Časopis pro pěstování matematiky

František Šik
O aditivních a isotonních funkcionálech na uspořádaných grupách

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 238--240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108199

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O ADITIVNÍCH A ISOTONNÍCH FUNKCIONÁLECH NA USPOŘÁDANÝCH GRUPÁCH

(Výtah z referátu předneseného F. Šikem v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 31. 10. 1960 v Brně)

Obsahem referátu je řešení dvou problémů: 1. Vyšetření (částečně) uspořádaných abelovských grup, na nichž existuje nenulový aditivní a isotonní funkcionál. 2. Je-li H podgrupa uspořádané abelovské grupy (G, H), f aditivní a isotonní funkcionál na H, $f \not\equiv 0$, jest nalézti podmínky, za kterých existuje aditivní a isotonní funkcionál F na (G, R) takový, že parciální funkce F_H na H je totožná s f. Řešení problému 2 má za jednoduchý důsledek řešení problému 1.

1. Symbolem (G, R) označujme (aditivně psanou) abelovskou *uspořádanou grupu*, tj. abelovskou grupu G, v níž je definována podpologrupa R, neobsahující nulu (připouštíme také $R = \emptyset$). Množinu R nazýváme *uspořádáním* grupy G. Uspořádání R se nazývá *lineární*, jestliže platí $G = R \cup - R \cup 0$, a *kvasilineární*, když pro množinu G_∞ všech prvků nekonečného řádu v G platí $G_\infty = R \cup - R$. Poznamenejme, že pro každé uspořádání R grupy G platí $R \cup - R \subset G_\infty$. Množina $\mathfrak{P}$ všech uspořádání grupy G, uspořádaná pomocí množinové inkluse, obsahuje maximální prvky, které budeme nazývat *maximálními uspořádáními*. Jestliže pro prvky M, $R \in \mathfrak{P}$ platí $M \supset R$, nazveme M *rozšířením* uspořádání R a je-li M nadto maximální prvek v $\mathfrak{P}$, *maximálním rozšířením* uspořádání R. Analogicky se definuje *linární* a *kvasilineární rozšíření*.

K tomu, aby faktorgrupa grupy (G, R) mod H (H-podgrupa v G), $(G, R)/H$, byla uspořádánou grupou, je — jak známo — nutné a stačí, aby podgrupa H byla konvexní. Uspořádáním grupy G/H je pak množina $(H + R)/H$.

Platí věta

1.1. *Rozšíření L uspořádání grupy G je maximální, když a jen když je kvasilineární.*

2. Pod *aditivním a isotonním funkcionálem* (stručně: pod *ai-funkcionálem*) na (G, R) rozumíme reálnou funkci f definovanou na G, pro niž platí: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ pro každé $a, b \in G$; $f(a) \geqq 0$ pro $a \in R$. Funkce f je tedy homomorfním zobrazením uspořádané grupy (G, R) do lineární uspořádané aditivní grupy reálných čísel. Množinu všech *ai*-funkcionálů na (G, R) značíme $\widehat{(G, R)}$.

2.1. $f \in \widehat{(G, R)} \Rightarrow$ *existuje kvasilineární rozšíření L uspořádání R takové, že* $f \in \widehat{(G, L)}$.

Definujeme-li obvyklým způsobem pojem archimedovského prvku (prvek $a \in (G, R)$ je *archimedovský*, jestliže ke každému $b \in G$ existuje celé číslo n tak, že $(b - na)$ non $\in R$) a pojem archimedovsky uspořádané grupy ((G, R) je *archimedovsky uspořádaná grupa*, jestliže každý prvek z G_∞ je archimedovský), pak tyto pojmy jsou v úzké souvislosti s pojmem *ai*-funkcionálu na (G, R).

2.2. *Na archimedovsky lineárně uspořádané grupě (G, L) existuje přesně jeden ai-funkcionál, který v daném prvku z L nabývá dané nezáporné hodnoty.*

Ježto pak každý *ai*-funkcionál se anuluje v každém prvku, který není archimedovský a protože množina T všech takových prvků je konvexní podgrupa, lze použít věty 2.2 na archimedovsky lineárně uspořádanou faktorgrupu G/T a vyslovit tvrzení analogické k 2.2 pro kvasilineárně uspořádané grupy.

3. Je-li nyní H podgrupa uspořádané grupy (G, R) a f *ai*-funkcionál na uspořádané grupě $(H, H \cap R)$, definujeme:

Uspořádaná grupa (G, R) je (*slabě*) *konfinální* s H, když k libovolnému prvku $x \in G$ $(x \in G_\infty)$ existuje prvek $a \in H$ (existuje prvek $a \in H$ a přirozené číslo n) tak, že $a - x \in R$ $(a - nx \in R)$.

Prodloužením ai-funkcionálu f (z H na G) rozumíme *ai*-funkcionál F na (G, R), jehož parciální funkce F_H na H je totožná s f.

Řešení problému 2 je obsaženo ve větě 3.1.

3.1. *Nechť f je ai-funkcionál na H, $f \not\equiv 0$.*

a) *Existuje-li takové rozšíření S uspořádání R grupy G, že (G, S) je slabě konfinální s H, $f \in \widehat{(H, H \cap S)}$, pak existuje prodloučení F funkcionálu f na (G, R) (dokonce lze najít takové kvasilineární rozšíření L uspořádání S, že platí $F \in \widehat{(G, L)}$).*

b) *Existuje-li prodloužení F funkcionálu f na (G, R), pak existuje takové kvasilineární rozšíření L uspořádání R grupy G, že (G, L) je konfinální s H a $F \in \widehat{(G, L)}$.*

Vzhledem k zřejmému faktu, že konfinalita implikuje slabou konfinalitu, podává předešlá věta nutnou a dostačující podmínku pro existenci prodloužení nenulového *ai*-funkcionálu f.

4. Řešení problému 1 lze formulovat takto:

4.1. a) *Je-li $F \in \widehat{(G, R)}$, $F(a) \neq 0$, pak existuje takové kvasilineární rozšíření L uspořádání R, že $F \in \widehat{(G, L)}$ a ke každému prvku $x \in G$ existuje celé číslo m tak, že $ma - x \in L$.*

b) *Existuje-li takové rozšíření S uspořádání R grupy G a prvek $a \in G$ tak, že ke každému prvku $x \in G_\infty$ existuje celé číslo m a přirozené číslo p s vlastností $ma - px \in S$, pak existuje $F \in \widehat{(G, R)}$, $F \not\equiv 0$ (dokonce je $F \in \widehat{(G, L)}$, kde L je libovolné kvasilineární rozšíření uspořádání S).*

K důkazu části a) stačí aplikovat větu 3.1b) na cyklickou podgrupu $H = (a)$, kde $F(a) \neq 0$ a na *ai*-funkcionál $F_H = f$. K důkazu části b) stačí podle věty 1.1 zkonstruovat libovolné kvasilineární rozšíření L uspořádání S a na cyklické podgrupě $H = (a)$ definovat funkci f: $f(na) = n$, pokud je $a \in L$, $f(na) = -n$, pokud je $a \in -L$. Pak f je nenulový *ai*-funkcionál na H a (G, L) je slabě konfinální s H, takže lze použít věty 3.1a). Ve větě 4.1 jsou zřejmě obsaženy nutné a dostatečné podmínky pro existenci nenulového *ai*-funkcionálu na (G, R).

Rozumíme-li pod *neuspořádanou podgrupou* v (G, R) takovou podgrupu $H \subset G$, že $H \cap R = \emptyset$ a pod P periodickou část grupy G, pak lze v jednom speciálním případě vyslovit důsledek věty 4.1.

4.2. *Nechť (G, R) je uspořádaná grupa, jejíž všechny neuspořádané podgrupy jsou obsaženy v P.*

a) *Když existuje prvek $a \in G$ takový, že ke každému $x \in G_\infty$ existuje celé číslo m a přirozená čísla p, n s vlastností $p(ma - nx) \in R$, pak existuje nenulový ai-funkcionál na (G, R).*

b) *Existuje-li na (G, R) nenulový ai-funkcionál, pak existuje prvek $a \in G_\infty$ takový, že k libovolnému prvku $x \in G$ existuje celé číslo m a přirozené číslo p s vlastností $p(ma - x) \in R$.*

František Šik, Brno

FRENETOVY FORMULE PRO SVĚTOČÁRU V MINKOWSKÉHO MECHANICE

(Referát o přednášce FRANTIŠKA NOŽIČKY konané dne 3. října 1960 ve schůzi pořádané JČMF v Praze)

Hlavním výsledkem, o němž bylo v přednášce poreferováno, je odvození určitých rovnic pro světočáru v Minkowského čtyřrozměrném prostoru, které mají svou obdobu ve známých Frenetových formulích pro křivku ve čtyřrozměrném Riemannově prostoru.

Nechť

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \langle \underset{0}{t}, \underset{1}{t} \rangle$$

jsou pohybové rovnice hmotné partikule o klidové hmotě μ v daném Lorentzově systému $L(x, y, z, t)$ a nechť

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad t = t(\tau)$$

nebo stručněji

(1) $$x^\alpha = x^\alpha(\tau), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

je popis příslušné světočáry v Minkowského čtyřrozměrném prostoru s indefinitním metrickým tensorem $g_{\alpha\beta}$, kde

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{44} = -c^2, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta .$$

Parametr τ je tak zvaný „vlastní čas“ hmotné partikule,

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \quad \left(v^2 \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right).$$

Za předpokladu dostatečné hladkosti funkcí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ v uvažovaném intervalu platí pak v bodech světočáry (1) relace