, à la condition près, qu'aucune d'entre elles, ou bien précisément une, ou bien, finalement, toutes les deux se trouvent plongées dans un sous-espace linéaire à $m - 1$ dimensions de l'espace $\mathbf{P}_n$.

Pourqu'une surface de l'espace projectif $\mathbf{P}_n$ à n dimensions puisse être définie comme une surface $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$ d'un espace non-euclidien $\mathbf{S}_n$, il faut et il suffit, que les premières, deuxièmes, ..., m-ièmes transformations laplaciennes, dans les deux sens, soient situées sur une quadrique régulière $\mathbf{A}$ de l'espace $\mathbf{P}_n$ et que les transformations laplaciennes, déduites du réseau en question par le même nombre de transformations dans un sens et dans l'autre, soient conjuguées par rapport à la quadrique $\mathbf{A}$ à toutes les transformations laplaciennes du réseau initial qui sont contenues entre les transformations mentionnées. Cette suite ne s'arrête dans

aucun des deux sens après m transformations, ou bien elle s'arrête dans un des deux sens après m transformations de la manière de Goursat, ou bien, finalement, elle s'arrête dans les deux sens après m transformations de la manière de Goursat. Dans le cas $n = 2m + 1$, la suite des transformations laplaciennes est périodique à période $2(m + 1)$ et autopolaire par rapport à la quadrique **A**, *ou bien elle s'arrête dans l'autre sens après $m + 1$ transformations de la manière de Laplace.*