Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Pták

Odhad chyby při přibližném řešení integrálních rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 4, 427--447

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108229

ODHAD CHYBY PŘI PŘIBLIŽNÉM ŘEŠENÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Došlo dne 29. října 1954.) DT: 517.948

Tato práce navazuje na práci L. V. KANTOROVIČE [1]. Jejím cílem je vypracovat methodami funkcionální analysy obecné schema, které se dá užít k odhadu chyby různých method přibližných řešení integrálních rovnic. Podstata methody záleží v tom, že spolu s Banachovým prostorem X, v němž máme řešit rovnici $Ax = y$ uvažujeme podprostor $\tilde{X} \subset X$, ve kterém řešíme přibližnou rovnici $PA\tilde{x} = Py$, kdež P je projekce X na $\tilde{X}$. Zabýváme se potom odhadem rozdílu skutečného řešení x a přibližného řešení $\tilde{x}$.

Pro přibližné řešení integrálních rovnic byla vypracována řada method, založených na nejrůznějších myšlenkách. Avšak již zcela povrchní porovnání vyšetřování existence řešení a odhadu chyby v jednotlivých případech ukazuje, že užívané methody mají mnoho společného, takže se naskýtá otázka, zda není možno nějak jednoduše formulovat obecné principy, na kterých jsou jednotlivá vyšetřování založena. Touto otázkou se poprvé zabýval L. V. KANTOROVIČ ve své zajímavé stati [1], která obsahuje celou řadu důležitých myšlenek a výsledků.

Je zásluhou L. V. Kantoroviče, že ukázal, jak je možno methodami funkcionální analysy získat jednotný pohled na celou řadu v praxi používaných přibližných method řešení integrálních rovnic a zároveň hlouběji pochopit všechny činitele, ovlivňující odhad chyby. Byla to právě práce L. V. Kantoroviče, která dala popud k napsání následujícího článku. Ukazuje se totiž, že užitím trochu jiné myšlenky je možno docíliti zjednodušení obecných úvah a podati obecné schema, které se dá použít k odhadu chyby různých method přibližných řešení integrálních rovnic.

Vyložené methody lze použít také k získání některých theoretických výsledků týkajících se přibližných method. O těchto výsledcích hodláme pojednat v některém z příštích čísel časopisu.

Nynější práce si neklade úkol podat hotové recepty k řešení integrálních rovnic. Přesto, že uvedené theoretické odhady byly prověřeny na některých praktických výpočtech, k podobnému úkolu je možno zodpovědně přistoupit jen po získání velmi široké zkušenosti v řešení konkretních úloh tohoto typu, čehož nebylo možno zatím dosáhnout.

Methody odhadu chyby vyložené v nynější práci nejsou ve svém použití omezeny na případy níže uvedené. Ukážeme později ještě další aplikace těchto a podobných myšlenek.

K porozumění článku postačí jen nejelementárnější znalosti z theorie normovaných lineárních prostorů.

1.

Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Řekneme, že zobrazení K prostoru X do sebe je lineární, jestliže pro každou dvojici reálných čísel λ_1, λ_2 a každou dvojici x_1, x_2 prvků prostoru X platí

$$K(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 K x_1 + \lambda_2 K x_2 .$$

Řekneme, že zobrazení K prostoru X do sebe je ohraničené, jestliže existuje číslo α tak, že pro všechna $x \in X$ platí odhad

$$|Kx| \leqq \alpha |x| .$$

Takové číslo α nazýváme potom hranicí zobrazení K. Jestliže K jest ohraničené zobrazení prostoru X do sebe, pak mezi všemi hranicemi zobrazení K zřejmě existuje nejmenší; tuto hranici nazveme normou zobrazení K a označíme $|K|$. Snadno se zjistí, že pro ohraničené zobrazení K platí

$$|K| = \sup_{|x| \leqq 1} |Kx| .$$

Zobrazení prostoru K do sebe nazveme lineárním operátorem v X, jestliže je zároveň lineární a ohraničené.

Nechť A a B jsou dva lineární operátory v X. Položme pro každé $x \in X$

$$Cx = A(Bx) .$$

Zřejmě C jest opět lineární operátor v X. Z nerovností

$$|Cx| \leqq |A| \, |Bx| \leqq |A| \, |B| |x|$$

vyplývá, že $|C| \leqq |A| \, |B|$. Operátor C nazýváme součinem operátorů A a B (v tomto pořadí) a píšeme $C = AB$. Zobrazení X do X, které zobrazuje každý prvek $x \in X$ sám na sebe, jest zřejmě lineárním operátorem v X. Nazveme je jednotkovým operátorem a označíme J. Množina všech lineárních operátorů na prostoru X tvoří při nasnadě jsoucí definici sečítání a násobení skalárem a při právě uvedené definici násobení normovanou algebru, kterou budeme značiti $E(X)$.

Řekneme, že operátor A_l jest levým inversním operátorem k operátoru A, jestliže platí $A_l A = J$.

Řekneme, že operátor A_r jest pravým inversním operátorem k operátoru A, jestliže platí $AA_r = J$.

Řekneme, že operátor A^{-1} jest inversním operátorem k operátoru A, jestliže platí $A^{-1}A = AA^{-1} = J$.

Vztahy mezi zavedenými pojmy objasníme v několika poznámkách.

(1,1) *Daný operátor A má nejvýše jeden inversní operátor.*

Důkaz. Skutečně, předpokládejme, že B_1 a B_2 jsou inversními operátory k operátoru A. Potom

$$B_1 = B_1 J = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = JB_2 = B_2 .$$

(1,2) *Jestliže daný operátor A má jak levý inversní A_l tak i pravý inversní A_r, potom A má inversní operátor A^{-1} a platí*

$$A_r = A_l = A^{-1} .$$

Důkaz. Za uvedených předpokladů je

$$A_r = JA_r = (A_l A)A_r = A_l(AA_r) = A_l J = A_l ,$$

odkud ihned plyne existence inversního operátoru.

(1,3) *Nechť operátor B jest inversním operátorem k operátoru A. Potom operátor A jest inversním operátorem k operátoru B.*

Říkáme potom, že operátory A a B jsou navzájem inversní.

Důkaz je zřejmý.

(1,4) *Nechť operátory K_l a K_r splňují vztah*

$$K_l K_r = J .$$

Potom zobrazení K_r je prosté a zobrazení K_l je plné. Operátory K_l a K_r jsou navzájem inversní právě když je splněna jedna z následujících podmínek:

α) *K_l je prosté.*

β) *K_r je plné.*

Důkaz. Jestliže $K_r x_1 = K_r x_2$ jest $x_1 = K_l K_r x_1 = K_l K_r x_2 = x_2$, takže K_r je prosté. Je-li dáno $y \in X$, potom $K_l(K_r y) = y$, takže K_l je plné.

Nechť nyní K_l je prosté. Potom

$$K_l(K_r K_l) = (K_l K_r)K_l = K_l ,$$

takže

$$K_l(K_r K_l) = K_l J .$$

Protože však K_l je prosté, musí $K_r K_l = J$.

Nechť za druhé K_r je plné. Potom

$$(K_r K_l)K_r = K_r(K_l K_r) = K_r ,$$

takže

$$(K_r K_l)K_r = K_r .$$

Protože však K_r je plné, musí $K_r K_l = J$.

(1,5) Snadno lze udati příklad dvou lineárních operátorů K_l a K_r, které splňují vztah $K_l K_r = J$, ale nejsou navzájem inversní. Nechť X znamená normovaný prostor všech konvergentních posloupností reálných čísel

$$x = \{x_1, x_2, \dots\},$$

kdež existuje $\lim x_k = x_0$, při čemž $|x| = \max_{k=0,1,2,\dots} |x_k|$.

Pro každé $x \in X$ definujeme

$$K_l x = \{x_2, x_3, x_4, \dots\},$$
$$K_r x = \{0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Zřejmě K_l i K_r jsou lineární operátory na X s normou 1, které splňují vztah $K_l K_r = J$. Pro každé $x \in X$ platí však

$$K_r K_l x = \{0, x_2, x_3, \dots\}.$$

Operátor K_r má tedy levý inversní operátor K_l, ale nemá inversní operátor, operátor K_l má pravý inversní operátor K_r, ale nemá inversní operátor.

V následujících větách budeme předpokládat, že prostor X jest úplný. Za tohoto předpokladu dá se totiž snadno dokázati, že i algebra $E(X)$ jest úplná, čehož budeme podstatným způsobem využívat.

(1,6) *Nechť X je úplný normovaný lineární prostor. Nechť $B \in E(X)$. Nechť $|B - J| < 1$. Potom B má inversní operátor B^{-1}, pro nějž platí*

$$|B^{-1}| \leqq \frac{1}{1 - |B - J|},$$
$$|B^{-1} - J| \leqq \frac{|B - J|}{1 - |B - J|}.$$

Důkaz. Označme $V = (J - B)$. Z úplnosti algebry $E(X)$ a z odhadu $|V| < 1$ plyne konvergence řady

$$J + V + V^2 + \dots,$$

jejíž součet, jak se snadno zjistí, jest inversním operátorem k B. Uvedené odhady se dostanou snadným počtem.

(1,7) *Nechť X je úplný normovaný lineární prostor. Nechť L a R jsou lineární operátory na X, pro něž platí*

$$\beta = |LR - J| < 1.$$

Potom operátor R má levý inversní R_1 a operátor L má pravý inversní L_1, pro něž platí

$$|R_1| \leqq \frac{1}{1-\beta}|L|, \quad |L_1| \leqq \frac{1}{1-\beta}|R|,$$
$$|R_1 - L| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}|L|, \quad |L_1 - R| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}|R|,$$
$$|R_1 L_1 - J| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Důkaz. Podle (1,6) bude za uvedených předpokladů existovati inversn operátor Z^{-1} k operátoru $Z = LR$. Položme

$$L_1 = RZ^{-1}\,, \quad R_1 = Z^{-1}L\,.$$

Jest

$$LL_1 = L(RZ^{-1}) = (LR)Z^{-1} = ZZ^{-1} = J\,,$$

$$R_1R = (Z^{-1}L)R = Z^{-1}(LR) = Z^{-1}Z = J\,.$$

Odhady norem provedeme jen pro operátor L_1. Jest podle (1,6)

$$|L_1| = |RZ^{-1}| \leqq |R|\,|Z^{-1}| \leqq |R|\,\frac{1}{1-\beta}\,,$$

$$|L_1 - R| = |RZ^{-1} - R| = |R(Z^{-1} - J)| \leqq |R|\,|Z^{-1} - J| \leqq |R|\,\frac{\beta}{1-\beta}\,.$$

Nakonec dostáváme

$$R_1L_1 - J = Z^{-1}LL_1 - J = Z^{-1} - J\,,$$

odkud plyne poslední odhad.

Prvek $P \in E(X)$ nazýváme idempotentní, jestliže $P^2 = P$. Mějme idempotentní operátor P. Položme

$$Z = Z(P) = \mathop{E}_{x}\,[x \in X, Px = x]\,,$$

$$N = N(P) = \mathop{E}_{x}\,[x \in X, Px = 0]\,,$$

takže Z i N jsou uzavřené podprostory v X. Ukažme nejprve, že podprostory Z a N mají právě jeden společný bod. Skutečně, nechť $w \in Z \cap N$. Protože $w \in Z$, jest $w = Pw$. Protože $w \in N$, jest $Pw = 0$, odkud $w = 0$. Ukažme dále, že každý prvek $x \in X$ se dá psáti ve tvaru $n + z$, $n \in N$, $z \in Z$. Skutečně, rozklad

$$x = (x - Px) + Px$$

zřejmě je rozkladem žádaného tvaru. Z hořejního okamžitě plyne jednoznačnost takového rozkladu.

Všimneme si ještě, že prostor Z je vlastně množinou všech prvků tvaru Px, kde $x \in X$.

Skutečně, každý prvek tvaru Px patří do Z, neboť $P(Px) = Px$; naopak, prvek splňující vztah $x = Px$ jest zřejmě tvaru Px.

Každý idempotentní prvek algebry $E(X)$ představuje tedy vlastně projekci prostoru X na prostor Z. Z tohoto důvodu budeme idempotentní operátory nazývati též projektory.

Všimneme si nyní podrobněji projektorů na podprostory konečné dimense. Budeme potřebovati především několik poznámek k označení. Jestliže X je normovaný lineární prostor, označme Y lineární prostor všech lineárních funkcionálů na X. Je-li $y \in Y$, potom hodnotu funkcionálu y v bodě $x \in X$ označíme $\langle x, y \rangle$.

Budiž X_0 podprostor X, Y_0 podprostor Y. Řekneme, že podprostor Y_0 určuje podprostor X_0, jestliže platí implikace

$$x_0 \in X_0\,, \quad \langle x_0, Y_0 \rangle = 0 \Rightarrow x_0 = 0\,.$$

Smysl uvedené definice záleží v tom, že v tomto případě je prvek $z_0 \in X_0$ určen, známe-li hodnoty $\langle z_0, y_0 \rangle$ pro každé $y_0 \in Y_0$. Skutečně, jestliže máme ještě $z_0' \in X_0$ takové, že pro každé $y_0 \in Y_0$ jest

$$\langle z_0, y_0 \rangle = \langle z_0', y_0 \rangle\,,$$

dostáváme $z_0 - z_0' \in X_0$, $\langle z_0 - z_0', Y_0 \rangle = 0$, takže musí $z_0 - z_0' = 0$, tedy $z_0 = z_0'$.

Nechť nyní X_0 jest podprostor konečné dimense n a nechť podprostor $Y_0 \subset Y$ určuje X_0. Předpokládejme dále, že i Y_0 má dimensi n.

Volme basi $e_1 \dots e_n$ v prostoru X_0 a basi $f_1 \dots f_n$ v prostoru Y_0. Potom determinant utvořený z čísel $\langle e_i, f_j \rangle$ jest různý od nuly. Jinak by totiž bylo možno nalézti nenulovou lineární kombinaci x prvků e_i tak, že $\langle x, f_j \rangle = 0$ pro všechna j, odkud $\langle x, Y_0 \rangle = 0$, což je spor s předpokladem, že Y_0 určuje X_0. Zejména odtud plyne, že pro každou posloupnost $\beta_1 \dots \beta_n$ reálných čísel existuje právě jeden $x_0 \in X_0$ tak, že

$$\langle x_0, f_j \rangle = \beta_j\,.$$

Nyní můžeme popsati všechny projektory na podprostor konečné dimense.

(1,8) *Nechť X_0 je podprostor dimense n. Ke každému projektoru P prostoru X na X_0 existuje podprostor $Y_0 \subset Y$ dimense n, který určuje X_0. Přitom projekce x_0 prvku $x \in X$ je určena požadavky*

$$(\alpha)\ x_0 \in X_0\,,$$

$$(\beta)\ \langle x_0, f_j \rangle = \langle x, f_j \rangle\,,$$

kdež f_j je nějaká base prostoru Y_0.

Obráceně, jestliže je dán podprostor $Y_0 \subset Y$ dimense n, který určuje X_0, označme pro každé $x \in X$ znakem Px prvek, určený požadavky (α) *a* (β). *Potom P je projekce X na X_0.*

Důkaz. Nechť P jest projektor X na X_0. Označme $Y_0 = P^*(Y)$. Ukážeme nejprve, že Y_0 určuje X_0. Skutečně, mějme $x \in X_0$ takové, že $\langle x, Y_0 \rangle = 0$. Protože $x \in X_0$, jest $x = Px$, a máme tedy pro každé $y \in Y$

$$\langle x, y \rangle = \langle Px, y \rangle = \langle x, P^*y \rangle = 0\,,$$

takže $x = 0$. Protože Y_0 určuje X_0 musí zřejmě $\dim Y_0 \geqq \dim X_0$. Rovnost dimensí vyplyne z toho, že i podprostor X_0 určuje Y_0. To však je jasné z duality, uvážíme-li, že P^* je zase projektor. Jestliže $x_0 = Px$, potom zřejmě

$$\langle x - x_0, Y_0 \rangle = \langle x - x_0, P^*(Y) \rangle = \langle P(x - x_0), Y \rangle = 0 \,,$$

neboť $P(x - x_0) = 0$.

Je-li naopak dán podprostor $Y_0 \subset Y$ dimense n, který určuje X_0, jest podle předchozích úvah požadavky (α) a (β) jednoznačně určen prvek Px. Abychom dokázali, že P je projektor na X_0 stačí si uvědomiti, že především $P(X) \subset X_0$ a za druhé, že pro $x_0 \in X_0$ je $Px_0 = x_0$. Obojí je však ihned patrno z definice zobrazení P. Tím je důkaz dokončen.

Mějme tedy takovou projekci na n-dimensionální podprostor X_0. Jestliže potom každému $x \in X_0$ přiřadíme vektor o souřadnicích $\langle x, f_j \rangle$, dostaneme zřejmě algebraický isomorfismus mezi X_0 a prostorem číselných n-tic. Protože každý takový isomorfismus je zároveň isomorfismem ve smyslu topologie, existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že

$$|x| \leqq \alpha \max_j |\langle x, f_j \rangle| \,.$$

Tohoto odhadu budeme později používat.

V dalším budeme vyšetřovat především operátory typu

$$K = J - \lambda H \,,$$

když λ je reálné číslo, $H \in E(X)$. Operátory tohoto typu mají některé jednoduché vlastnosti, které formulujeme jako lemmata pro další použití.

(1,8) *Nechť $H \in E(X)$, m je celé nezáporné číslo. Označme*

$$K = J - \lambda H \,, \quad G_m = \sum_{j=0}^{m-1} (\lambda H)^j \,.$$

Potom platí

$$G_m K = K G_m = J - \lambda^m H^m \,.$$

Důkaz je snadný.

(1,9) *Mějme nyní prvek $y \in X$. Nechť x a z jsou spojeny vztahem*

$$x = G_m y + z \,.$$

Potom prvek x splňuje rovnici $Kx = y$, právě když prvek z splňuje rovnici

$$Kz = \lambda^m H^m y \,.$$

Jestliže potom $Kx = y$, jest $z = \lambda^m H^m x$.

Důkaz. Podle hořeního

$$Kx = KG_m y + Kz = y - \lambda^m H^m y + Kz \,,$$

odkud

$$Kx - y = Kz - \lambda^m H^m y \,,$$

což dokazuje první část tvrzení. Jestliže nyní $Kx = y$, dostáváme snadným počtem:

$$z = x - G_m y = x - G_m Kx = \lambda^m H^m x \,.$$

Význam předchozího lemmatu jest nasnadě. Máme-li najít prvek $x \in X$, který splňuje rovnici $Kx = y$, můžeme jej hledat ve tvaru $x = G_m y + z$, při čemž z musí splňovat rovnici $Kz = \lambda^m H^m y$. Úloha řešit rovnici $Kx = y$ je tedy převedena na řešení rovnice $Kz = \lambda^m H^m y$, která, jak později uvidíme, může být způsobilejší k přibližnému řešení než původní rovnice $Kx = y$.

Řekneme, že operátor $H \in E(X)$ má vlastnost F, jestliže je splněno následující tvrzení:

Je-li λ dané reálné číslo, potom operátor $K = J - \lambda H$ je prostý, právě když je plný.

Dokážeme nyní následující jednoduché lemma.

(1,10) *Nechť operátor H má vlastnost F. Potom operátor $K = J - \lambda H$ má inversní, právě když má levý inversní.*

Důkaz. Skutečně, nechť K má levý inversní K_l. Potom podle (1,4) jest K prostý. Protože H splňuje vlastnost F, jest také plný, takže podle (1,4) operátory K a K_l jsou navzájem inversní.

2.

Budiž dán úplný normovaný lineární prostor X, uzavřený podprostor $\tilde{X}$ prostoru X a projektor P, zobrazující X na $\tilde{X}$.

Budiž dán $H \in E(X)$ a utvořme $K = J - \lambda H$. Uvažujme operátor PK. Jest ihned patrno, že operátor PK zobrazí prostor $\tilde{X}$ do sebe.

Parciální zobrazení PK restringované na $\tilde{X}$ je tedy lineárním operátorem na $\tilde{X}$. V dalším budeme užívat stejného označení jak pro operátor PK na prostoru X, tak i pro příslušný prvek algebry $E(\tilde{X})$. Ze souvislosti bude vždy zřejmé, o který z obou operátorů se jedná.

Operátoru K přiřadíme tedy operátor PK na prostoru $\tilde{X}$. Dá se očekávat, že při vhodné volbě prostoru $\tilde{X}$ a projektoru P dostaneme operátor, jehož vlastnosti lze jednak lépe přehlédnout a za druhé, jehož vlastnosti se příliš neliší od vlastností původního operátoru K (ve smyslu, který budeme později precisovat).

V aplikacích budeme většinou voliti $\tilde{X}$ konečně dimensionální, takže půjde v podstatě o vyšetřování matic. Vznikají především dvě hlavní otázky:

(1) Dejme tomu, že operátor $PK \in E(\tilde{X})$ má inversní. Za jakých předpokladů můžeme potom zaručit existenci inversního operátoru k operátoru $K \in E(X)$?

(2) Jestliže se nám již podařilo dokázat existenci inversního operátoru k operátoru K, máme odhadnout, jak dalece se od sebe liší řešení x dané rovnice $Kx = y$ od řešení $\tilde{x} \in \tilde{X}$ přibližné rovnice $PK\tilde{x} = Py$.

Uvidíme, že je možné současně udat odpověď na obě otázky. V dalších řádcích pokusíme se objasnit na jednom speciálním případě podstatu používaných method. Zvolíme případ $m = 1$ (tedy $G_m = J$), neboť na něm zřetelně vyniknou hlavní myšlenky odhadu.

Budiž dán prvek $x \in X$. Označme $Kx = y$ a položme $x = y + z$. Potom, jak víme podle (1,9), prvek z bude splňovat vztahy

$$Kz = \lambda Hy \,, \quad z = \lambda Hx \,.$$

Předpokládejme dále, že operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má inversní operátor W. Můžeme tedy najít prvek $\tilde{z} \in \tilde{X}$ tak, aby splňoval přibližnou rovnici

$$PK\tilde{z} = P\lambda Hy \quad (= PKz) \,.$$

Za přibližné řešení rovnice $Kx = y$ vezmeme potom prvek $\tilde{x} = y + \tilde{z}$. Pokusíme se odhadnout rozdíl $|x - \tilde{x}|$.

Jest

$$x - \tilde{x} = z - \tilde{z} = z - WPKz = (J - WPK)\, z \,.$$

Vezměme nyní libovolný prvek $z_1 \in \tilde{X}$. Protože $WPKz_1 = z_1$, bude

$$x - \tilde{x} = (J - WPK)\, z = (J - WPK)(z - z_1) \,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq |J - WPK|\, |z - z_1| \,.$$

Je tedy vidět, že rozdíl $|x - \tilde{x}|$ bude tím menší, čím lépe je možno aproximovat prvek z prvky prostoru $\tilde{X}$. Je však $z = \lambda Hx$. Vznikne tedy zcela přirozeným způsobem otázka po aproximovatelnosti prvků tvaru Hx pomocí prvků prostoru $\tilde{X}$. Budeme předpokládat, že existuje malé číslo $\varepsilon > 0$ s následující vlastností:

Ke každému $x \in X$ existuje $x' \in \tilde{X}$ tak, že

$$|Hx - x'| \leqq \varepsilon |x| \,.$$

Prvek $z = \lambda Hx$ bude tedy aproximován prvkem $\lambda x'$ s chybou nejvýše $|\lambda|\, \varepsilon |x|$. Dostáváme celkem

$$|x - \tilde{x}| \leqq |J - WPK|\, |\lambda|\, \varepsilon |x| = \beta |x| \,.$$

Předpokládejme nyní, že $\beta < 1$. Potom snadno nahlédneme, že zobrazení K je prosté. Skutečně, jestliže $Kx = 0$, dostaneme $y = 0$ a tedy i $Kz = \lambda Hy = 0$. Je tedy $\tilde{z} = 0$, takže $\tilde{x} = 0$. Dostaneme potom

$$|x| = |x - \tilde{x}| \leqq \beta |x| \,,$$

což není jinak možné než když $x = 0$. Operátor K má tedy inversní. Tím je řešena první část naší úlohy, vztahující se k existenci inversního operátoru k operátoru K. Zároveň získané nerovnosti $|x - \tilde{x}| \leqq \beta |x|$ je možno použít k odhadu rozdílu mezi skutečným a přibližným řešením. K tomu cíli musíme z pravé strany naší nerovnosti odstranit závislost na (neznámé) veličině $|x|$. To však je snadné, neboť naši nerovnost můžeme přepsat ve tvaru

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta|\tilde{x}| + \beta|x - \tilde{x}| ,$$

odkud

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\beta}{1 - \beta} |\tilde{x}| .$$

Nyní můžeme přistoupit k přesné formulaci našich odhadů.

Zavedeme nejprve následující definici:

(2,1) *Budiž dán podprostor X' prostoru X a operátor $H \epsilon E(X)$. Potom vzdáleností operátoru H od podprostoru X' nazveme číslo*

$$\sup_{|x| \leqq 1} \inf_{x' \epsilon X'} |Hx - x'| .$$

Toto číslo jest vždy $\leqq |H|$.

Skutečně, protože $0 \epsilon X'$, je $\inf_{x' \epsilon X'} |Hx - x'| \leqq |Hx|$, takže pro vzdálenost H od X' dostáváme odhad $\sup_{|x| \leqq 1} |Hx|$, což není nic jiného než norma $|H|$.

(2,2) *Nechť $A \epsilon E(X)$, $H \epsilon E(X)$. Budiž dán podprostor X' prostoru X. Označme σ_1 vzdálenost operátoru H od X', označme*

$$\sigma_2 = \sup_{|x| \leqq 1,\, x \epsilon X'} |Ax| .$$

Potom platí odhad

$$|AH| \leqq |A|\sigma_1 + |H|\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 .$$

Důkaz. Budiž dán prvek $x \epsilon X$. Zvolme číslo $\omega_1 > \sigma_1$. Z definice vzdálenosti operátoru od podprostoru plyne potom existence prvku $z \epsilon X'$ tak, že $|Hx - z| \leqq \omega_1|x|$.

Je potom $AHx = A(Hx - z) + Az$, takže máme odhad

$$|AHx| \leqq |A|\, \omega_1|x| + \sigma_2|z| .$$

Nyní však $|z| \leqq |Hx| + |Hx - z| \leqq |H|\, |x| + \omega_1|x|$, což dohromady s předešlým dá

$$|AHx| \leqq (|A|\omega_1 + |H|\sigma_2 + \omega_1\sigma_2)\, |x| .$$

Protože však ω_1 bylo libovolné číslo $> \sigma_1$, platí odhad uvedený v našem tvrzení.

Až do konce tohoto paragrafu budou dány pevně: Banachův prostor X, uzavřený podprostor $\tilde{X}$ prostoru X, projektor P zobrazující X na $\tilde{X}$, operátor $H \epsilon E(X)$ vlastnosti F. Označme potom $K = J - \lambda H$; nechť pro každé přirozené číslo m znamená ε_m vzdálenost operátoru H^m od podprostoru $\tilde{X}$.

(2,3) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má inversní $W \epsilon E(\tilde{X})$. Budiž m přirozené číslo. Nechť*

$$\beta_m = |J - WPK|\, |\lambda|^m \varepsilon_m < 1 .$$

Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$.

Položíme-li

$$\tilde{x} = G_m y + \tilde{z},$$

kdež $\tilde{z} \in \tilde{X}$ je řešení přibližné rovnice $PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y$, platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta_m |x|,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\beta_m}{1 - \beta_m} |\tilde{x}|.$$

Důkaz. Buď dáno $x \in X$. Označme $y = Kx$ a vezměme $z \in X$ tak, aby platilo $x = G_m y + z$. Potom, jak víme, bude

$$Kz = \lambda^m H^m y, \quad z = \lambda^m H^m x.$$

Nyní $\tilde{z}$ je řešení rovnice $PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y = PKz$. Je tedy $x - \tilde{x} = z - \tilde{z} = (J - WPK) z$. Uvážíme-li, že $z = \lambda^m H^m x$, je $x - \tilde{x} = (J - WPK) \lambda^m H^m x$. Podle předešlého lemmatu máme tedy odhad

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta_m |x|.$$

Jestliže nyní $\beta_m < 1$, zjistíme snadno, že operátor K je prostý. Skutečně, jestliže $Kx = 0$, je $y = 0$ a tedy i $\tilde{z} = 0$, takže $\tilde{x} = 0$. Máme pak odhad $|x| = |x - \tilde{x}| \leqq \beta_m |x|$, což není jinak možné než že $x = 0$.

Tím je vše dokázáno, neboť operátor H má vlastnost F.

Případ $m = 0$ formulujeme zvláště.

(2,4) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má inversní $W \in E(\tilde{X})$. Nechť $\beta_1 < 1$. Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Jestliže $\tilde{x} \in \tilde{X}$ jest řešení přibližné rovnice $PK\tilde{x} = Py$, platí odhady*

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta_1 |x| + p,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} |\tilde{x}| + \frac{p}{1 - \beta_1},$$

kdež $p = |(J - WPK) y|$.

Důkaz. Tvrzení o existenci inversního operátoru je obsaženo v předešlém lemmatu. Jestliže tedy $\beta_1 < 1$ a máme prvky x a y splňující vztah $Kx = y$, bude

$$x - \tilde{x} = (J - WPK) x = (J - WPK)(\lambda H x + y) = \\ = (J - WPK) \lambda H x + (J - WPK) y,$$

odkud ihned plynou uvedené odhady.

Předešlé dvě věty mají význam spíše theoretický. Jsou formulovány především tak, aby vynikla úloha všech podstatných činitelů, které ovlivňují odhad. Obě jsou speciálními případy následujících vět, upravených pro praktické použití.

(2,5) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$.*

Budiž m přirozené číslo. Nechť

$$\omega_m = |(J - ZPK)\, \lambda^m H^m| < 1\,.$$

Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Položíme-li

$$x = G_m y + \tilde{z}\,,$$

kdež $\tilde{z} \in \tilde{X}$ je přibližné řešení přibližné rovnice

$$PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y \quad (\text{t. j. } \tilde{z} = ZP\lambda^m H^m y)\,,$$

platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \omega_m |x|\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\omega_m}{1 - \omega_m} |\tilde{x}|\,.$$

Důkaz. Buď dáno $x \in X$. Označme $y = Kx$ a definujme $z \in X$ relací $x = G_m y + z$. Bude potom

$$Kz = \lambda^m H^m y\,, \quad z = \lambda^m H^m x\,.$$

Nyní $\tilde{z}$ je přibližným řešením rovnice

$$PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y = PKz\,,$$

takže

$$x - \tilde{x} = z - \tilde{z} = (J - ZPK)\, z = (J - ZPK)\, \lambda^m H^m x\,.$$

Důkaz se nyní snadno dokončí jako v případě předešlém. Případ $m = 0$ formulujeme zvláště.

(2,6) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$.*

Nechť $\omega_1 < 1$. Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$.

Položíme-li $\tilde{x} = ZPy$, platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \omega_1 |x| + p\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\omega_1}{1 - \omega_1} |\tilde{x}| + \frac{p}{1 - \omega_1}\,,$$

kdež $p = |(J - ZPK)\, y|$.

Důkaz. Tvrzení o existenci inversního operátoru je obsaženo v předešlém lemmatu. Jestliže tedy $\omega_1 < 1$ a máme prvky x a y spojené relací $Kx = y$, bude

$$x - \tilde{x} = (J - ZPK)\, z = (J - ZPK)(\lambda Hx + y) = \\ = (J - ZPK)\, \lambda Hx + (J - ZPK)\, y\,,$$

odkud ihned plynou uvedené odhady.

Užijeme-li v předešlých dvou větách na operátory $(J - ZPK)\,\lambda^m H^m$ odhadu lemmatu (2,2), dostaneme ihned následující výsledky:

(2,7) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$ takový, že*

$$|J - ZPK| = \sigma < 1$$

(*norma na $\tilde{X}$*). *Budiž m přirozené číslo. Nechť*

$$\sigma_m = |J - ZPK|\,|\lambda|^m \varepsilon_m + |\lambda|^m |H^m| \sigma + |\lambda|^m \varepsilon_m \sigma < 1\,.$$

Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Položíme-li

$$\tilde{x} = G_m y + \tilde{z}\,,$$

kdež $\tilde{z} \in \tilde{X}$ je přibližné řešení přibližné rovnice

$$PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y \quad (\text{t. j. } \tilde{z} = ZP\lambda^m H^m y)\,,$$

platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \sigma_m |x|\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\sigma_m}{1 - \sigma_m} |\tilde{x}|\,.$$

(2,8) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$ takový, že*

$$|J - ZPK| = \sigma < 1$$

(*norma na $\tilde{X}$*). *Nechť $\sigma_1 < 1$. Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Položíme-li $\tilde{x} = ZPy$, platí odhady*

$$|x - \tilde{x}| \leqq \sigma_1 |x| + p\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\sigma_1}{1 - \sigma_1} |\tilde{x}| + \frac{p}{1 - \sigma_1}\,,$$

kdež $p = |(J - ZPK)\,y|$.

3.

Ukážeme nyní, jak lze theorie, vyložené v předešlém odstavci, použíti k odhadu chyby přibližných method řešení integrálních rovnic. Je zajímavé, že se stanoviska obecných úvah předešlého odstavce se nejpřirozenější methodou jeví methoda (3,1), která v podstatě pochází od L. V. Kantoroviče.

Domníváme se, že teprve jednotný přehled, založený na důsledném použití method funkcionální analysy, umožňuje plnější pochopení podstaty užívaných method.

Budeme potřebovat ještě dvě poznámky k označení. Mějme lineární prostor E_n, skládající se ze všech n-členných posloupností reálných čísel

$$x = (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Je-li potom dána matice (a_{ik}) $(1 \leqq i, k \leqq n)$, můžeme každému vektoru x přiřadit vektor y předpisem

$$y_i = \Sigma a_{ik} x_k \, .$$

Vzniklé zobrazení A prostoru E_n do sebe je zřejmě lineární a ohraničené při každé volbě normy v E_n. Nás bude zajímat především norma operátoru A ve dvou konkretních případech.

(1) Volme v E_n normu

$$|x|_\square = \max_i |x_i| \, .$$

Potom se snadno zjistí, že norma operátoru A je

$$|A|_\square = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, .$$

(2) Volme v E_n normu

$$|x|_\circ = (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}} \, .$$

Potom se dá dokázat, že pro symetrický operátor A platí

$$|A|_\circ = \max_j |\lambda_j| \, ,$$

kdež λ_j jsou všechny kořeny charakteristické rovnice

$$|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \, .$$

Nyní máme vše připraveno, abychom mohli aplikovat výsledky předešlého odstavce na konkretní prostory.

Nechť X znamená lineární prostor všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ s normou

$$|x| = \max_{a \leqq t \leqq b} |x(t)| \, .$$

Snadno se dokáže, že X jakožto normovaný prostor je úplný. Nechť $h(s, t)$ je funkce spojitá na čtverci $a \leqq s, t \leqq b$. Pro každé $x \in X$ definujeme

$$y(s) = \int_a^b h(s, t)\, x(t)\, \mathrm{d}t \, .$$

Tato funkce je zřejmě spojitá na $\langle a, b \rangle$ a představuje tedy jistý prvek $y \in X$. Dá se dokázati, že zobrazení H prostoru X do X, definované vztahem $y = Hx$, je lineární operátor vlastnosti F.

(3,1) Nechť $\tilde{X}$ jest daný n-dimensionální podprostor prostoru X. Předpokládejme, že jest dáno n bodů

$$a \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqq b$$

tak, že platí

$$\tilde{x} \in \tilde{X}, \; x(t_j) = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \tilde{x} = 0 \, .$$

Projekci P prostoru X na $\tilde{X}$ definujeme požadavkem, aby prvek $\tilde{x} = Px$ splňoval rovnosti

$$\tilde{x}(t_j) = x(t_j) \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Vidíme tedy, že se jedná o jakousi zobecněnou interpolaci. Mějme nyní $z \in X$ a $\tilde{z} \in \tilde{X}$ a všimněme si, co znamená rovnost $PK\tilde{z} = PKz$. Snadno se přesvědčíme, že tato rovnost jest ekvivalentní se splněním rovností

$$\tilde{z}(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, \tilde{z}(t)\, \mathrm{d}t = z(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, z(t)\, \mathrm{d}t \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Zvolíme-li nyní $e_j \in \tilde{X}$ tak, aby $e_i(t_j) = \delta_{ij}$, bude platit $\tilde{z} = \Sigma \tilde{z}(t_j)\, e_j$, takže, označíme-li ještě $\zeta_i = \tilde{z}(t_i)$, půjde o řešení systému rovnic

$$\zeta_i - \lambda \sum_j \zeta_j \int h(t_i, t)\, e_j(t)\, \mathrm{d}t = z(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, z(t)\, \mathrm{d}t \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Označme T matici $(\delta_{ij} - \lambda\mu_{ij})$, kdež μ_{ij} jsou momenty

$$\mu_{ij} = \int h(t_i, t)\, e_j(t)\, \mathrm{d}t$$

a předpokládejme, že existuje inversní matice T^{-1}. Potom zřejmě existuje též inversní operátor W k operátoru $PK \in E(\tilde{X})$. Dostáváme potom odhad

$$|\tilde{z}| \leqq \alpha \max_i |\tilde{z}(t_i)| \leqq \alpha |T^{-1}|_{\square}\, |PK|\, |z|\,.$$

Tím jest odhadnuta norma operátoru WPK na prostoru X. Máme tedy

$$|WPK| \leqq \alpha |T^{-1}|_{\square}\, |PK|\,.$$

Odhady chyby při této methodě dostaneme ihned z věty (2,3) respektive (2,4).

(3,2) Operátor PK přiřazuje prvku $\tilde{x} \in \tilde{X}$ prvek $\tilde{y} \in \tilde{X}$ určený požadavkem, aby hodnoty funkce $\tilde{y}$ v bodech t_i byly rovny

$$\tilde{x}(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, \tilde{x}(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Mějme formuli mechanické kvadratury s uzly v bodech t_k, která nahrazuje integrál $\int_a^b x(t)\, \mathrm{d}t$ součtem $\sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k)$. Zaveďme operátor $Q \in E(\tilde{X})$ požadavkem, aby pro $u \in \tilde{X}$ prvek $v = Qu$ splňoval rovnosti

$$v(t_i) = u(t_i) - \lambda\, \Sigma A_k\, h(t_i, t_k)\, u(t_k)\,.$$

Zřejmě existence inversního operátoru $Z \in E(\tilde{X})$ k operátoru Q jest ekvivalentní existenci matice inversní k matici $T = (\delta_{ij} - \lambda A_j\, h(t_i, t_j))$. Operátor Z vezmeme za přibližný inversní operátor k operátoru PK. Budeme potřebovat

(1) odhad operátoru ZPK na prostoru X,

(2) odhad operátoru $J - ZPK$ na prostoru $\tilde{X}$.

Stejně jako v předešlém případě dostaneme

$$|ZPK| \leqq \alpha |T^{-1}|_{\square}\, |PK|\,.$$

Abychom provedli odhad $J - ZPK$ na prostoru $\tilde{X}$, vezměme $x \in \tilde{X}$ a označme $q = ZPKx$. Je tedy

$$Qq = PKx\,.$$

Označíme-li pro krátkost $q_i = q(t_i)$, $x_i = x(t_i)$, znamená to platnost systému rovnic

$$q_i - \lambda \Sigma A_k h(t_i, t_k) q_k = x_i - \lambda \int h(t_i, t) x(t) \, dt ,$$

neboli

$$(q_i - x_i) - \lambda \Sigma A_k h(t_i, t_k)(q_k - x_k) =$$
$$= \lambda \Sigma A_k h(t_i, t_k) x(t_k) - \lambda \int h(t_i, t) x(t) \, dt = \varepsilon_i .$$

Dostaneme potom odhad

$$|q - x| \leqq \alpha \max_i |q_i - x_i| \leqq \alpha |T^{-1}|_\square \max_i |\varepsilon_i| .$$

Budeme tedy potřebovat odhad tvaru

$$\max_i |\int h(t_i, t) x(t) \, dt - \Sigma A_k h(t_i, t_k) x(t_k)| \leqq \varkappa |x| ,$$

platný pro $x \in \tilde{X}$. Dohromady s předešlým dostaneme potom

$$|J - ZPK| \leqq \alpha |T^{-1}|_\square |\lambda| \varkappa .$$

Odhad chyby při této methodě dostaneme potom ihned z vět (2,7) resp. (2,8).

Vidíme tedy, že k provedení našeho úkolu stačí provést odhad (pro $x \in \tilde{X}$)

$$\max_i |\Sigma A_j h(t_i, t_j) x(t_j) - \int h(t_i, t) x(t) \, dt| .$$

Provedeme takový odhad ve dvou konkretních případech.

(3,21) Buď dáno přirozené n, volme

$$t_k = a + k \frac{b - a}{n} , \quad k = 0, 1, \ldots, n , \quad A_0 = A_n = \frac{b - a}{2n} ,$$
$$A_1 = \ldots = A_{n-1} = \frac{b - a}{n} .$$

Označme pro $\delta > 0$

$$\omega_t(\delta) = \max_i \max_{\substack{a \leqq t' \leqq t'' \leqq b \\ |t' - t''| \leqq \delta}} |h(t_i, t') - h(t_i, t'')| .$$

Vezmeme pevné i $(0 \leqq i \leqq n)$ a odhadneme

$$|\int_a^b h(t_i, t) x(t) \, dt - \sum_{k=0}^{n} A_k h(t_i, t_k) x(t_k)| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} |\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t_i, t) x(t) \, dt - \frac{b - a}{2n} (h(t_i, t_k) x(t_k) + h(t_i, t_{k+1}) x(t_{k+1}))| .$$

Uvážíme-li, že funkce $x(t)$ je lineární v $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$, vidíme ihned, že

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t_i, t_k) x(t) \, dt = \frac{b - a}{2n} (h(t_i, t_k) x(t_k) +$$
$$+ h(t_i, t_k) x(t_{k+1})) .$$

Užitím tohoto vztahu můžeme hoření výraz přepsati ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\int (h(t_i, t) - h(t_i, t_k))\, x(t)\, dt - \frac{b-a}{2n} (h(t_i, t_{k+1}) - h(t_i, t_k))\, x(t_{k+1})\right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\, \omega_t\left(\frac{1}{n}\right) |x| + \frac{b-a}{2n}\, \omega_t\left(\frac{1}{n}\right) |x|\right) = \frac{3}{2} (b-a)\, \omega_t\left(\frac{1}{n}\right) |x|\,.$$

takže za číslo $\varkappa$ můžeme vzíti $\frac{3}{2} (b-a)\, \omega_t\left(\frac{1}{n}\right)$.

(3,22) Formuli mechanické kvadratury

$$\int_a^b x(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k)$$

nazveme formulí Gaussova typu, jestliže v ní platí rovnost pro všechny polynomy stupně nejvýše $2n - 1$. V tomto případě je možno žádaný odhad provésti velmi snadno.

Označme $\tilde{X}$ množinu všech polynomů stupně nejvýše $n - 1$ a nechť pro každé $x \in X$ znamená Px polynom stupně $\leqq n - 1$, jehož hodnoty v bodech t_k souhlasí s hodnotami $x(t_k)$. Máme opět odhadnout

$$\max_i |\Sigma A_k h_{ik}\, x(t_k) - \int h(t_i, t)\, x(t)\, dt|$$

pro $x \in \tilde{X}$. Pro každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ existuje polynom $p_i(t)$ stupně $\leqq n$, který nejlépe (v normě prostoru X) aproximuje spojitou funkci $h(t_i, t)$. Označme

$$\varrho = \max_i \max_{a \leqq t \leqq b} |h(t_i, t) - p_i(t)|\,.$$

Jestliže nyní $x \in \tilde{X}$, bude $p_i(t)\, x(t)$ polynom stupně $\leqq 2n - 1$, takže platí

$$\int p_i(t)\, x(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} A_k\, p_i(t_k)\, x(t_k)\,.$$

Dostáváme potom

$$\Sigma A_k h_{ik}\, x(t_k) - \int h(t_i, t)\, x(t)\, dt =$$
$$= \Sigma A_k h_{ik}\, x(t_k) - \Sigma A_k\, p_i(t_k)\, x(t_k) + \int (p_i(t) - h(t_i, t))\, x(t)\, dt\,.$$

Uvážíme-li ještě, že všechny $A_k \geqq 0$ a že $\Sigma A_k = b - a$, vidíme ihned, že náš výraz je odhadnut číslem

$$2(b-a)\, \varrho |x|\,,$$

takže můžeme vzíti $\varkappa = 2(b - a)\, \varrho$.

(3,3) Jestliže funkce $x(t)$ má na $\langle a, b\rangle$ spojité derivace až do řádu v včetně, platí odhad tvaru

$$|\int x(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k)| \leqq \mu \max_{a \leqq t \leqq b} |x^{(v)}(t)|$$

($v = 2$ pro methodu lichoběžníků, $v = 4$ pro metodu Simpsonovu, $v = 2n$ pro methodu Gaussovu). Předpokládejme, že jádro $h(s, t)$ má spojité parciální derivace podle obou proměnných až do řádu v včetně. Označme ještě pro $0 \leqq j \leqq v$

$$M_s^{(j)} = \max_{a \leqq s, t \leqq b} \left| \frac{\partial^j h}{\partial s^j} \right|, \quad M_t^{(j)} = \max_{a \leqq s, t \leqq b} \left| \frac{\partial^j h}{\partial t^j} \right|.$$

Budiž $u(t)$ funkce, která má na $\langle a, b \rangle$ spojité derivace až do řádu v včetně. Máme potom odhad

$$\max_{a \leqq s \leqq b} |\int h(s, t)\, u(t)\, \mathrm{d}t - \Sigma A_k\, h(s, t_k)\, u(t_k)\, \mathrm{d}t| \leqq$$

$$\leqq \mu \max_{a \leqq s,\, t \leqq b} \left| \frac{\partial^v}{\partial t^v} h(s, t)\, u(t) \right| \leqq \mu \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} |u^{(j)}|\, M_t^{(v-j)}.$$

Položme nyní $P = J$ a tedy $\tilde{X} = X$.

Označme ještě H_0 onen operátor, který každému $x \in X$ přiřazuje funkci

$$\Sigma A_k\, h(s, t_k)\, x(t_k).$$

Vyšetřme, za jakých předpokladů operátor $K_0 = J - \lambda H_0$ bude míti inversní. Dokážeme, že to bude splněno, jakmile matice $T = \delta_{ik} - \lambda A_k\, h(t_i, t_k)$ bude mít determinant různý od nuly. Skutečně, je-li tomu tak a je-li dán libovolný prvek $y \in X$, můžeme určiti čísla ζ_i tak, aby

$$\zeta_i - \lambda\, \Sigma A_k\, h(t_i, t_k)\, \zeta_k = y(t_i).$$

Snadno se potom přesvědčíme, že funkce

$$y(s) + \lambda\, \Sigma A_k\, h(s, t_k)\, \xi_k$$

je řešením rovnice $K_0 x = y$. Označme potom Z operátor inversní k operátoru K_0; poslouží nám jako přibližný inversní k operátoru K. Z hořeního výrazu jest ihned patrno, že

$$|Z| \leqq 1 + |\lambda|(b - a)\, M |T^{-1}|_{\square},$$

kdež

$$M = \max_{a \leqq s,\, t \leqq b} |h(s, t)|.$$

Bude dále $J - ZK = Z(K_0 - K) = \lambda Z(H - H_0)$. Zjistili jsme před chvílí, že odhad $(H - H_0)$ umíme provésti pro funkce u, které splňují jakési podmínky derivability. Použijeme tedy věty (2,5) respektive (2,6). Jedná se totiž o odhad $(J - ZK)\, \lambda H = \lambda^2\, Z(H - H_0)\, H$, který můžeme provést, neboť vzhledem k našim předpokladům o jádru h prvky tvaru Hx mají potřebný počet derivací.

Skutečně, mějme libovolný prvek $x \in X$ a položme $u = Hx$. Snadno se zjistí, že pro všechna j $(0 \leqq j \leqq v)$ existuje spojitá derivace $u^{(j)}$ a splňuje rovnost

$$u^{(j)}(s) = \int \left(\frac{\partial^j}{\partial s^j} h(s, t) \right) x(t)\, \mathrm{d}t,$$

takže dostáváme odhad $|u^{(j)}| \leqq (b - a) M_s^{(j)}|x|$. Užijeme-li hořeního odhadu $(H - H_0) u$ pro $u = Hx$, dostaneme

$$|(H - H_0) Hx| \leqq \mu(b - a) \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} M_t^{(v-j)} M_s^{(j)}|x| .$$

Vidíme tedy, že pro číslo ω_1 vět (2,5) a (2,6)máme odhad

$$\omega_1 = |(J - ZK)\lambda H| \leqq$$
$$\leqq \lambda^2(1 + |\lambda|(b - a) M|T^{-1}|_\square) \mu(b - a) \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} M_s^{(j)} M_t^{(v-j)} .$$

Jestliže také prvek y má spojité derivace až do řádu v včetně, můžeme snadno provést i odhad čísla p věty (2,6). Je

$$p = |(J - ZK) y| \leqq |\lambda| \, |Z| \, |(H - H_0) y| \leqq |\lambda| \, |Z| \mu \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} M_t^{(v-j)} |y^{(j)}| .$$

(3,4) Nechť nyní X jest Hilbertův prostor, příslušný intervalu $\langle a, b \rangle$. Mějme měřitelnou funkci $h(s, t)$, definovanou na čtverci $a \leqq s, t \leqq b$ (až na množinu nulové míry) a takovou, že

$$\int h^2(s, t) \, ds \, dt < \infty .$$

Dá se potom dokázati toto:

Je-li x libovolný prvek prostoru X, potom pro skoro všechna $s \in \langle a, b \rangle$ existuje integrál

$$y(s) = \int h(s, t) \, x(t) \, dt ,$$

a pro vzniklou funkci y je

$$\int y^2(s) \, ds < \infty .$$

Zobrazení H prostoru X do X, definované vztahem $y = Hx$, je lineární operátor vlastnosti F.

Mějme nyní n-dimensionální podprostor $X \subset \tilde{X}$ s ortonormální basí $e_1, \ldots, e_n$. Nechť P znamená ortogonální projekci X na $\tilde{X}$. Potom, jak známo, pro každé $x \in X$ prvek Px jest nejlepší aproximací prvku x pomocí prvků prostoru $\tilde{X}$. Označme

$$h_s(s, t) = \sum_{i=1}^{n} e_i(s) \int h(s, t) \, e_i(s) \, ds .$$

Je pak ihned patrno, že operátor PK jest vytvořen jádrem $h_s(s, t)$. Jestliže $x \in X$ a $\tilde{x} = \Sigma \xi_i e_i \in \tilde{X}$ splňují rovnost $PK\tilde{x} = PKx$, znamená to, jak ihned patrno, splnění rovností

$$\xi_i - \lambda \, \Sigma h_{ik} \xi_k = (x, e_i) - \lambda \int h(s, t) \, e_i(s) \, x(t) \, ds \, dt ,$$

kdež

$$h_{ik} = \int h(s, t) \, e_i(s) \, e_k(t) \, ds \, dt .$$

Existence operátoru W inversního k operátoru $PK \in E(\tilde{X})$ je tedy ekvivalentní tomu, aby matice $T = (\delta_{ik} - \lambda h_{ik})$ měla inversní. Dostáváme potom odhad

$$|\tilde{x}| = (\Sigma \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} \leqq |T^{-1}|_0 \, |PK| \, |x| \, .$$

Tím jest odhadnuta norma operátoru WPK na prostoru X. Máme tedy

$$|WPK| \leqq |T^{-1}|_0 \, |PK| \, .$$

Odhadněme ještě vzdálenost ε operátoru H od $\tilde{X}$. Protože pro každé $z \in X$ prvek Pz je nejlepší aproximací prvku z pomocí prvků prostoru $\tilde{X}$, je

$$\varepsilon = |H - PH| \leqq \int (h(s, t) - h_s(s, t))^2 \, ds \, dt \, .$$

Odhad chyby při této methodě dostaneme potom z vět (2,3) resp. (2,4).

LITERATURA

[1] *Л. В. Канторовнич,* Функциональный анализ и прикладная математика, УМИ *3* (1948), випуск 6 (28), 89—185.

[2] *Л. В. Канторович, И. В. Крылов,* Приближенные методы высшево анализа, Москва-Ленинград 1952.

Резюме

ОЦЕНКА ОШИБКИ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Властимил Птак (Vlastimil Pták), Прага.

(Поступило в редакцию 29/X 1954 г.)

Настоящая работа опирается на работу Л. В. Канторовича [1]. Она ставит себе целью разработать с использованием методов функционального анализа общую схему, которую можно применить к оценке ошибки различных приближенных методов решения интегральных уравнений. Сущность метода заключается в том, что наряду с пространством Банаха X, в котором нужно решить уравнение $Ax = y$, рассматривается подпространство $\tilde{X} \subset X$, в котором решается приближенное уравнение $PAx = Py$, где P — проекция X на $\tilde{X}$. Затем производится оценка разности между точным решением x и приближенным решением $\tilde{x}$.

Summary

ERROR ESTIMATES OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Received October 29, 1954.)

The starting point of the present investigations is the paper of L. V. KANTOROVITCH [1]. Methods of Functional Analysis are applied to build up a general schema which may be used to estimate the error of different approximate methods of solution of integral equations. If X is a Banach space where an equation $Ax = y$ is to be solved, we consider a subspace $\tilde{X} \subset X$ and the approximate equation $PA\tilde{x} = Py$, P being a projection of X on $\tilde{X}$. A method is developed to obtain an estimate of the difference between the exact solution x and the approximate solution $\tilde{x}$.