Časopis pro pěstování matematiky

Josef Král

Poznámka o množinách, jejichž charakteristická funkce má za parciální derivaci zobecněnou míru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 178--194

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108206`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

POZNÁMKA O MNOŽINÁCH, JEJICHŽ CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE MÁ ZA PARCIÁLNÍ DERIVACI ZOBECNĚNOU MÍRU

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 17. listopadu 1959)

Pro $A \subset E_m$ označme symbolem χ_A charakteristickou funkci množiny A. Je-li množina A měřitelná a je-li možno distributivní derivaci $\frac{\partial}{\partial z_i} \chi_A(z)$ ztotožnit — ve smyslu obvyklém v teorii distribucí — s jistou úplně konečnou mírou, pak symbolem $\|A\|_i$ označíme totální variaci této míry na E_m; pro ostatní množiny $A \subset E_m$ definujeme $\|A\|_i = +\infty$. Systém všech měřitelných množin $A \subset E_m$, pro něž $\|A\|_i < +\infty$, označíme $\mathfrak{S}_i$. V tomto článku jsou vyšetřeny některé vlastnosti množin ze systému $\mathfrak{S}_i$. Je odvozena věta o výpočtu $\|A\|_i$ pro libovolnou měřitelnou množinu A. Dále je ukázáno, jak lze ke každým dvěma disjunktním otevřeným podmnožinám G^1, G^2 prostoru E_m konstruovat množinu $B(G^1, G^2) = B$ typu F_σ tak, že $G^1 \subset B \subset E_m - G^2$ a že $\|\ldots\|_i$ nabývá na B svého minima ve třídě všech měřitelných množin A splňujících inkluse $G^1 \subset A \subset E_m - G^2$. Tyto výsledky mají některé aplikace v teorii Lebesgueova povrchu.

1. Označení. Je-li $m > 1$ a $\zeta \in E_m$, pak ζ_i je i-tá souřadnice bodu ζ; píšeme $|\zeta| = (\sum_{i=1}^{m} \zeta_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Nosičem S_f funkce f definované na E_m rozumíme uzávěr množiny $E[\zeta; \zeta \in E_m, f(\zeta) \neq 0]$. Symbolem $\mathscr{D}_m$ označíme systém všech funkcí na E_m s kompaktním nosičem, které mají spojité parciální derivace všech řádů. $\mathscr{D}_m^1$ je podsystém všech funkcí $f \in \mathscr{D}_m$, pro něž $\max_{\zeta \in E_m} |f(\zeta)| \leqq 1$. Je-li f funkce na E_1, pak var $(f; \langle a, b \rangle)$ je její variace na intervalu $\langle a, b \rangle$. Položíme ještě var $(f; E_1) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}}$ var $(f; \langle a, b \rangle)$. Vnitřek množiny $M \subset E_m$ značíme M^0.

Poznámka. (*Doplněno dne 7. prosince 1960.*) Hlavní výsledky článku jsou obsaženy v odstavcích 19, 23, 25 a 26. K jejich odvození je zapotřebí řady jednoduchých lemmat, z nichž některá jsou obsažena ve známých obecnějších větách. Odkazy na odpovídající literaturu (která byla většinou autoru dostupna teprve když byl článek již odevzdán do tisku) nalezne čtenář v poznámkách k odst. 7, 11, 18, 26.

2. Definice. Buď G otevřená množina v E_m a buď f lokálně integrovatelná funkce na G (to znamená, že f je integrovatelná na každé kompaktní podmnožině v G). Jestliže $m > 1$, pak definujeme pro $i = 1, \ldots, m$

$$V_i(f; G) = \sup_h \int_G f(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i} \, \mathrm{d}\zeta ,$$

kde $h \in \mathscr{D}_m^1$, $S_h \subset G$.

V případě $m = 1$ položíme

$$V(f; G) = \sup_h \int_G f(\zeta) \frac{\mathrm{d}h(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} \, \mathrm{d}\zeta , \quad h \in \mathscr{D}_1^1 , \quad S_h \subset G .$$

Místo $V_i(f; E_m)$, $V(f; E_1)$ píšeme prostě $V_i(f)$, $V(f)$.

3. Definice. Buď μ funkce (která může nabývat i nekonečných hodnot) kompaktního intervalu v E_m. Řekneme, že μ je subaditivní, když $\mu(K_1) + \mu(K_2) \geqq \mu(K)$, kdykoli K_1, K_2 jsou nepřekrývající se kompaktní intervaly, jichž sjednocením je interval K. (Do tohoto předpokladu je implicite zahrnut požadavek, aby součet vlevo měl smysl.) Budeme říkat, že μ je superaditivní, jestliže $-\mu$ je subaditivní. Funkci intervalu, která je zároveň superaditivní i subaditivní, nazveme aditivní.

Variací funkce μ rozumíme funkci $|\mu|$ kompaktního intervalu, jež je definována předpisem

$$|\mu|(K) = \sup_\sigma \sum_{j=1}^{s} |\mu(K_j)| ,$$

kde $\sigma = \{K_1, \ldots, K_s\}$ probíhá všechny konečné systémy nepřekrývajících se kompaktních intervalů obsažených v K.

Poznámka. Buď ϱ nezáporná subaditivní funkce a buď τ superaditivní funkce kompaktního intervalu v E_m. Jestliže $\varrho \leqq \tau$, potom je též $|\varrho| \leqq \tau$.

4. Lemma. *Buď f lokálně integrovatelná funkce na E_m a zvolme pevně přirozené číslo $i \in \langle 1, m \rangle$. Definujme funkci v kompaktního intervalu předpisem $v(K) = V_i(f; K^\circ)$. Pak v je superaditivní funkcí intervalu.*

Důkaz je snadný.

5. Označení. Až do konce článku podržíme následující označení: m je přirozené číslo větší než 1, i je pevné přirozené číslo splňující nerovnosti $1 \leqq i \leqq m$. Je-li $\xi \in E_{m-1}$ a $\eta \in E_1$, píšeme $[\xi, \eta] = [\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta, \xi_i, \ldots, \xi_{m-1}]$. Hodnotu funkce f v bodě $[\xi, \eta]$ budeme značit $f(\xi, \eta)$. Je-li $M_1 \subset E_{m-1}$, $M_2 \subset E_1$, pak $[M_1, M_2]$ je množina všech $[\xi, \eta]$, kde $\xi \in M_1$ a $\eta \in M_2$. Pro $M \subset E_m$ a $\xi \in E_{m-1}$ položíme

$$M_\xi = E[\eta; \eta \in E_1, [\xi, \eta] \in M] .$$

6. Lemma. *Nechť g je lokálně integrovatelná funkce na E_s a definujme funkci λ kompaktního intervalu v E_s předpisem $\lambda(I) = \int_I g(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$. Pak λ je aditivní funkcí intervalu a platí $|\lambda|(I) = \int_I |g(\zeta)| \, \mathrm{d}\zeta$ pro každý kompaktní interval I.*

Důkaz. Viz [18], věty (6.3), (7.8), (7.9) z kap. IV a větu (12.1) z kap. III.

7. **Lemma.** *Buď f omezená borelovsky měřitelná funkce na E_m. Označme při pevném $\xi \in E_{m-1}$ symbolem f_ξ funkci na E_1 definovanou předpisem $f_\xi(\eta) = f(\xi, \eta)$ a předpokládejme, že pro každé $\xi \in E_{m-1}$ je funkce f_ξ spojitá na E_1. Je-li μ funkce kompaktního intervalu v E_m definovaná vztahem*

$$\mu(K) = \int_I (f(\xi, b) - f(\xi, a))\, d\xi\,, \quad [I, \langle a, b\rangle] = K\,,$$

pak

$$|\mu|(K) = \int_I \operatorname{var}(f_\xi; \langle a, b\rangle)\, d\xi\,.$$

Důkaz. Definujme funkci intervalu μ^* předpisem

$$\mu^*(K) = \int_I |f(\xi, b) - f(\xi, a)|\, d\xi\,, \quad [I, \langle a, b\rangle] = K\,.$$

Zvolme na okamžik pevně čísla $a \leqq b$ a utvořme funkci λ kompaktního intervalu v E_{m-1} předpisem

$$\lambda(I) = \mu([I, \langle a, b\rangle])\,.$$

Zřejmě $|\lambda|(I) \leqq |\mu|([I, \langle a, b\rangle])$. Odtud a z lemmatu 6 dostáváme $\mu^* \leqq |\mu|$, takže vzhledem k superaditivitě funkce $|\mu|$ a subaditivitě funkce μ^* (viz pozn. k odst. 3)

$$(1) \qquad |\mu^*| \leqq |\mu|\,.$$

Protože $|\mu(K)| \leqq \mu^*(K)$ pro každý kompaktní interval K, je také $|\mu| \leqq |\mu^*|$, což spolu s (1) dává rovnost

$$(2) \qquad |\mu^*| = |\mu|\,.$$

Zvolme teď interval $K = [I, \langle a, b\rangle]$ pevně a rozdělme pro každé n interval $\langle a, b\rangle$ na 2^n shodných částí dělicími body $a = a_0^n \leqq a_1^n \leqq \ldots \leqq a_{2^n}^n = b$. Pak máme pro všechna n

$$(3) \qquad |\mu^*|(K) \geqq \sum_{j=1}^{2^n} \mu^*([I, \langle a_{j-1}^n, a_j^n\rangle]) = \int_I \Big(\sum_{j=1}^{2^n} |f(\xi, a_j^n) - f(\xi, a_{j-1}^n)|\Big)\, d\xi\,.$$

Ježto f_ξ je spojitá na $\langle a, b\rangle$, platí

$$\sum_{j=1}^{2^n} |f(\xi, a_j^n) - f(\xi, a_{j-1}^n)| \nearrow \operatorname{var}(f_\xi; \langle a, b\rangle)$$

pro $n \to \infty$. Odtud je patrno, že $\operatorname{var}(f_\xi; \langle a, b\rangle)$ je borelovsky měřitelnou funkcí proměnné ξ na I a že ve vztahu (3) je možno provést limitní přechod za integračním znamením. Tím dostaneme nerovnost

$$(4) \qquad |\mu^*|(K) \geqq \omega(K)\,,$$

kde $\omega(K) = \int_I \operatorname{var}(f_\xi; \langle a, b\rangle)\, d\xi$.

Protože zřejmě $\mu^*(K) \leqq \omega(K)$ pro každý kompaktní interval K, je $|\mu^*| \leqq \omega$ a vzhledem k (4) tedy $|\mu^*| = \omega$. Tato rovnost spolu s (2) dokazuje naše tvrzení.

Poznámka. Funkce intervalu μ^*, ω, s nimiž jsme se setkali v průběhu předchozího důkazu, jsou důležitým nástrojem při vyšetřování Lebesgueova povrchu neparametrických ploch. Pro speciální případ $m = 2$ jsou studovány v [18], §§ 4, 5. O tzv. *Geöcze-Goffmannových číslech* v souvislosti s *Fichera-Goffmannovou variací* v m-rozměrném prostoru viz práci Chr. Y. PAUCA [17]; tam je též uvedena další literatura k tomuto předmětu.

8. Lemma. *Nechť symboly f, μ mají stejný význam jako v předchozím odstavci a definujme funkci v kompaktního intervalu předpisem $v(K) = V_i(f, K^0)$. Pak $|\mu| \leqq v$.*

Důkaz. Zvolme pevně kompaktní interval $K = [I, \langle a, b\rangle]$, $a < b$. Utvořme na E_1 pro každé $k > 2/(b - a)$ funkci h_k tak, že $h_k(\eta) = 0$ pro $\eta \in E_1 - \langle a, b\rangle$, $h_k(\eta) = 1$ pro $\eta \in \langle a + 1/k, b - 1/k\rangle$, h_k je monotonní na intervalech $\langle a, a + 1/k\rangle$, $\langle b - 1/k, b\rangle$ a má na E_1 spojité derivace všech řádů. Buď dále $g_n(\xi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ posloupnost funkcí z $\mathscr{D}^1_{m-1}$, která má za limitu charakteristickou funkci intervalu I^0, přičemž $S_{g_n} \subset I^0$ pro všechna n. Potom máme pro všechna n a všechna $k > 2/(b - a)$ nerovnost

$$\int_K f(\xi, \eta)\, g_n(\xi) \frac{\mathrm{d}h_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta \leqq v(K)\,.$$

Odtud dostáváme limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$\int_I \left(\int_a^b f(\xi, \eta) \frac{\mathrm{d}h_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi \leqq v(K)\,. \tag{5}$$

Zvolme na okamžik $\xi \in I$ pevně. Označíme-li symbolem h charakteristickou funkci intervalu (a, b), pak (viz [11], věta 150 na str. 424)

$$\int_a^b f(\xi, \eta) \frac{\mathrm{d}h_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta = \int_a^b f_\xi \,\mathrm{d}h_k \to \int_a^b f_\xi \,\mathrm{d}h = f(\xi, a) - f(\xi, b)\,. \tag{6}$$

Je-li c kladná konstanta ohraničující $|f|$ shora, máme dále

$$\left| \int_a^b f(\xi, \eta) \frac{\mathrm{d}h_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta \right| = \left| \int_a^b f_\xi \,\mathrm{d}h_k \right| \leqq c \operatorname{var}(h_k; \langle a, b\rangle) = 2c\,.$$

Odtud je patrno, že v integrálu na levé straně vztahu (5) lze provést limitní přechod pro $k \to \infty$ za prvním integračním znamením, čímž dostaneme vzhledem k (6) $-\mu(K) \leqq v(K)$. Zaměníme-li v předchozí úvaze všechny funkce g_n za $-g_n$, zjistíme, že $\mu(K) \leqq v(K)$. Vidíme, že $|\mu(K)| \leqq v(K)$ pro každý kompaktní interval K. Odtud plyne podle lemmatu 4 (viz též poznámku k odst. 3) nerovnost

$$|\mu| \leqq v\,.$$

9. Lemma. *Buď f lokálně integrovatelná funkce na E_1. Pak pro libovolná $a \leqq b$ platí*

$$V(f; (a, b)) \leqq \operatorname{var}(f; \langle a, b\rangle)\,. \tag{7}$$

Je-li f spojitá na E_1, pak v předchozím vztahu platí rovnost.

Důkaz. Nerovnost (7) je zřejmá, když $a = b$ nebo $\operatorname{var}(f; \langle a, b\rangle) = +\infty$. Buď tedy $a < b$, $\operatorname{var}(f; \langle a, b\rangle) < +\infty$ a zvolme libovolně $g \in \mathscr{D}_1^1$ tak, že $S_g \subset (a, b)$. Pak

$$\int_a^b f(\eta) \frac{\mathrm{d}g(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta = -\int_a^b g(\eta) \,\mathrm{d}f(\eta) \leqq \operatorname{var}(f; \langle a, b\rangle) .$$

Odtud je patrno, že platí (7).

Předpokládejme nyní, že f je spojitá na E_1 a sestrojme pro $k > 2/(b - a)$ funkce h_k stejně jako v důkazu k předchozímu odstavci. Pak

$$\pm (f(b) - f(a)) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(\eta) \left(\pm \frac{\mathrm{d}h_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \right) \mathrm{d}\eta \leqq V(f; (a, b))$$

kdykoli $a < b$, takže také $\operatorname{var}(f; \langle a, b\rangle) \leqq V(f; (a, b))$. Tato nerovnost spolu s (7) dokazuje naše tvrzení.

10. Lemma. *Nechť f je omezená borelovsky měřitelná funkce na E_m a nechť funkce f_ξ (viz odst. 7) je spojitá na E_1 pro každé $\xi \in E_{m-1}$. Pak $V(f_\xi)$ je měřitelnou funkcí proměnné ξ na E_{m-1} a*

$$V_i(f) = \int_{E_{m-1}} V(f_\xi) \,\mathrm{d}\xi .$$

Důkaz. Buď K_n (resp. I_n) m-rozměrná (resp. $(m - 1)$-rozměrná) krychle o středu v počátku a straně $2n$. Z lemmat 7–9 dostáváme, že $V(f_\xi; (-n, n))$ je měřitelnou funkcí proměnné ξ na I_n a

$$\int_{I_n} V(f_\xi; (-n, n)) \,\mathrm{d}\xi \leqq V_i(f; K_n^0) . \tag{8}$$

Opačná nerovnost je zřejmá v případě $\int_{I_n} V(f_\xi; (-n, n)) \,\mathrm{d}\xi = +\infty$. Buď tedy $\int_{I_n} V(f_\xi; (-n, n)) \,\mathrm{d}\xi < +\infty$, takže speciálně

$$V(f_\xi; (-n, n)) = \operatorname{var}(f_\xi; \langle -n, n\rangle) < +\infty$$

pro skoro všechna $\xi \in I_n$. Zvolme $h \in \mathscr{D}_m^1$ tak, aby $S_h \subset K_n^0$. Pak

$$\int_{K_n^0} f(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i} \,\mathrm{d}\zeta = \int_{I_n} \left(\int_{-n}^n f_\xi(\eta) \frac{\mathrm{d}h_\xi(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi$$

a

$$\int_{-n}^n f_\xi(\eta) \frac{\mathrm{d}h_\xi(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta = -\int_{-n}^n h_\xi(\eta) \,\mathrm{d}f_\xi(\eta) \leqq \operatorname{var}(f_\xi; \langle -n, n\rangle)$$

pro skoro všechna $\xi \in I_n$, takže

$$\int_{K_n^0} f(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i} \,\mathrm{d}\zeta \leqq \int_{I_n} \operatorname{var}(f_\xi; \langle -n, n\rangle) \,\mathrm{d}\xi = \int_{I_n} V(f_\xi, (-n, n)) \,\mathrm{d}\xi .$$

Protože funkce h s uvedenými vlastnostmi byla zvolena zcela libovolně, dostáváme odtud nerovnost opačnou k (8). Vidíme, tedy, že

$$V_i(f; K_n^0) = \int_{I_n} V(f_\xi; (-n, n))\, d\xi .$$

Odtud plyne naše tvrzení limitním přechodem pro $n \to \infty$.

11. Lemma. *Nechť f je omezená měřitelná funkce na E_m. Pak $V(f_\xi)$ je měřitelnou funkcí proměnné ξ na E_{m-1} a*

$$V_i(f) = \int_{E_{m-1}} V(f_\xi)\, d\xi . \tag{9}$$

Důkaz. Je-li g omezená borelovsky měřitelná funkce na E_m taková, že $f = g$ skoro všude, je $V_i(f) = V_i(g)$. Pro skoro všechna $\xi \in E_{m-1}$ je $f_\xi = g_\xi$ skoro všude na E_1, takže také $V(f_\xi) = V(g_\xi)$. Odtud je patrno, že vztah (9) stačí dokázat za předpokladu, že f je omezená a borelovsky měřitelná.

Nechť tedy tento předpoklad je splněn. Umluvme se ještě na následujícím označení. Je-li g omezená borelovsky měřitelná funkce na E_m a $\varepsilon > 0$, pak g^ε je funkce definovaná předpisem

$$g^\varepsilon(\xi, \eta) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(\xi, \eta + \delta)\, d\delta \; (\xi \in E_{m-1}, \eta \in E_1) .$$

Snadno se zjistí, že g^ε je opět borelovsky měřitelná funkce, jež je v absolutní hodnotě omezena konstantou $\sup |g(\zeta)|$, $\zeta \in E_m$. Mimo to při pevném $\xi \in E_{m-1}$ je $g^\varepsilon(\xi, \eta) = g_\xi^\varepsilon(\eta)$ spojitou funkcí proměnné η na E_1. Za tohoto označení dostáváme podle lemmatu 10

$$V_i(f^\varepsilon) = \int_{E_{m-1}} V(f_\xi^\varepsilon)\, d\xi . \tag{10}$$

Poznamenejme ještě, že pro $h \in \mathscr{D}_m$ platí

$$\int_{E_m} f^\varepsilon(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i}\, d\zeta = \int_{E_m} f(\zeta) \frac{\partial h^\varepsilon(\zeta)}{\partial \zeta_i}\, d\zeta$$

(důkaz tohoto vztahu přenecháváme čtenáři). Protože pro $h \in \mathscr{D}_m^1$ je opět $h^\varepsilon \in \mathscr{D}_m^1$, je pro každé $h \in \mathscr{D}_m^1$

$$\int_{E_m} f^\varepsilon(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i}\, d\zeta = \int_{E_m} f(\zeta) \frac{\partial h^\varepsilon(\zeta)}{\partial \zeta_i}\, d\zeta \leqq V_i(f) ,$$

takže

$$V_i(f^\varepsilon) \leqq V_i(f) , \quad \varepsilon > 0 . \tag{11}$$

Buď M množina všech $\zeta \in E_m$, pro něž $\lim_{\varepsilon \to 0+} f^\varepsilon(\zeta) = f(\zeta)$. Při pevném $\xi \in E_{m-1}$ je, jak známo, $\lim_{\varepsilon \to 0+} f^\varepsilon(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$ pro skoro všechna $\eta \in E_1$, takže množina $(E_m - M)_\xi$ je nulová. Ježto M je měřitelná množina, plyne odtud podle Fubiniovy věty, že $E_m -$

$- M$ má míru 0. Protože funkce f^ε jsou mimo to stejně omezené, máme pro každé $h \in \mathscr{D}_m^1$

$$\int_{E_m} f(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i} \, d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{E_m} f^\varepsilon(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i} \, d\zeta \leqq \liminf_{\varepsilon \to 0+} V_i(f^\varepsilon),$$

což spolu s nerovností (11) dává

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} V_i(f^\varepsilon) = V_i(f). \tag{12}$$

Z podobných důvodů platí pro $\xi \in E_{m-1}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} V(f_\xi^\varepsilon) = V(f_\xi).$$

Protože z lemmatu 10 už víme, že $V(f_\xi^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ jsou měřitelné funkce proměnné ξ, platí totéž i o funkci $V(f_\xi)$ a

$$\int_{E_{m-1}} V(f_\xi) \, d\xi \leqq \liminf_{\varepsilon \to 0+} \int_{E_{m-1}} V(f_\xi^\varepsilon) \, d\xi = (\text{viz } (10)) = \tag{13}$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to 0+} V_i(f^\varepsilon) = (\text{viz } (12)) = V_i(f).$$

Pro $h \in \mathscr{D}_m^1$ je však

$$\int_{E_m} f(\zeta) \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \zeta_i} \, d\zeta = \int_{E_{m-1}} \left(\int_{E_1} (f_\xi(\eta) \frac{dh_\xi(\eta)}{d\eta} \, d\eta \right) d\xi \leqq \int_{E_{m-1}} V(f_\xi) \, d\xi,$$

takže

$$V_i(f) \leqq \int_{E_{m-1}} V(f_\xi) \, d\xi.$$

Tato nerovnost spolu s (13) dává vztah (9).

Poznámka. Předchozí lemma by bylo možno dokázat také pro libovolné lokálně integrovatelné funkce. Jelikož v dalším je hodláme aplikovat jen na případ, kdy f je charakteristická funkce měřitelné množiny, je uvedená formulace pro naše účely postačující. Poznamenejme, že obecnější vyšetřování lokálně integrovatelných funkcí f, pro něž Df je míra, kde D je lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty působící jen na některé z proměnných, provedl K. KRICKEBERG v práci [13]. Pro speciální volbu operátorů $D = \partial/\partial x_i$ ukázal v kap. 5, že funkce, jejichž první parciální derivace jsou míry, splývající s funkcemi majícími konečnou variaci ve smyslu TONELLIHO a L. CESARIHO.[1]) Z výsledků [13] by bylo rovněž možno odvodit výše uvedené lemma až na tu jeho část, která zaručuje měřitelnost $V(f_\xi)$ i v případě $V_i(f) = +\infty$. Větu charakterisující distribuce jejichž první parciální derivace jsou míry ohlásil H. FEDERER v [5]. Omezené borelovsky měřitelné funkce f, pro něž

[1]) Bohužel, příslušné práce L. CESARIHO, G. FICHERA a C. GOFFMANA byly autoru tohoto článku nedostupné. Další odkazy nalezne čtenář v pracích [13], [17].

$\sum_{i=1}^{m} V_i(f) < +\infty$, splývají s funkcemi majícími zobecněný gradient ve smyslu E. DE GIORGIho [2]. Z hlediska L. C. YOUNGovy teorie zobecněných ploch studoval funkce se zobecněným gradientem W. H. FLEMING v [7]. Další výsledky o těchto funkcích ohlásil týž autor v [8]. Srovnání De Giorgiho teorie s teorií G. FICHERA[1]) provedl CHR. Y. PAUC v [16], [17]. V [17] Chr. Y. Pauc ukázal, že po modifikaci Ficherovy definice omezením intervalových dělení na „přípustná dělení“ ve smyslu C. GOFFMANa[1]) je Ficherova teorie ekvivalentní s teorií E. De Giorgiho.

12. Lemma. *Buď F lineární funkcionál na prostoru $\mathscr{D}_1$ a předpokládejme, že $+\infty > \|F\| = \sup_h F(h)$, $h \in \mathscr{D}_1^1$. Pak existuje na E_1 funkce g tak, že* var $(g; E_1) = \|F\|$ *a že platí*

$$F(h) = \int_{E_1} h \, \mathrm{d}g \,, \quad h \in \mathscr{D}_1 \,. \tag{14}$$

Důkaz. Označme symbolem F_n lineární funkcionál, jenž vznikne omezením lineárního funkcionálu F na prostor $\mathscr{D}_{1n}$ všech $h \in \mathscr{D}_1$, pro něž $S_h \subset (-n, n)$. Podle Hahn-Banachovy věty je možno funkcionál F_n rozšířit se zachováním normy na prostor $C(\langle -n, n \rangle)$ všech spojitých funkcí na $\langle -n, n \rangle$. Podle Rieszovy věty existuje na $\langle -n, n \rangle$ funkce g_n taková, že var $(g_n; \langle -n, n \rangle) = \|F_n\|$ a $\int_{-n}^{n} h \, \mathrm{d}g_n = F_n(h) = F(h)$ pro každé $h \in \mathscr{D}_{1n}$. Požadujeme-li ještě, aby $g_n(0) = 0$ a aby g_n byla zleva spojitá v každém bodě intervalu $(-n, n)$, je funkce g_n na $(-n, n)$ jednoznačně stanovena, takže $g_k(\eta) = g_n(\eta)$ pro $\eta \in (-n, n)$ a všechna $k \geqq n$. Funkce g_n určují pak zřejmým způsobem funkci g na E_1. Snadno nahlédneme, že

$$\text{var}\,(g; E_1) = \lim_{n \to \infty} \|F_n\| = \|F\|$$

a že platí (14).

Poznámka. Předchozí lemma je obsaženo ve známých obecnějších větách teorie distribucí; viz např. [10], kap. II, § 4.

13. Lemma. *Buď l lokálně integrovatelná funkce na E_1 a předpokládejme, že pro každé $h \in \mathscr{D}_1$ je $\int_{E_1} l(\eta) \frac{\mathrm{d}h(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \mathrm{d}\eta = 0$. Pak existuje konstanta c tak, že $l(\eta) = c$ pro skoro všechna $\eta \in E_1$.*

Důkaz. Náš předpoklad znamená, že distribuce $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} l$ je nulová. Z teorie distribucí (viz např. [9], kap. I, § 2, odst. 6 a [10], kap. II, § 1, odst. 5) plyne, že l je – až na množinu míry 0 – rovna konstantě.

14. Lemma. *Buď f lokálně integrovatelná funkce na E_1 a předpokládejme, že $V(f) < +\infty$. Pak existuje na E_1 funkce $\tilde{f}$ taková, že* var $(\tilde{f}; E_1) = V(f)$ *a $\tilde{f} = f$ skoro všude.*

Důkaz. Definujme na $\mathscr{D}_1$ funkcionál F předpisem

$$F(h) = \int_{E_1} f(\eta) \frac{\mathrm{d}h(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta .$$

Vzhledem k našemu předpokladu je $\|F\| = V(f) < +\infty$, takže podle lemmatu 12 existuje funkce g taková, že

$$\operatorname{var}(g; E_1) = V(f)$$

a

$$F(h) = \int_{E_1} h(\eta) \,\mathrm{d}g(\eta) = -\int_{E_1} g(\eta) \frac{\mathrm{d}h(\eta)}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{d}\eta$$

pro všechna $h \in \mathscr{D}_1$. Z lemmatu 13 dostáváme, že pro vhodnou konstantu c je $f(\eta) + g(\eta) = c$ skoro všude na E_1. Vidíme, že stačí položit $\tilde{f} = c - g$.

15. Definice. Buď A měřitelná množina v E_1. Bod $a \in E_1$ nazveme eA-bodem, když každý otevřený interval obsahující bod a má průnik kladné míry s oběma množinami A, $E_1 - A$. Počet všech eA-bodů označíme symbolem $\varepsilon(A)$ $(0 \leqq \varepsilon(A) \leqq +\infty)$.

16. Lemma. *Buď I jednorozměrný interval a buď A měřitelná množina v E_1. Mají-li obě množiny $A \cap I$, $(E_1 - A) \cap I$ kladnou míru, pak interval I^0 obsahuje aspoň jeden eA-bod.*

Důkaz. Zřejmě můžeme hned předpokládat, že $I = I^0$. Dejme tomu, tvrzení neplatí a přiřaďme každému $\eta \in I$ otevřený interval $U(\eta)$ tak, že $\eta \in U(\eta) \subset I$ a $U(\eta)$ má průnik míry 0 s některou z množin A, $E_1 - A$. Nechť U_1 (resp. U_2) je sjednocení těch $U(\eta)$ $(\eta \in I)$, jež mají nulový průnik s A (resp. s $E_1 - A$). Pak $U_1 \cup U_2 = I$ a snadno zjistíme, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Protože za našeho předpokladu $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$, dostáváme spor se souvislostí intervalu I.

17. Lemma. *Buď f charakteristická funkce měřitelné množiny $A \subset E_1$. Pak $V(f) = \varepsilon(A)$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme nerovnost

$$\varepsilon(A) \leqq V(f). \tag{15}$$

Tato nerovnost je zřejmá, když $V(f) = +\infty$. Buď tedy $V(f) < +\infty$. Nechť $a^1, \ldots, a^p$ jsou navzájem různé eA-body a nechť $I_1, \ldots, I_p$ jsou navzájem disjunktní otevřené intervaly takové, že $a^j \in I_j$ $(1 \leqq j \leqq p)$. Je-li $\tilde{f}$ funkce s vlastnostmi z lemmatu 14, pak $\tilde{f}$ nabývá v každém intervalu I_j obou hodnot 0, 1, takže $V(f) = \operatorname{var}(\tilde{f}; E^1) \geqq p$. Odtud je patrno, že platí (15). Nerovnost

$$V(f) \leqq \varepsilon(A) \tag{16}$$

je zřejmá v případě $\varepsilon(A) = +\infty$. Buď tedy $\varepsilon(A) < +\infty$ a nechť $a^1 < \ldots < a^p$ $(p = \varepsilon(A))$ jsou všechny eA-body. Položíme-li $a^0 = -\infty$, $a^{p+1} = +\infty$, pak vzhledem k lemmatu 16 žádný interval (a^{j-1}, a^j) $(1 \leqq j \leqq p + 1)$ nemůže mít průnik kladné míry s oběma množinami A, $E_1 - A$. Definujme na E_1 funkci g následujícím způsobem. Má-li interval (a^{j-1}, a^j) průnik kladné míry s A (resp. s $E_1 - A$), položíme $g(\eta) = 1$ (resp. $g(\eta) = 0$) pro všechna konečná η splňující nerovnost $a^{j-1} < \eta \leqq a^j$ $(j = 1, \ldots, p + 1)$. Protože a^j je eA-bod, nabývá funkce g různých hodnot na intervalech (a^{j-1}, a^j) a (a^j, a^{j+1}) $(1 \leqq j \leqq p)$, takže $\operatorname{var}(g; E_1) = p = \varepsilon(A)$. Přitom $f = g$ skoro všude, takže $V(f) = V(g) \leqq \operatorname{var}(g; E_1) = \varepsilon(A)$. Tím je dokázána nerovnost (16), jež spolu s (15) dává naše tvrzení.

18. Definice. Je-li A měřitelná množina v E_m, definujeme

$$\|A\|_i = V_i(f) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

kde f je charakteristická funkce množiny A. Systém všech měřitelných množin $A \subset E_m$, pro něž $\|A\|_i < +\infty$, označíme symbolem $\mathfrak{G}_i$.

Poznámka. Ze známých vět o vyjádření funkcionálu integrálem lze odvodit, že $\mathfrak{G}_i$ je právě systém všech měřitelných podmnožin v E_m, jejichž charakteristická funkce má za distributivní parciální derivaci podle i-té proměnné jistou úplně konečnou zobecněnou míru. Vlastnosti systémů $\mathfrak{G}_i$ a $\bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}$ byly z různých hledisek studovány E. De Giorgim [2], [4] a J. Maříkem [15]; viz též [4], [14]. Další výsledky v tomto směru patří H. Федеrerovi [6], W. H. Flemingovi [8] a K. Krickebergovi [13]. Viz též pozn. k odst. 11, 19.

19. Věta. *Buď A měřitelná množina v E_m a podržme označení z odst. 5. Pak $\varepsilon(A_\xi)$ je měřitelnou funkcí proměnné ξ na E_{m-1} a*

$$\|A\|_i = \int_{E_{m-1}} \varepsilon(A_\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Důkaz. Tato věta plyne ihned z lemmatu 17 a z lemmatu 11.

Poznámka. Pro omezené množiny plyne tato věta z výsledků J. Maříka (viz [15], věta 33 na str. 545 a věta 20 na str. 535–536), odvozených jiným postupem. Množiny, jejichž hranice má m-rozměrnou Lebesgueovu míru 0, vyšetřoval K. Krickeberg v [13], kap. 7.

20. Označení. V dalším jsou stále G^1, G^2 otevřené disjunktní množiny v E_m, $S = E_m - (G^1 \cup G^2)$.

Odvodíme nyní několik vět majících aplikace v teorii Lebesgueova povrchu uzavřených ploch.

21. Lemma. *Je-li $\xi \in E_{m-1}$ a $S_\xi \neq \emptyset \neq E_1 - S_\xi$, označíme symbolem $\mathfrak{S}(\xi)$ systém všech komponent množiny S_ξ; pro ostatní $\xi \in E_{m-1}$ buď $\mathfrak{S}(\xi) = \emptyset$. Nechť $\mathfrak{M}^k(\xi)$ je systém všech komponent $c \in \mathfrak{S}(\xi)$, k nimž existuje otevřený interval $I \supset c$ tak, že $I \cap G^k_\xi = \emptyset$. Buď dále M^k_ξ sjednocení všech komponent ze systému $\mathfrak{M}^k(\xi)$ a buď M^k množina všech bodů $[\xi, \eta]$, kde $\xi \in E_{m-1}$ a $\eta \in M^k_\xi$ $(k = 1, 2)$. Pak M^1, M^2 jsou disjunktní množiny typu F_σ.*

Důkaz. Snadno lze zjistit, že $\mathfrak{M}^1(\xi) \cap \mathfrak{M}^2(\xi) = \emptyset$ pro každé $\xi \in E_{m-1}$, takže také $M^1 \cap M^2 = \emptyset$. Stačí tedy zřejmě dokázat, že M^1 je typu F_σ. Je-li $\varepsilon > 0$, buď $L^\varepsilon_-(k)$ (resp. $L^\varepsilon_+(k)$) množina všech bodů $[\xi, \eta] \in S$, pro něž $\langle \eta - \varepsilon, \eta \rangle \subset (E_m - G^k)_\xi$ (resp. $\langle \eta, \eta + \varepsilon \rangle \subset (E_m - G^k)_\xi$); dále buď L^∞_- (resp. L^∞_+) množina bodů $[\xi, \eta]$, pro něž $(-\infty, \eta\rangle \subset S_\xi$ (resp. $\langle \eta, +\infty) \subset S_\xi$). Množiny $L^\varepsilon_-(k)$, $L^\varepsilon_+(k)$, L^∞_-, L^∞_+ jsou uzavřené. Množiny $K^\varepsilon_- = L^\varepsilon_-(1) - L^\varepsilon_-(2)$, $K^\varepsilon_+ = L^\varepsilon_+(1) - L^\varepsilon_+(2)$ jsou tedy typu F_σ, stejně jako množiny $K_- = \bigcup_\varepsilon K^\varepsilon_-$, $K_+ = \bigcup_\varepsilon K^\varepsilon_+$ (ε probíhá všechna kladná racionální čísla). Ukážeme, že

$$M^1 = (K_- \cap K_+) \cup (K_- \cap K^\infty_+) \cup (L^\infty_- \cap K_+) . \tag{17}$$

Buď tedy $[\xi, \eta] \in M^1$ a označme symbolem c tu komponentu z $\mathfrak{S}(\xi)$, která obsahuje bod η. Předpokládejme nejprve, že c je omezená. Podle definice množiny M^1 existuje otevřený interval $I \supset c$ tak, že $I \cap G^1_\xi = \emptyset$. Můžeme zřejmě předpokládat, že koncové body intervalu I mají tvar $\eta - \varepsilon_1$, $\eta + \varepsilon_2$, kde ε_1, ε_2 jsou kladná racionální čísla. Máme pak (podotýkáme, že množina G^1_ξ je otevřená, takže je nutně disjunktní i s uzávěrem intervalu I)

$$\langle \eta - \varepsilon_1, \eta \rangle \cap G^1_\xi = \emptyset = \langle \eta, \eta + \varepsilon_2 \rangle \cap G^1_\xi . \tag{18}$$

Na druhé straně není možné, aby bylo $\langle \eta - \varepsilon_1, \eta \rangle \cap G^2_\xi = \emptyset$ (pak by totiž bylo $\langle \eta - \varepsilon_1, \eta \rangle \subset S_\xi$, $\langle \eta - \varepsilon_1, \eta \rangle \subset c$) nebo $\langle \eta, \eta + \varepsilon_2 \rangle \cap G^2_\xi = \emptyset$, takže

$$\langle \eta - \varepsilon_1, \eta \rangle \cap G^2_\xi \neq \emptyset \neq \langle \eta, \eta + \varepsilon_2 \rangle \cap G^2_\xi . \tag{19}$$

Podle (18), (19) je tedy

$$[\xi, \eta] \in (L^{\varepsilon_1}_-(1) - L^{\varepsilon_1}_-(2)) \cap (L^{\varepsilon_2}_+(1) - L^{\varepsilon_2}_+(2)) \subset K_- \cap K_+ .$$

Čtenář sám snadno ověří, že $[\xi, \eta] \in L^\infty_+ \cap K_-$ (resp. $[\xi, \eta] \in L^\infty_- \cap K_+$) v případě, že množina c není omezena shora (resp. zdola); tím je dokázána inkluse

$$M^1 \subset (K_- \cap K_+) \cup (K_- \cap L^\infty_+) \cup (L^\infty_- \cap K_+) . \tag{20}$$

Nyní dokážeme inklusi

$$K_- \cap K_+ \subset M^1 . \tag{21}$$

Buď tedy $[\xi, \eta] \in K_- \cap K_+$. Pak existují kladná racionální čísla ε_1, ε_2 tak, že $[\xi, \eta] \in K^{\varepsilon_1}_- \cap K^{\varepsilon_2}_+$, což značí, že platí vztahy (18), (19). Je-li $\langle a, b \rangle$ komponenta množiny S_ξ, která obsahuje bod η, pak z (19) je patrno, že $\eta - \varepsilon_1 < a \leqq b < \eta + \varepsilon_2$, což spolu s (18) znamená, že $[\xi, \eta] \in M^1$. Analogicky se ověří inkluse $K_- \cap L^\infty_+ \subset M^1$, $L^\infty_- \cap K_+ \subset M^1$, které spolu s (21) a (20) dávají vztah (17). Ježto množiny na pravé straně rovnosti (17) jsou vesměs typu F_σ, platí totéž i o množině M^1.

22. Lemma. *Buď $\xi \in E_{m-1}$ a položme*

$$\mathfrak{N}(\xi) = \mathfrak{S}(\xi) - (\mathfrak{M}^1(\xi) \cup \mathfrak{M}^2(\xi))$$

(*viz* 21). *Je-li I jednorozměrný interval takový, že*

$$I \cap G^1_\xi \neq \emptyset \neq I \cap G^2_\xi\,,$$

pak I obsahuje aspoň jednu komponentu ze systému $\mathfrak{N}(\xi)$.

Důkaz. Můžeme zřejmě předpokládat, že jeden koncový bod intervalu I patří do G^1_ξ a druhý do G^2_ξ. Ať pro určitost počáteční bod a intervalu I leží v G^1_ξ a koncový bod b téhož intervalu leží v G^2_ξ. Buď E množina všech bodů $\eta \in (a, b)$, pro něž $(a, \eta) \cap G^2_\xi = \emptyset$. Nechť η_0 je supremum množiny E; zřejmě $\eta_0 \in S_\xi$, $a < \eta_0 < b$. Je-li c komponenta množiny S_ξ obsahující bod η_0, pak $c \subset (a, b)$, $c \in \mathfrak{N}(\xi)$.

23. Věta. *Označme pro* $\xi \in E_{m-1}$ *symbolem* $\pi(\xi; G^1, G^2) = \pi(\xi)$ *počet komponent ze systému* $\mathfrak{N}(\xi)$ (*viz* 22). *Pak funkce* $\pi(\xi)$ *je měřitelná na* E_{m-1} *a pro každou měřitelnou množinu A splňující inkluse*

$$G^1 \subset A \subset E_m - G^2 \tag{22}$$

platí

$$\varepsilon(A_\xi) \geqq \pi(\xi) \tag{23}$$

pro skoro všechna $\xi \in E_{m-1}$. *Položíme-li* $B = G^1 \cup M^2$ (*viz* 21), *pak B je typu* F_σ,

$$G^1 \subset B \subset E_m - G^2 \tag{24}$$

a

$$\varepsilon(B_\xi) = \pi(\xi) \tag{25}$$

pro skoro všechna[2]) $\xi \in E_{m-1}$.

Důsledek. *Jest*

$$\|B\|_i = \int_{E_{m-1}} \pi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

a pro každou měřitelnou množinu A splňující inkluse (22) *platí* $\|A\|_i \geqq \|B\|_i$.

Důkaz. Nechť A splňuje předpoklady uvedené v tvrzení a buď $\xi \in E_{m-1}$ tak voleno, že množina A_ξ je měřitelná. Nerovnost (23) je zřejmá, když $\pi(\xi) = 0$. Buď tedy $\pi(\xi) > 0$ a zvolme libovolně přirozené číslo $q \leqq \pi(\xi)$. Nechť $c_1, \ldots, c_q$ jsou navzájem různé komponenty z $\mathfrak{N}(\xi)$ a přiřaďme každé komponentě c_k otevřený interval $I_k \supset c_k$ tak, aby intervaly $I_1, \ldots, I_q$ byly navzájem disjunktní. Podle definice systému $\mathfrak{N}(\xi)$ jsou množiny $G^1_\xi \cap I_k$, $G^2_\xi \cap I_k$ neprázdné, takže množiny $A_\xi \cap I_k$, $(E_1 - A_\xi) \cap I_k$ $(1 \leqq k \leqq q)$ mají kladnou jednorozměrnou míru. Z lemmatu 16 plyne, že každý interval I_k obsahuje aspoň jeden eA_ξ-bod, takže $\varepsilon(A_\xi) \geqq q$. Protože q bylo libovolné přirozené číslo splňující nerovnost $q \leqq \pi(\xi)$, platí (23).

Zaměníme-li v (23) A za B ,vidíme, že (25) platí, jestliže $\pi(\xi) = +\infty$. Buď tedy $\pi(\xi) = \pi < +\infty$ a nechť $c_1, \ldots, c_\pi$ jsou všechny komponenty ze systému $\mathfrak{N}(\xi)$.

[2]) Rovnost (25) platí dokonce pro všechna $\xi \in E_{m-1}$; tento fakt však nebudeme nikde potřebovat.

Poznamenejme, že všechny intervaly c_k jsou kompaktní. Kdyby totiž bylo např. $(-\infty, a\rangle \in \mathfrak{N}(\xi)$, obsahoval by každý interval $(a, a + \delta)$ $(\delta > 0)$ body obou množin G^1_ξ i G^2_ξ a tedy – podle lemmatu 22 – také některou komponentu z $\mathfrak{N}(\xi)$; to by však znamenalo, že $\pi = \pi(\xi) = +\infty$. Je-li I styčný interval množiny $\bigcup_{k=1}^{\pi} c_k$, pak I neobsahuje žádnou komponentu z $\mathfrak{N}(\xi)$ a podle lemmatu 22 je buď

$$G^1_\xi \cap I = \emptyset\,, \tag{26}$$

nebo

$$G^2_\xi \cap I = \emptyset\,. \tag{27}$$

V případě (26) je $I \subset E_1 - B_\xi$, v případě (27) je $I \subset B_\xi$. Protože $c_k \in \mathfrak{N}(\xi)$, je ze dvou styčných intervalů množiny $\bigcup_{k=1}^{\pi} c_k$ přiléhajících k c_k jeden obsažen v B_ξ a druhý v $E_1 - B_\xi$. Podle definice množiny B je mimo to $c_k \subset E_1 - B_\xi$. Vidíme, že právě jeden z koncových bodů komponenty c_k je eB_ξ-bodem, takže počet všech eB_ξ-bodů je roven π. Tím je důkaz rovnosti (25) dokončen.

Protože B je měřitelná množina (viz 21), je funkce $\varepsilon(B_\xi)$ a tedy i $\pi(\xi)$ měřitelná (viz 19).

24. Lemma. *Jsou-li $a < b$ reálná čísla, označme symbolem $S_{a,b}$ množinu všech $\xi \in E_{m-1}$, pro něž $S_\xi \supset \langle a, b\rangle$ a položme*

$$S^{a,b} = [S_{a,b}, (a, b)]$$

(viz 5). Buď dále

$$S^* = \bigcup S^{a,b} \quad (a, b \text{ racionální}, a < b)\,.$$

Pak množina $S^* \subset S$ je typu F_σ a $[\xi, \eta] \in S^*$ právě tehdy, když η je vnitřním bodem množiny S_ξ.

D ů k a z tohoto tvrzení je možno přenechat čtenáři.

25. Věta. *Jestliže*

$$\|G^1\|_i + \|G^2\|_i < +\infty\,, \tag{28}$$

pak množina $S - S^*$ má (m-rozměrnou) míru nula.

D ů k a z. Zvolme pevně $\xi \in E_{m-1}$ a předpokládejme, že $(S - S^*)_\xi$ má kladnou jednorozměrnou míru. (Podotýkáme, že vzhledem k lemmatu 24 je množina $S - S^*$ borelovská.) Jak plyne z věty (10.2) v [18], str. 129, existuje množina $E \subset (S - S^*)_\xi$ kladné jednorozměrné míry tak, že pro každé $\eta \in E$ a každé $\delta > 0$ je míra množiny $(\eta - \delta, \eta + \delta) \cap (S - S^*)_\xi$ kladná. Protože η je hraničním bodem množiny S_ξ, je množina

$$(E_1 - S_\xi) \cap (\eta - \delta, \eta + \delta) = (G^1_\xi \cap (\eta - \delta, \eta + \delta)) \cup (G^2_\xi \cap (\eta - \delta, \eta + \delta))$$

neprázdná a má tedy rovněž kladnou míru (neboť je otevřená). Odtud je patrno, že každý bod $\eta \in E$ je buď eG^1_ξ-bodem nebo eG^2_ξ-bodem. Ježto E má kladnou míru, je ovšem $\varepsilon(G^1_\xi) + \varepsilon(G^2_\xi) = +\infty$. Z předpokladu (28) však plyne, že $\varepsilon(G^1_\xi) + \varepsilon(G^2_\xi) < < +\infty$ pro skoro všechna $\xi \in E_{m-1}$ (viz 19), takže také $(S - S^*)_\xi$ má míru 0 pro skoro všechna $\xi \in E_{m-1}$.

26. Věta. *Nechť množina S má kladnou míru. Pak existuje uzavřená množina $S^\wedge \subset S$ tak, že pro $A = G^1 \cup S^\wedge$ je $\|A\|_i = +\infty$.*

Důsledek. *K tomu, aby pro každou měřitelnou množinu A splňující inkluse (22) bylo $\|A\|_i < +\infty$, je nutno a stačí, aby bylo $\|B\|_i < +\infty$ a aby míra množiny S byla rovna* 0.

Důkaz. Je-li $\|G^1\|_i = +\infty$ (resp. $\|G^2\|_i = +\infty$), stačí položit $S^\wedge = \emptyset$ (resp. $S^\wedge = S$). Nechť tedy platí (28). Podle věty 25 má množina S^* kladnou míru, takže pro vhodná racionální $a < b$ má rovněž množina $S^{a,b}$ (viz 24) kladnou míru. Položme pro $n \geqq 0$

$$a_n = b - \frac{b-a}{2^n}, \quad b_n = a_n + \frac{b-a}{2^{n+2}}.$$

Pak $a = a_0 < b_0 < \ldots < a_n < b_n < \ldots$ a množina

$$F = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle\right) \cup \{b\}$$

je uzavřená v E_1. Množina $S^\wedge = [S_{a,b}, F]$ (viz 24 a 25) je tedy uzavřená v E_m, $S^\wedge \subset S$. Položíme-li $A = G^1 \cup S^\wedge$, pak pro $\xi \in S_{a,b}$ je každý bod b_n $(n = 0, 1, \ldots)$ eA_ξ-bodem, takže $\varepsilon(A_\xi) = +\infty$. Ježto $S_{a,b}$ má kladnou $(m-1)$-rozměrnou míru, je $\|A\|_i = = +\infty$.

Poznámka. (*Doplněno dne 7. prosince 1960.*) V době, kdy byl tento článek v tisku, vyšla práce W. H. Fleminga [20], kde jsou odvozeny další zajímavé výsledky týkající se množin ze systému 𝔖 (viz pozn. k odst. 18). V referativních časopisech (Math. Rev. 1959, 4792; Ref. žur. 1959, 8119) se objevily recense práce E. de Giorgiho [19], věnované isoperimetrické nerovnosti ve třídě 𝔖; tato práce je, bohužel, dosud nedostupná autoru tohoto článku.

LITERATURA

[1] *R. Cacciopoli:* Misure e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. Atti Acc. Naz. Lincei ser. VIII, vol. *XII* (1952), fasc. 1—2.

[2] *E. De Giorgi:* Su una teoria generale della misura $(r - 1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Annali di Mat. Pura Appl. *(4)*, *36* (1954), 191—213.

[3] *E. De Giorgi:* Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme. Atti Acc. Naz. Lincei ser. VIII, vol. *XIV* (1953), fasc. 3, 390—393.

[4] *E. De Giorgi:* Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni. Ricerche di Mat. *4* (1955), 95—113.

[5] *H. Federer:* An analytic characterisation of distributions whose partial derivatives are representable by measures. Bull. Amer. Math. Soc. 1954, Abstract No 407t.

[6] *H. Federer:* A note on the Gauss-Green theorem. Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 447—451.

[7] *W. H. Fleming:* Functions with generalized gradient and generalized surfaces. Annali di Mat. Pura Appl. ser. 4, vol. *44* (1957), 93—104.

[8] *W. H. Fleming:* Functions whose partial derivatives are measures. Bull. Amer. Math. Soc. vol. *64*, 1958, 364—365.

[9] *И. М. Гельфанд-Г. Е. Шилов:* Обобщенные функции и действия над ними. Москва 1958.

[10] *И. М. Гельфанд-И. Е. Шилов:* Пространства основных и обобщенных функций, Москва 1958.

[11] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

[12] *K. Krickeberg:* Distributions and Lebesgue area. Bull. Amer. Math. Soc. *63* (1957), No 4, Abstract No 437.

[13] *K. Krickeberg:* Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen. Annali di Mat. Pura Appl. (*4*) *44* (1957), 92, 105—133.

[14] *J. Mařík:* Plošný integrál. Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), 79—82.

[15] *J. Mařík:* The surface integral. Чех. мат. журн. *6* (*81*), 1956, 522—558.

[16] *Chr. Y. Pauc:* Considérations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. De Giorgi. Annali di Mat. Pura Appl. (*4*) *40* (1955), 183—L 192.

[17] *Chr. Y. Pauc:* Functions with generalized gradients in the theory of cell functions. Annali di Mat. Pura Appl. (*4*) *44* (1957), 92, 135—152.

[18] *S. Saks:* Theory of the integral. New York.

[19] *E. De Giorgi:* Sulla proprietà isoperimetrica dell' ipersfera nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita. Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. e Natur., 1958, Sez. *1*, *5*, No 2, 33—44.

[20] *W. H. Fleming:* Functions whose partial derivatives are measures. Illinois Journal of Math. vol. *4*, No 3 (1960), 452—478.

Резюме

ЗАМЕТКА О МНОЖЕСТВАХ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ОБОБЩЕННУЮ МЕРУ В КАЧЕСТВЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Иосеф Крал (Josef Král), Прага

Пусть χ_A обозначает характеристическую функцию множества $A \subset E_m$. Систему всех измеримых множеств $A \subset E_m$, для которых производную $\dfrac{\partial \chi_A(x)}{\partial x_i}$ (понимаемую в смысле теории обобщенных функций) можно отождествить с обобщенной вполне конечной мерой, будем обозначать через $\mathfrak{S}_i$; полное изменение соответствующей меры на E_m обозначим через $\|A\|_i$. Положим ещё $\|A\|_i = +\infty$ для всех измеримых множеств $A \subset E_m$, не принадлежащих к системе $\mathfrak{S}_i$. Если $M \subset E_1$, $a \in E_1$ и если множества $M \cap I$, $(E_1 - M) \cap I$ имеют положительную линейную внешнюю меру для каждого открытого интервала $I \subset E_1$, содержащего точку a, то точку a назовём eM-точкой. Число всех eM-точек обозначим через $\varepsilon(M)$ $(0 \leqq \varepsilon(M) \leqq +\infty)$. Закрепим теперь натуральные

числа i, m, $1 \leqq i \leqq m$, $m > 1$. Для $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}] \in E_{m-1}$ и $\eta \in E_1$ напишем $[\xi, \eta] = [\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta, \xi_i, \ldots, \xi_{m-1}]$.

Если $A \subset E_m$ и $\xi \in E_{m-1}$, то полагаем $A_\xi = \{\eta; \eta \in E_1, [\xi, \eta] \in A\}$.

Теорема. *Если A — измеримое подмножество в E_m, то функция $\varepsilon(A_\xi)$ переменного ξ измерима на E_{m-1} и*

$$\|A\|_i = \int_{E_{m-1}} \varepsilon(A_\xi)\, d\xi .$$

Пусть теперь G^1, G^2 — открытые непересекающиеся подмножества в E_m, $S = E_m - (G^1 \cup G^2)$. Для $\xi \in E_{m-1}$ обозначим через $\mathfrak{N}(\xi)$ систему всех компонент C множества S_ξ, обладающих следующим свойством:

$$I \cap G^1_\xi \neq \emptyset \neq I \cap G^2_\xi$$

для каждого открытого интервала $I \supset C$. Пусть ещё $\mathfrak{M}(\xi)$ — система всех компонент C множества S_ξ, для которых существует открытый интервал $I \supset C$, $I \neq C$, имеющий пустое пересечение с G^2_ξ. Символом M обозначим множество всех точек вида $[\xi, \eta]$, где $\xi \in E_{m-1}$, $\eta \in C \in \mathfrak{M}(\xi)$ и положим $B = G^1 \cup M$.

Теорема. *Обозначим через $\pi(\xi)$ $(0 \leqq \pi(\xi) \leqq +\infty)$ число элементов системы $\mathfrak{N}(\xi)$. Тогда для каждого измеримого множества A, где*

$$(*) \qquad G^1 \subset A \subset E_m - G^2 ,$$

имеет место неравенство $\varepsilon(A_\xi) \geqq \pi(\xi)$, $\xi \in E_{m-1}$. Множество B типа F_σ и $\varepsilon(B_\xi) = \pi(\xi)$, $\xi \in E_{m-1}$. Следовательно, $\pi(\xi)$ является измеримой функцией переменного ξ,

$$\|B\|_i = \int_{E_{m-1}} \pi(\xi)\, d\xi$$

и для каждого измеримого множества A, удовлетворяющего соотношению (*), имеет место неравенство $\|A\|_i \geqq \|B\|_i$.

Пусть, далее, S^* — множество всех точек вида $[\xi, \eta]$, где $\xi \in E_{m-1}$ и η есть внутренняя точка множества S_ξ. Тогда имеет место

Теорема. *Если $\|G^1\|_i + \|G^2\|_i < +\infty$, то множество $S - S^*$ имеет меру нуль. Если S имеет положительную меру, то существует замкнутое множество $F \subset S$ так, что множество $G^1 \cup F$ не принадлежит к системе $\mathfrak{S}_i$.*

Эти результаты находят применение в теории лебеговой площади.

Summary

NOTE ON SETS WHOSE CHARACTERISTIC FUNCTIONS HAVE SIGNED MEASURES FOR THEIR DERIVATIVES

JOSEF KRÁL, Praha

For $A \subset E_m$ denote by χ_A the characteristic function of A. Let $\mathfrak{G}_i$ be the system of all Lebesgue measurable subsets A in E_m for which the derivative $\partial\chi_A(x)/\partial x_i$ (taken in the sense of distribution theory) can be identified with a finite signed measure over E_m; let $\|A\|_i$ denote the variation of the corresponding measure on E_m. Further put $\|A\|_i = +\infty$ for all Lebesgue measurable sets $A \subset E_m$ not belonging to $\mathfrak{G}_i$. Fix now the integers i, m with $m > 1$, $1 \leqq i \leqq m$ and write $[\xi, \eta]$ $(\eta \in E_1, \xi \in E_{m-1})$ for $[\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta, \xi_i, \ldots, \xi_{m-1}]$. Given a set $A \subset E_m$ and a point $\xi \in E_{m-1}$ we put $A_\xi = \{\eta; \eta \in E_1, [\xi, \eta] \in A\}$. Let now M be a measurable subset in E_1. A point $a \in E_1$ will be termed an eM-point provided both $M \cap I$ and $(E_1 - M) \cap I$ have positive linear measure for any open interval $I \subset E_1$ with $a \in I$. The number (possibly zero or infinite) of all eM-points in E_1 will be denoted by $\varepsilon(M)$.

Theorem. *Let A be a Lebesgue measurable subset in E_m. Then $\varepsilon(A_\xi)$, considered as a function of the variable ξ on E_{m-1}, is Lebesgue measurable and*

$$\|A\|_i = \int_{E_{m-1}} \varepsilon(A_\xi)\, d\xi .$$

Let now G^1, G^2 be disjoint open subsets in E_m and put $S = E_m - (G^1 \cup G^2)$. Given $\xi \in E_{m-1}$ we denote by $\mathfrak{N}(\xi)$ the system of all components C of S_ξ with the following property: $I \cap G^1_\xi \neq \emptyset \neq I \cap G^2_\xi$ for any open interval $I \subset E_1$ with $C \subset I$. Let $\mathfrak{M}(\xi)$ be the system of all components C of S_ξ for which such an open interval $I \subset E_1$ can be chosen that $C \subset I$, $C \neq I$ and $I \cap G^2_\xi = \emptyset$. Further denote by M the set of all $[\xi, \eta]$ with $\xi \in E_{m-1}$, $\eta \in C$, $C \in \mathfrak{M}(\xi)$ and put $B = G^1 \cup M$.

Theorem. *Let $\pi(\xi)$ stand for the number of elements in $\mathfrak{N}(\xi)$. Then $\varepsilon(A_\xi) \geqq \pi(\xi)$ $(\xi \in E_{m-1})$ for any Lebesgue measurable set A with*

$$G^1 \subset A \subset E_m - G^2 . \tag{*}$$

B is an F_σ-set and $\varepsilon(B_\xi) = \pi(\xi)$, $\xi \in E_{m-1}$. Consequently, $\pi(\xi)$ is Lebesgue measurable on E_{m-1}, $\|B\|_i = \int_{E_{m-1}} \pi(\xi)\, d(\xi)$ and $\|A\|_i \geqq \|B\|_i$ for every Lebesgue measurable set A with (*).

Denote by S^* the set of all $[\xi, \eta]$, where $\xi \in E_{m-1}$ and η belongs to the interior of S_ξ.

Theorem. *If $\|G^1\|_i + \|G^2\|_i < +\infty$, then $S - S^*$ has (m-dimensional) measure zero.*

Hence it follows easily that there exists a closed set $F \subset S$ such that $G^1 \cup F$ does not belong to $\mathfrak{G}_i$ whenever S has positive measure. These results have applications in area theory.