Časopis pro pěstování matematiky

# Recense

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 86 (1961), No. 2, 243--252

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108200`

# RECENSE

*János Surányi*: REDUKTIONSTHEORIE DES ENTSCHEIDUNGSPROBLEMS IM PRÄDIKATENKALKÜL DER ERSTEN STUFE. Budapest 1959, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, str. 216.

V úvodních kapitolách 1 a 2 jsou uvedeny elementy predikátové logiky 1. stupně s rovností a s termy (čili funkcemi) v obvyklém označení. Splnitelnost a universální platnost (příp. v daném oboru) formulí (čili výrazů) je definována sémanticky (tj. výraz $\mathfrak{A}$ je splnitelný, jestliže existuje taková jeho interpretace, že v ní je $\mathfrak{A}$ pravdivý, a $\mathfrak{A}$ je universálně platný, jestliže je splnitelný v každé své interpretaci). V problému rozhodnutelnosti predikátové logiky 1. stupně jde o určení universálního postupu jak rozhodnout, zdali je či není libovolný výraz této logiky splnitelný (příp. universálně platný).

Problém rozhodnutelnosti, vyslovený prvně D. HILBERTEM, byl v popředí zájmu matematických logiků v období mezi oběma válkami, neboť teprve těsně před poslední válkou dokázal A. CHURCH jako obecně rekursivní neřešitelnost (tj. řešil jej záporně). V tomto období byly činěny pokusy řešit problém rozhodnutelnosti částečně a to dvojím směrem. Na jedné straně se podařilo řešit (kladně) problém rozhodnutelnosti pro některé speciální třídy výrazů uvažované logiky a výsledky tohoto druhu shrnul W. ACKERMANN do monografie *Solvable Cases of the Decision Problem* (Studies in Logic, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1954). Na druhé straně byly nalezeny takové speciální třídy výrazů, jejichž problém rozhodnutelnosti (tj. hledaný postup se týká jenom těchto výrazů a nikoli všech) je ekvivalentní s původním problémem rozhodnutelnosti (tj. týká se všech výrazů). Tím se původní problém převáděl na problémy speciálnější a právě výsledky týkající se takovýchto redukcí jsou shrnuty v této knize. Její autor spolu s L. KÁLMÁREM, jehož je žákem a dlouholetým spolupracovníkem, jsou jedinými matematickými logiky, kteří se otázkami redukce zabývají dodnes, a také většina výsledků zahrnutých v této knize je jejich.

V úvodních kapitolách je dále naznačen program celé knihy. Převádění původního problému rozhodnutelnosti se děje dvojím způsobem.

Při prvním způsobu se vyhledávají tzv. redukční typy vzhledem k splnitelnosti (jedinou výjimku tvoří věty III a IIIa, v nichž jde o redukční typy vzhledem k universální platnosti), což jsou takové třídy výrazů, že je znám postup, jak po konečném počtu kroků sestrojit k libovolnému výrazu $\mathfrak{A}$ výraz $\mathfrak{B}$ patřící do této třídy a současně rovnocenný vzhledem k splnitelnosti s výrazem $\mathfrak{A}$ (tj. $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ jsou buď oba splnitelné nebo oba nesplnitelné). Příkladem rovnocennosti (vzhledem k splnitelnosti) je (sémantická) ekvivalence definovaná takto: Výrazy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou ekvivalentní a píšeme $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, jestliže výraz $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ je universálně platný. Snadno lze ověřit, že platí celá řada jednoduchých ekvivalencí, např. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \wedge$ $\wedge\, (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$, $\overline{\forall x\, \mathfrak{A}} = \exists\, x\, \overline{\mathfrak{A}}$ atd., s jejichž pomocí se dokáže, že redukčním typem (vzhledem k splnitelnosti) je třída všech výrazů v prefixovém tvaru (tj. všechny kvantory jsou na začátku a tvoří tzv. prefix, zatím co zbývající část výrazu, tzv. jádro, je oborem všech kvantorů) (věta I).

Při druhém způsobu se hledá mohutnost oboru, v němž konstruujeme interpretace, taková, aby splnitelnost daného výrazu byla ekvivalentní jeho splnitelnosti v oboru této mohutnosti.

Např. neobsahuje-li výraz $\mathfrak{A}$ rovnost (tj. znak rovnosti se ve výrazu $\mathfrak{A}$ nevyskytuje) a je-li $\mathfrak{A}$ splnitelný, pak existuje taková mohutnost $\mu$, že $\mathfrak{A}$ je splnitelný v oboru $I$ právě tehdy, když $I$ má mohutnost větší než rovnu $\mu$ (věta II).

O redukčních typech, jejichž výrazy buď neobsahují některé z logických znaků nebo (na základě I) jsou v prefixovém tvaru a při tom jejich prefixy mají speciální tvar, pojednává kapitola 3. Např. redukčním typem je třída všech výrazů, které neobsahují ani výrokové proměnné ani pravdivostní hodnoty (IV) nebo neobsahují funkční proměnné (VI) nebo znaky rovnosti (VIII), zatím co redukčním typem vzhledem k universálnosti platnosti je třída všech výrazů neobsahujících ani negace ani pravdivostní hodnotu nepravdy (věta III od H. THIELEHO). Redukčním typem druhého druhu je třída všech výrazů v prefixovém tvaru, jejichž prefix neobsahuje žádný $\exists$-kvantor (V) nebo které jsou uzavřené (tj. neobsahují volné individuové proměnné), neobsahují funkční proměnné a při tom jejich prefix má tvar $\forall^m\exists^n$ (tj. napřed je $m$ $\forall$-kvantorů a za nimi následuje $n$ $\exists$-kvantorů) (věta VII od T. SKOLEMA, k jejímuž důkazu je užito VI). Často užívaný obrat jak se $\exists$-kvantor výrazu v prefixovém tvaru (nebo v konjunkci prefixových tvarů) nahrazuje novou funkční proměnnou (věta V′), kterého je užitou při důkazu věty V, je samostatně a velmi podrobně dokázán. Základní postup důkazů všech vět o redukčních typech je stále týž: jde o to sestrojit z interpretace splňující daný výraz $\mathfrak{A}$ interpretaci splňující redukovaný výraz $\mathfrak{B}$ (nebo alespoň zaručit její existenci, někdy i pomocí axiomu výběru, jako v V′) a naopak. Jeden z klasických obratů tohoto druhu je předveden na zesílení věty VII (kde lze žádat $m = 3$) a je při tom užito původní metody K. GÖDELA o postupném zmenšování počtu $\forall$-kvantorů.

V kapitolách 4—7 je pojednáno o redukčních typech obsahujících výrazy v prefixovém tvaru, jejichž prefixy mají omezený (a pokud možno malý) počet kvantorů a jejichž jádra obsahují predikátové proměnné s omezeným (a pokud možno malým) počtem míst. V kapitole 4 jsou podrobně dokázány obě nejsilnější věty (od J. SURÁNYIHO), které dovolují zjednodušit důkazy celé řady vět v dalších kapitolách.

Věta IX: Redukčním typem je třída všech uzavřených výrazů tvaru $\forall x_1 x_2 x_3 \mathbf{M}_1 \wedge \forall y_1 y_2 \exists y_3 \mathbf{M}_2$, kde jádra $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ obsahují jenom individuové proměnné, logické operace a jenom takové predikátové proměnné, jejichž počet míst je nejvýše dvě (tedy $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ neobsahují ani rovnosti ani funkční proměnné). Při důkazu je užito myšlenky Skolemovy jak zmenšit počet $A$-kvantorů zavedením nových individuových proměnných jakožto vektorů, jejichž složkami jsou původní individuové proměnné. Tato věta je dále zesílena tak, že navíc jádra $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ obsahují nejvýše jednu dvoumístnou predikátovou proměnnou (X).

Na základě věty X je původní problém rozhodnutelnosti převeden a znázorněn v teorii *orientovaných grafů*: Nechť obor $I$ (spočetný podle XI, viz níže) je množinou uzlů grafu a nechť z uzlu $a$ jde (orientovaná) hrana do uzlu $b$ právě tehdy, když pro uspořádanou dvojici $(a, b)$ dvoumístný predikát v $I$ (odpovídající jediné dvoumístné predikátové proměnné z X) je pravdivý. Jednomístným predikátům z X nechť odpovídají barvy jednotlivých uzlů (takže některé uzly mohou mít více barev). Potom splnitelnost nějakého výrazu z uvažovaného redukčního typu X znamená, že 1. libovolné tři uzly splňují jisté podmínky o barvách a o spojení hranami (jde o první člen konjunkce v X) a 2. ke každým dvěma existuje třetí uzel takový, že tyto tři splňují jisté další podmínky o barvách a o spojení hranami. Nyní problém udat předpis a rozhodnout, současně pro všechny druhy možných podmínek (tedy nezávisle na konkrétních daných podmínkách) zdali existuje graf daným podmínkám vyhovující, je ekvivalentní původnímu problému rozhodnutelnosti (a ovšem podle věty Churchovy je to příklad třídy problémů z teorie grafů, která je obecně rekursivně neřešitelná).

Teprve v kapitole 5 je využito Löwenheim-Skolemovy věty (o splnitelnosti výrazu bez rovnosti ve spočetném oboru tehdy, když je splněn vůbec v nějakém neprázdném oboru (XI)), která umožňuje užívat číselně teoretické metody (splnitelnost se prokazuje v oboru přirozených čísel!). Těmito prostředky (pomocí X) se dokazuje, že redukčním typem je třída uzavřených výrazů tvaru $\exists\forall\exists\forall^2 \mathbf{M}$ (XII) nebo $\exists\forall\exists^3\forall \mathbf{M}$ (XIII), kde $\mathbf{M}$ může obsahovat jenom jednomístné a nejvýše dvoumístné predikátové proměnné. Věta XII je zesílením výsledku Ackermannova, který uvažoval prefixy tvaru $\exists\forall\exists\forall^n$ a věta XIII souvisí s výsledkem J. PEPISE, že se vystačí jenom se dvěma $\forall$-kvantory.

V kapitolách 6 a 7 jsou shrnuty výsledky Kálmárovy týkající se redukčních typů obsahujících uzavřené výrazy v prefixovém tvaru, jejichž jádra obsahují jedinou predikátovou proměnnou a ta je dvoumístná. Při tom jejich prefix je tvaru např. $\exists^n\forall^3\exists$ (XIV) nebo $\forall^2\exists^n\forall$ (XV) nebo $\forall^n\exists$ (XVI) atd. Při důkazech těchto vět je zase užito množinových prostředků (a zase se vychází z X a z obratu, jak lze několik jednomístných predikátů nahradit jediným dvoumístným. Číselně teoretickými (tj. aritmetickými) prostředky jsou dokázány věty pro případy prefixů tvaru $\exists^n\forall\exists^a\forall^2$ (XIX, kde $a \leqq 30$) a $\exists^n\forall\exists^a\forall$ (XX, kde $a \leqq 32$) aj.

V poslední kapitole 8 je naznačen důkaz věty XXI: Ke každému výrazu $\mathfrak{A}$ lze (po konečném počtu kroků) sestrojit takový výraz $\mathfrak{B}$, že $\mathfrak{A}$ je splnitelný právě tedy, a když $\mathfrak{B}$ je splnitelný v nějakém konečném oboru. Je to jediný důkaz nesémantický, který využívá Skolem-Herbrandovy věty (syntaktické věty o splnitelnosti). Závěrem je podán Kalmárův důkaz Churchovy věty o obecně rekursivní neřešitelnosti problému rozhodnutelnosti (XXII).

Zatím neřešené otázky, na něž je na příslušných místech knihy upozorňováno, jsou shrnuty samostatně v dodatečných poznámkách. Podle názoru autora by bylo užitečné podat přímé syntaktické důkazy syntaktické nevyvratitelnosti (což je ekvivalentní sémantické splnitelnosti) redukčních typů z kapitol 4, 6 a 7 a to bez použití Skolem-Herbrandovy věty. Není dále známo, zdali třída výrazů, které obsahují z logických operací jenom ekvivalenci (příp. ekvivalenci a negaci) je redukčním typem vzhledem k universální platnosti (srv. III) nebo zdali je rozhodnutelná. — Jak dalece lze zmenšit počet dvoumístných predikátových proměnných ve větách kapitoly 5? — Lze zmenšit počet $\exists$-kvantorů ve větách XIII, XIX a XX? Lze-li, jaká je dolní hranice pro tento počet? — Není známo, zůstane-li věta XII správná, když v prefixu vypustíme první $\exists$-kvantor. — Rovněž není známo, je-li rozhodnutelná třída uzavřených výrazů s prefixem tvaru $\forall\exists\forall^n$ (příp. její podtřída s prefixy tvaru $\forall\exists\forall$), jejichž jádro obsahuje libovolné predikátové proměnné (příp. jádro obsahuje jedinou dvoumístnou predikátovou proměnnou). — Lze udat nějaký efektivní postup (především v problému rozhodnutelnosti), který by nebyl obecně rekursivním? — Existuje taková třída výrazů, která není obecně rekursivním redukčním typem ani není rekursivně rozhodnutelná?

V dodatku jsou připojeny doplňky (často jenom jedno- nebo dvoustránkové!) potřebné k úplnosti některých důkazů z vlastního textu knihy (zde je také uveden důkaz Skolem-Herbrandovy věty).

Metodice výkladu a systematice výsledků věnoval autor velikou péči. Všechny kapitoly i důkazy a předběžné formulace vět začínají intuitivním výkladem exaktních úvah, které následují. Některé důkazy jsou dostatečně přesvědčivě předvedeny jenom na příkladech. Celá kniha je napsána jasným slohem a zpracována velmi podrobně. Autor se důsledně drží sémantického pojetí a ve většině důkazů užívá teoreticko množinových metod (s hlediska naivní teorie množin), jen málo užívá novějších prostředků aritmetických a vůbec (až na jedinou výjimku) neužívá metod syntaktických. V aritmetických metodách stojí autor rovněž na naivním stanovisku. Po této stránce není v knize využito všech nových výsledků dosažených v základech matematiky. Na druhé straně je zde uloženo mnoho důmyslných konstrukcí a obratů, které se mohou ukázat užitečnými při rozvíjení i jiných otázek a metod, hlavně matematické logiky a základů matematiky. V každém případě touto knihou se spíše jistá, i když významná, starší problematika matematické logiky uzavírá, než nějaká nová otevírá (srv. výše uvedené neřešené otázky). Poslední výsledky o ekvivaletnosti tak odlišných přístupů ke konstruktivním či efektivním metodám, jako měli A. M. TURING, E. L. POST, S. C. KLEENE nebo A. A. MARKOV, svědčí proti pochybnostem o dosahu Churchovy věty vyslovených autorem (příp. Kalmárem) právě v posledních dvou neřešených otázkách. Zde se klade proti exaktnímu pojmu rekursivního postupu jenom intuitivní pojem efektivního postupu.

Ke knize je připojen seznam literatury a jmenný rejstřík (věcný rejstřík chybí), v němž jsou poněkud neobvyklé odkazy u čtyř autorů právě jenom na stránku jmenného rejstříku, ačkoliv např. B. A. TRACHTENBROT se v témže roce jako Kalmár zabýval otázkami z věty XXI.

Surányiho kniha chtěla být a skutečně je doplněním knihy Ackermannovy v tom smyslu, že obě knihy dohromady dávají úplný přehled o výsledcích týkajících se problému rozhodnutelnosti.

Tiskové chyby: Má být na str. $5^7$ Monographie [2]; $26_8$ angeben; $29^2 = \forall x(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$; $29^{16}$ schon; $54^{10}$ hier; $61_6$ $(\mathbf{M}[F_{\lambda i_1 \dots i_n})$; $67^9$ $\varphi(x, y)$; $87_{19}$ höchstens; $88_1 = \uparrow$; $89_{12}$ $\varrho_1(n) < n$; $155^{13}$ und $y = f_\nu(x_1, x_2, x_3)$; $168^6$ von $v_\varkappa$ verschiedene Zahlenvairable $v_\lambda$.

*Karel Čulík*, Praha

*Ján Štalmašek*: GEOMETRICKÉ KONŠTRUKCIE. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1959, vyd. 1., výt. 2200, str. 140, obr. 104, cena Kčs 5,60 brož.

V první části své knihy se autor zabývá různými metodami geometrických konstrukcí a to zejména euklidovskými konstrukcemi. Při řešení každé úlohy důsledně dodržuje klasický postup rozboru, sestrojení, důkazu a diskuse o počtu řešení a řešitelnosti úlohy z daných podmínek. Úvodem jsou vysvětleny konstrukce algebraických výrazů a vlastnosti některých množin bodů (kružnice, kuželosečky). Toho je pak použito v metodě, která řeší úlohy právě pomocí množin (geometrických míst) bodů. Další velmi výhodná metoda je tzv. metoda algebraicko-geometrická, při níž jsou nejdříve vztahy vyjádřeny početně algebraickými výrazy, které se pak sestrojují. V metodě využívající shodného zobrazení (posunutí, osové souměrnosti nebo otáčení) příp. podobnosti jsou nahrazeny některé dané body svými obrazy, čímž se zjednoduší závislosti i řešení dané úlohy. Po výkladu o inversi (s kladnou mocností) je výsledků využito k řešení některých Apolloniových úloh.

V každé metodě jsou prováděna (do všech důsledků) řešení mnoha úloh, přičemž některé jsou řešeny více metodami, aby bylo možno porovnat různé způsoby řešení. Ke každé z metod je připojena k samostatnému procvičení řada příkladů (celkem 51), které vyžadují pouze znalostí vyložených v textu; obtížnost příkladů však stále stoupá.

V druhé části se autor věnuje teorii geometrických konstrukcí. Přitom nejdříve probírá konstrukce prvního a druhého stupně, které řeší různými rýsovacími pomůckami. Výklad začíná konstrukcemi, při nichž se pracuje jediným pravítkem na omezené příp. neomezené nákresně. Sem je také vsunut odstavec o číselných tělesech (potřebný později) a poučka o tom, kdy je úloha řešitelná euklidovsky s poznámkou o euklidovských konstrukcích v rovině komplexních čísel. Dále je zodpovězena otázka euklidovské konstrukce kořenu rovnice třetího stupně a jednoduše ukázána neřešitelnost (euklidovská) delské úlohy o zdvojení krychle a úlohy o trisekci úhlu. Po konstrukcích některých pravidelných mnohoúhelníků následují konstrukce Ponceletovy-Steinerovy (pouhým pravítkem při pevně narýsované kružnici) a Mohrovy-Mascheroniovy (pouhým kružítkem), potom konstrukce rovnoběžkovým pravítkem, úhlovým pravítkem a tzv. jednotkovým pravítkem. Při všech druzích uvedených konstrukcí je vyloženo, jaké konstrukce je možno provádět a dále, že všechny euklidovské konstrukce lze uskutečnit také popsanými konstrukcemi.

Pak autor přistupuje ke konstrukcím třetího a čtvrtého stupně, které vyžadují vedle racionálních operací a řešení kvadratické rovnice ještě řešení ireducibilní kubické příp. bikvadratické rovnice. Při těchto konstrukcích se užívá např. zasunovacího pravítka, kterým lze provést každou takovou konstrukci (používá se v podstatě buď pravoúhlé nebo kosoúhlé konchoidy přímky). Při jiných řešeních se používá buď dvou pravoúhlých pravítek nebo narýsované kuželosečky příp. křivky třetího stupně (kubické paraboly nebo Diokleovy kisoidy). Závěrem jsou uvedeny dvě přibližné konstrukce zdvojení krychle.

Kniha je určena studentům vysokých škol zabývajícím se elementární geometrií; je však zřejmo, že je vhodná i pro učitele matematiky na všeobecně vzdělávacích a odborných školách. Vzhledem ke svému obsahu je potřebná i pro technickou praxi, když je vyžadováno geometrické řešení dané úlohy jako nejrychleji a nejsnadněji proveditelné. Předností knihy je také to, že předpokládá pouze základní znalosti z algebry a geometrie příp. to nejjednodušší z analytické geometrie, které je použito více v první než ve druhé části knihy.

*Karel Drábek*, Praha

*И. Г. Малкин:* НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ. Гос. изд. техн.-теор. литературы, Москва 1956, Str. 488, cena 16 rublů.

Cílem této knihy je vyložení jedné z nejdůležitějších (a dosud nejefektivnějších) metod teorie nelineárních kmitů — Poincarého metody malého parametru. Je ovšem třeba říci, že od dob Poincarého byla jeho metoda podstatně rozvinuta a že na tomto rozvoji má sovětská škola s I. G. MALKINEM v čele nemalý podíl.

Jelikož v mechanických soustavách resp. elektrických obvodech lze realisovat prakticky pouze ty kmity, které jsou stabilní nebo dokonce asymptoticky stabilní, spojuje autor důsledně vyšetření existence kmitů určitého charakteru dané soustavy s vyšetřením stability těchto kmitů. (Nebudeme to proto v dalším při výkladu obsahu knihy už ani speciálně uvádět.)

Přistupme nyní k popisu obsahu knihy. Kapitola prvá má úvodní charakter a je v ní obšírně probírán případ, kdy fysikální soustava je popsána diferenciální rovnicí

$$\ddot{x} + k^2x + f(t) = \mu g(t, x, \dot{x}, \mu) .$$

Jelikož výsledky této kapitoly jsou vesměs obsaženy mezi výsledky následujících kapitol, nebudeme se u nich zdržovat (také autor řadu tvrzení uvádí bez důkazu s odvoláním na výsledky dalších kapitol).

Kapitola druhá je věnována vyšetření existence $\omega$-periodického řešení obecné *kvasilineární* soustavy, tj. soustavy typu

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}x_k + f_s(t) + \mu g_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) , \quad s = 1, 2, \ldots, n , \tag{1}$$

kde $a_{sk}$ jsou konstanty, $f_s(t)$ a $g_s(t, \boldsymbol{x}, \mu)$ jsou v $t$ spojité a $\omega$-periodické a $g_s$ jsou v $\boldsymbol{x}$ třídy $C^1$ a v $\mu$ třídy $C^0$ pro $\boldsymbol{x} \in G$ a $\mu \in \langle 0, \mu_0 \rangle$. Přitom se v duchu metody malého parametru omezujeme pouze na hledání těch periodických řešení soustavy (1), které pro $\mu \to 0$ přejdou v nějaké periodické řešení soustavy

$$\dot{y}_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}y_k + f_s(t) , \tag{2}$$

kterou nazýváme *zkrácenou* nebo *vytvořující* soustavou. Při vyšetřování musíme rozlišovat několik eventualit. Za prvé musíme rozlišovat, zda soustava je *autonomní* (tj. když její pravé strany neobsahují explicitně čas $t$) či *neautonomní* (v opačném případě). V posledním případě pak je ještě třeba rozlišovat, zda soustava je *neresonanční* (charakteristická rovnice $|\boldsymbol{A} - \varrho \boldsymbol{E}| = 0$, kde $\boldsymbol{A} = (a_{sk})$ a $\boldsymbol{E}$ je $n$-dimensionální jednotková matice, nemá kořeny typu $\pm\, p(2\pi/\omega)\, i$, kde $p$ je celé číslo včetně nuly) nebo zda je *v resonanci* (charakteristická rovnice má kořeny uvedeného typu).

Případ neautonomní neresonanční soustavy je jednoduchý. Pak soustava (2) má vždy právě jedno $\omega$-periodické řešení a dá se snadno ukázat, že také soustava (1) pro dostatečně malá $\mu$ má vždy právě jedno $\omega$-periodické řešení, které pro $\mu \to 0$ konverguje k uvedenému $\omega$-periodickému řešení soustavy (2).

Případ neautonomní soustavy v resonanci je podstatně složitější. Jestliže charakteristická rovnice má celkem $k$ kořenů $\varrho_j$ typu $p(2\pi/\omega)\,i$ ($p$ celé včetně 0), pak soustava

$$\dot{z}_s = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} z_j \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

má $m$ $\omega$-periodických řešení, přičemž $1 \leqq m \leqq k$ (počet periodických řešení, jak víme, závisí na soustavě elementárních dělitelů $(\varrho - \varrho_j)^\alpha$ matice $\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E}$). Je známo, že potom také soustava *adjungovaná* k soustavě (3), tj. soustava

$$\dot{w}_s + \sum_{j=1}^{n} a_{js} w_j = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

má potom také právě $m$ lineárně nezávislých $\omega$-periodických řešení $\psi_{sj}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) a že podmínky nutné a postačující k tomu, aby také soustava (2) měla $\omega$-periodické řešení, jsou dány rovnicemi

$$\int_0^\omega \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(s)\, \psi_{\alpha j}(s)\, \mathrm{d}s = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{5}$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, pak soustava (2) má $\omega$-periodické řešení $\mathbf{x}_0(t)$ typu

$$\mathbf{x}_0(t; M_1, \ldots, M_m) = \sum_{j=1}^{m} M_j \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \tilde{\mathbf{x}}_0(t)\,, \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ tvoří soustavu $m$ lineárně nezávislých $\omega$-periodických řešení soustavy (3), $M_j$ jsou libovolné reálné konstanty a $\tilde{\mathbf{x}}_0(t)$ je nějaké partikulární řešení soustavy (2). Autor nyní dokazuje tuto větu:

*K tomu, aby soustava* (1) *za uvedených předpokladů měla $\omega$-periodické řešení, je nutné, aby soustava $m$ rovnic*

$$P_j(M_1, \ldots, M_m) \equiv \int_0^\omega \sum_{\alpha=1}^{n} g_\alpha(s, \mathbf{x}_0(s; M_1, \ldots, M_m), 0)\, \psi_{\alpha j}(s)\, \mathrm{d}s = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

*měla reálné řešení $M_j = M_j^*$. Jestliže jakobián $\partial \mathbf{P}/\partial \mathbf{M}$ v bodě $M_j = M_j^*$ je od nuly různý, pak pro dostatečně malá $\mu > 0$ skutečně existuje $\omega$-periodické řešení soustavy* (1) *a pro $\mu \to 0$ konverguje k $\omega$-periodickému řešení*

$$\mathbf{x}_0^*(t) = \sum_{j=1}^{m} M_j^* \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \tilde{\mathbf{x}}_0(t)$$

*soustavy* (2).

Za shora uvedených předpokladů o diferencovatelnosti funkcí $g_s$ dokazuje autor tuto základní větu metodou postupných aproximací. Za předpokladu, že funkce $g_s(t, \mathbf{x}, \mu)$ jsou analytické v $\mathbf{x}$ a $\mu$, dokazuje touž větu pomocí věty o implicitních funkcích.

V případě autonomní soustavy předpokládejme, že charakteristická rovnice má alespoň jednu dvojici ryze imaginárních kořenů $\pm \lambda i$ ($\lambda$ libovolné reálné číslo), takže soustava (3) má aspoň dvě lineárně nezávislá periodická řešení s periodou $2\pi/\lambda$. Budiž jich obecně opět $m$. Má-li autonomní soustava

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k + \mu g_s(x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1'}$$

řešení $\mathbf{x}^*(t)$, pak $\mathbf{x}^*(t + h)$, kde $h$ je libovolná konstanta, je také řešením. Proto za jednu z počátečních hodnot hledaného periodického řešení lze zvolit kteroukoliv z hodnot, kterou příslušná proměnná nabývá během jedné periody. (Tím volíme jen počátek odečítání času.) To je však ekvivalentní s tím, že volíme vhodně hodnotu jedné z konstant $M_j$ v (6) (nyní je ovšem $\tilde{\mathbf{x}}_0(t) \equiv 0$).

Předpokládejme, že jsme takovým vhodným způsobem pevně zvolili hodnotu konstanty $M_m^*$. Snadno se můžeme přesvědčit, že perioda $T$ periodického řešení soustavy (1'), blízkého k nějakému $2\pi/\lambda$-periodickému řešení není obecně rovna $2\pi/\lambda$, nýbrž, že se k tomuto číslu pro $\mu \to 0$ pouze blíží a že ji lze obecně psát ve tvaru

$$T = 2\pi/\lambda + \mu\alpha(\mu)\,, \quad \alpha(\mu) \text{ spojitá v bodě } \mu = 0.$$

Autor nyní dokazuje následující větu:

*K tomu, aby soustava (1') měla za uvedených předpokladů periodické řešení s periodou $T$, takovou, že $T \to 2\pi/\lambda = T_0$ pro $\mu \to 0$, je nutné, aby soustava rovnic*

$$(7)\quad P_j \equiv \alpha_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{x}_{0\alpha}(0)\psi_{\alpha j}(0) + \int_0^{T_0} \sum_{\alpha=1}^{n} g_\alpha(x_0(s, M_1, \ldots, M_{m-1}), 0)\, \psi_{\alpha j}(s)\, ds = 0\,, \quad (j = 1, \ldots, m)$$

*měla reálné řešení $\alpha_0 = \alpha_0^*$, $M_j = M_j^*$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. Jestliže jakobián této soustavy vzhledem k $\alpha_0, M_1, \ldots, M_{m-1}$ je v bodě $\alpha_0 = \alpha_0^*$, $M_j = M_j^*$ od nuly různý, pak pro dostatečně malá $\mu$ $T$-periodické řešení soustavy (1') vskutku existuje a blíží se $T_0$-periodickému řešení $\mathbf{x}_0^*(t) = \sum_{j=1}^{m} M_j^* \boldsymbol{\varphi}_j(t)$ soustavy (3).*

V kapitole třetí autor souhrnně uvádí věty z teorie stability, které mají význam pro vyšetřování stability periodických a skoroperiodických řešení soustavy (1) resp. (1'). Připomeňme, že řešení $\mathbf{x}(t)$ soustavy (1) resp. (1'), nazýváme *stabilní*, jestliže existuje takové okolí jeho počátečních hodnot, že všechna řešení vycházející z tohoto okolí zůstanou pro $t > 0$ v jeho předem libovolně malém předepsaném okolí. Řešení soustavy (1) je *asymptoticky stabilní*, je-li stabilní a jestliže k němu všechna řešení z jistého okolí počátečních hodnot pro $t \to \infty$ konvergují. (Řešení soustavy (1') nemohou být asymptoticky stabilní. Říkáme, že tato jsou *orbitálně* asymptoticky stabilní, jestliže všechna řešení z uvedeného okolí k nim konvergují pro $t \to \infty$ po vhodně zvoleném posunutí počátku řešení. Malkin však tohoto pojmu nepoužívá.)

Aniž bychom zacházeli do podrobností uveďme pouze, že vyšetření stability periodického řešení se zpravidla redukuje na vyšetření charakteristických exponentů lineární soustavy s periodickými koeficienty

$$\dot{u}_s = \sum_{k=1}^{n} (p_{sk}(t) + \mu q_{sk}(t))\, u_k\,,$$

kterou dostaneme jako soustavu rovnic ve variacích soustavy (1) resp. nějaké jiné obecnější soustavy vzhledem k vyšetřovanému periodickému řešení.

V kapitole čtvrté se autor opět zabývá soustavami typu (1) a to za předpokladu, že funkce $f_s$ a $g_s$ lze psát ve tvaru

$$f_s(t) = \sum_{j=1}^{N} (f_{sj}^{(1)} \cos \nu_j t + f_{sj}^{(2)} \sin \nu_j t)\,, \quad g_s(t, \mathbf{x}, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i g_{is}(t, \mathbf{x})\,,$$

kde

$$g_{is}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} (g_{isj}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \nu_j t + g_{isj}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \nu_j t)\,,$$

přičemž $\nu_j$ jsou libovolná reálná čísla a funkce $g_{isj}^{(1)}$ a $g_{isj}^{(2)}$ jsou polynomy v proměnných $x_1, \ldots, x_n$. (Funkce $f_s$ a $g_s$ jsou tedy v proměnné $t$ skoroperiodickými funkcemi speciálního typu.)

Jestliže charakteristická rovnice $|\mathbf{A} - \varrho \mathbf{E}| = 0$ nemá kořeny s nulovou reálnou částí, pak snadno dokážeme, že soustava (1) má pro malá $\mu$ právě jedno skoroperiodické řešení (ovšem obecnějšího typu než jsou skoroperiodické funkce shora uvedené).

Nechť dále uvedená charakteristická rovnice má nějaké kořeny s nulovou reálnou částí, takže existuje $m$, $1 \leqq m \leqq n$, lineárně nezávislých skoroperiodických řešení $\varphi_{sj}(t)$ soustavy (3) a také soustava (4) má $m$ lineárně nezávislých skoroperiodických řešení. K tomu, aby také soustava (2) měla skoroperiodické řešení, je nutné a stačí, aby

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(s)\, \psi_{\alpha j}(s)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) .$$

Soustava (2) pak má skoroperiodické řešení tvaru

$$x_s(t, \boldsymbol{M}) = \sum_{j=1}^{m} M_j \varphi_{sj}(t) + \tilde{x}_s(t) ,$$

kde $M_j$ jsou libovolné konstanty a $\tilde{x}_s(t)$ je partikulární skoroperiodické řešení soustavy (2). Autor dokazuje větu:

*K tomu, aby soustava* (1) *za uvedených předpokladů měla pro dostatečně malá $\mu$ skoroperiodická řešení, stačí, aby soustava rovnic*

$$P_j(\boldsymbol{M}) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} g_\alpha(s, \boldsymbol{x}_0(s, \boldsymbol{M}), 0)\, \psi_{\alpha j}(s)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

*měla reálné řešení $M_j = M_j^*$ a aby rovnice*

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{M}} (\boldsymbol{M}^*) - \lambda \boldsymbol{E} \right| = 0 \tag{9}$$

*neměla kořeny s nulovou reálnou částí.* (Vzhledem k druhé podmínce musíme předpokládat, že funkce $\varphi_{sj}$ a $\psi_{sj}$ jsou zvoleny tak, aby $\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{\alpha j} \psi_{\alpha k} = \delta_{jk}$, což vždy jde.)

Ukazuje se však, že poslední podmínce nemůže vyhovovat žádné řešení, pro něž by všechna $M_j^*$ nebyla rovna nule, takže vlastní kmity soustavy se v prvém přiblížení vůbec neuplatňují. Je však známo, že za určitých okolností se kmity s vlastními frekvencemi uplatňují stejně silně ako kmity s frekvencemi budícími a je proto třeba formulaci problému poněkud modifikovat. JU toho se však nemůžeme zastavovat.

V prvé části kapitoly páté se studují vlastní kmity *kvasiharmonické soustavy*, tj. soustavy

$$\dot{x}_s = \lambda \sum_{k=1}^{n} (a_{sk} + \mu p_{sk}(t, \mu))\, x_k \quad (s = 1, 2, \ldots, n) , \tag{10}$$

kde $a_{sk}$ jsou konstanty a $p_{sk}(t, \mu)$ jsou v $t$ spojité, $\omega$-periodické a rozvinutelné ve Fourierovy řady a v $\mu$ analytické. Zkoumá se především otázka, pro které hodnoty parametru $\lambda$ jsou řešení soustavy (10) stabilní resp. nestabilní (tj. kdy charakteristické exponenty soustavy (10) jsou menší resp. větší než jedna). Ty intervaly parametru $\lambda$, pro něž nastává stabilita (nestabilita) nazýváme *oblastí stability* (nestability). Na tuto úlohu se dá převést otázka *parametrické resonance*, tj. pro které hodnoty periody $\omega$ (při $\lambda = 1$) jsou řešení soustavy (10) nestabilní. Jsou vyšetřeny podrobně dva speciální případy: diferenciální rovnice druhého řádu a kanonické soustavy.

V druhé části této kapitoly se zkoumají buzené kmity kvasiharmonické soustavy

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} p_{sj}(t)\, x_j + f_s(t) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) ,$$

kde $p_{sj}(t)$ jsou spojité $\omega$-periodické funkce a

$$f_s(t) = \sum_{j=1}^{N} e^{i\nu_j t} f_{sj}(t) ,$$

kde $\nu_j$ jsou libovolná reálná čísla a $f_{sj}(t)$ jsou spojité $\omega$-periodické funkce rozvinutelné v absolutně a stejnoměrně konvergentní Fourierovy řady. (Věty zde odvozené o existenci skoroperiodických řešení takových soustav jsou silnější než ty, které bychom dostali specialisací vět z kapitoly čtvrté.)

V kapitole šesté zobecňuje autor teorie periodických a skoroperiodických řešení z kapitoly druhé a čtvrté na soustavy blízké k libovolným nelineárním, tj. na soustavy typu

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + \mu g_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (s = 1, \ldots, n)\,, \tag{11}$$

kde funkce $X_s$ jsou v $x_j$ třídy $C^2$, $g_s$ v $x_j$ třídy $C^1$ a v $\mu$ třídy $C^0$.

Dále nejprve předpokládejme, že $X_s$ i $g_s$ jsou v $t$ spojité a $\omega$-periodické. Jestliže zkrácená soustava

$$\dot{y}_s = X_s(t, y_1, \ldots, y_n) \tag{12}$$

má $\omega$-periodické řešení $\varphi_s(t)$ takové, že soustava rovnic ve variacích

$$\dot{z}_s = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_s}{\partial y_k}\right) z_k\,, \quad \left(\frac{\partial X_s}{\partial y_k}\right) = \frac{\partial X_s}{\partial y_k}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,, \quad (s = 1, \ldots, n)\,, \tag{13}$$

nemá žádné $\omega$-periodické řešení (kromě triviálního), pak se snadno dokáže, že soustava (11) má jediné $\omega$-periodické řešení, které pro $\mu \to 0$ konverguje k $\varphi_s(t)$.

Jestliže soustava (12) má $m$-parametrické $\omega$-periodické řešení $\eta(t, M_1, \ldots, M_m)$ takové, že soustava rovnic ve variacích

$$\dot{z}_s = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_k}\right) z_k\,, \quad \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial X_s}{\partial x_k}(t, \eta_1(t, \boldsymbol{M}), \ldots, \eta_n(t, \boldsymbol{M}))\,, \tag{13'}$$

má právě $m$ lineárně nezávislých $\omega$-periodických řešení (to obecně nastává, neboť $(\partial\eta_s/\partial M_j)(t, \boldsymbol{M})$ tvoří soustavu $m$ $\omega$-per. řešení soustavy (13')), pak soustava nutných podmínek, jimž musí vyhovovat parametry $M_j$, je opět dána soustavou (7) s tím rozdílem, že místo $\boldsymbol{x}_0(t, \boldsymbol{M})$ je třeba položit $\eta(t, \boldsymbol{M})$ a funkce $\psi_{sj}$ tvoří nyní soustavu $m$ lineárně nezávislých $\omega$-periodických řešení soustavy adjungované k (13') (takže funkce $\psi_{sj}$ jsou nyní obecně také funkcemi parametrů $M_j$). Jestliže vskutku existuje řešení $M_j = M_j^*$ uvedené soustavy, pak k existenci $\omega$-per. řešení soustavy (11) stačí, aby uvedená soustava rovnic měla v bodě $M_j = M_j^*$ jakobián různý od nuly.

V případě autonomní soustavy ($X_s$ a $g_s$ nezávisí explicitně na čase) se na rozdíl od kvasilineárních soustav setkáváme s novou obtíží, že totiž perioda $T$ periodických řešení $\eta(t, \boldsymbol{M})$ soustavy (12) obecně závisí na parametrech $M_j$. V případě, že perioda $T$ na $M_j$ náhodou nezávisí, má soustava (13') obecně opět $m$ $T$-periodických řešení a podmínky (7') se modifikují úplně obdobně jako v neautonomním případě. Jestliže však perioda $T$ na $M_j$ závisí, pak soustava (13'), má obecně pouze $m - 1$ $T(\boldsymbol{M})$-periodických řešení. Dá se ukázat, že nutné podmínky k existenci $T(\mu)$-periodického řešení soustavy (11) ($T(\mu) \to T(M_j^*)$ pro $\mu \to 0$) pro $m - 1$ podstatných parametrů $M_1, \ldots, M_{m-1}$ pak nabývají tvaru

$$P_j \equiv \int_0^{T(\boldsymbol{M})} g_s(\eta_1(s, \boldsymbol{M}), \ldots, \eta_n(s, \boldsymbol{M}), 0)\, \psi_{sj}(s, \boldsymbol{M})\, \mathrm{d}s = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m - 1)\,, \tag{7''}$$

kde $\psi_{sj}$ tvoří soustavu $m - 1$ $T(\boldsymbol{M}_j)$-periodických řešení soustavy adjungované k (13'). (Autor mylně uvádí, že lineárně nezávislých řešení je v uvedených případech $m + 1$ a $m$.)

Obdobným způsobem se zobecňují i věty o skoroperiodických řešeních soustavy (11), v níž funkce $X_s$ jsou v $t$ periodické a funkce $g_s$ jsou skoroperiodické speciálního typu.

Praktické užití vět šesté kapitoly týkajících se periodických řešení je značně omezeno tím, že k utvoření modifikovaných podmínek (7) resp. (7') resp. (7'') je zpravidla třeba nalézt obecné řešení soustavy (12), což je úloha obvykle velmi obtížná, ne-li nemožná. Autor se snaží tento nedostatek oslabit tím, že v kapitole sedmé a osmé rozvíjí teorii Ljapunovových soustav a soustav k nim blízkých, neboť pro Ljapunovovy soustavy lze určení obecného resp. obecného periodického řešení provést alespoň s dostatečnou přesností.

Soustava diferenciálních rovnic se nazývá *Ljapunovovou*, jestliže ji lze vhodnou transformací proměnných převést na soustavu tvaru

$$(14) \qquad \dot{x} = -\lambda y + X(x, y, x_k), \quad \dot{y} = \lambda x + Y(x, y, x_k),$$
$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + X_j(x, y, x_k) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

kde $a_{jk}$ jsou konstanty a $X$, $Y$ a $X_j$ analytické funkce svých proměnných začínající členy alespoň druhého stupně, přičemž jsou splněny tyto podmínky: 1. Charakteristická rovnice $|\mathbf{A} - \varrho \mathbf{E}| = 0$ nemá kořeny typu $p\lambda i$ ($p$ celé číslo včetně nuly); 2. existuje prvý integrál soustavy (14) tvaru

$$H \equiv x^2 + y^2 + W(x_1, \ldots, x_n) + S(x, y, x_1, \ldots, x_n) = \text{const},$$

kde $W$ je forma 2. stupně a $S$ je analytická funkce začínající členy alespoň 3. stupně. Autor zobecňuje známý Ljapunovův výsledek a dokazuje, že za uvedených předpokladů má soustava (14) v dostatečně malém okolí počátku dvouparametrickou soustavu periodických řešení. Užitím tohoto výsledku se zkoumají podmínky existence $\omega$-periodických řešení soustavy

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n+2} c_{sk} x_k + X_s(x_1, \ldots, x_{n+2}) + \mu f_s(t, x_1, \ldots, x_{n+2}, \mu) \quad (s = 1, 2, \ldots, n + 2),$$

kde zkrácená soustava (pro $\mu = 0$) je Ljapunovova a funkce $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ je v $t$ spojitá $\omega$-periodická a v $\mathbf{x}$ a $\mu$ je analytická. Na příkladě se zkoumá také existence řešení s periodou $n\omega$ ($n$ celé) — tzv. *subharmonických* kmitů.

Recensovaná kniha je bezesporu nejvýznamnější monografií věnovanou ve světové literatuře teorii nelineárních kmitů. Je tomu tak přesto, že se autor úmyslně omezil téměř výlučně na metodu malého parametru ponechávaje stranou jak topologické metody tak i některé klasičtější (jako např. Krylov-Bogoljubovu metodu asymptotických řad). V Malkinově monografii byly buď vůbec poprvé nebo alespoň poprvé v takové rozsáhlosti v knižní formě zpracovány tak důležité partie teorie nelineárních kmitů, jako jsou skoroperiodická řešení a periodická řešení soustav blízkých k Ljapunovovým nebo obecným nelineárním soustavám.

Kniha není ovšem prosta některých nedostatků. Řada nepřesných (ba někdy i nesprávných) formulací a mnoho tiskových chyb znesnadní zvláště začátečníkovi čtení knihy. Zvláště některé partie kapitoly čtvrté a šesté jsou psány dosti nejasně. (To je tím nepříjemnější, že čtenář právě tyto kapitoly nemá možnost porovnat s jinými prameny.) Jistým metodickým nedostatkem je snad i to, že autor zásadně neužívá vektorové formy zápisu, což s sebou nese dvě nevýhody: a) čtenář si na tuto formu nezvyká, ačkoliv se jí nyní ve světové literatuře zhusta užívá a b) některé autorovy formulace vět a jejich důkazy vyjdou velmi těžkopádně.

Nicméně recenzovaná kniha vzhledem k rozsahu zpracovaného materiálu a množství ilustrujících příkladů je neobyčejně cennou knihou jak pro teoretického pracovníka tak pro praktika, který především hledá návody ke konkrétnímu výpočtu.

*Otto Vejvoda*, Praha