Časopis pro pěstování matematiky

Ludvík Janoš

Souvislost spekter dvou krajových problémů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 235--237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108198

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

REFERÁTY

SOUVISLOST SPEKTER DVOU KRAJOVÝCH PROBLÉMŮ

(Vlastní referát o přednášce konané v matematické obci L. JANOŠEM 24. října 1960 v Praze)

Budiž dán krajový problém

$$\alpha z''(x) + y(x)\, m(x) = 0\,, \quad \alpha y''(x) + z(x)\, p(x) = 0\,,$$
$$x \in \langle 0, 1\rangle\,, \quad m(x)\,, \quad p(x) \in C^+_{\langle 0,1\rangle}\,,$$

při čemž $C^+_{\langle 0,1\rangle}$ značí množinu všech spojitých kladných funkcí na $\langle 0, 1\rangle$. Soustavu vlastních čísel α_i uspořádejme podle velikosti: $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_i > \ldots$ Tím jsme pro každé přirozené i definovali funkcionál $\alpha_i(m, p)$, $m, p \in C^+_{\langle 0,1\rangle}$. Zavedeme asociovaná vlastní čísla $\vartheta_n(m, p)$ vztahem

$$\vartheta_n(m, p) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i(m, p)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pro funkcionály $\vartheta_n(m, p)$ jsou odvozeny nerovnosti

$$\vartheta_n(\sqrt{mp}, \sqrt{mp}) \leqq \vartheta_n(m, p) \leqq \sqrt{\vartheta_n(m, m)\, \vartheta_n(p, p)}$$

pro $m, p \in C^+_{\langle 0,1\rangle}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Budiž $\Gamma(x, t)$ souměrné spojité jádro definované na $\bar{\Omega}$ integrální rovnicí

$$\int_\Omega \Gamma(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \lambda y(x)$$
$$[\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_1 \,.\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n \text{ je element objemu } \Omega]\,,$$

kde Ω značí nějakou oblast v E_n a $m(t) \in C^+_\Omega$, kde C^+_Ω značí množinu všech kladných spojitých funkcí na $\bar{\Omega}$. Množinu všech spojitých funkcí na Ω označíme C_Ω.

Jádro $\Gamma(x, t)$ je positivně definitní, jestliže platí

$$\int_\Omega \int_\Omega \Gamma(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t > 0 \quad \text{pro} \quad 0 \neq \varphi \in C_\Omega\,.$$

Jádro $\Gamma(x, t)$ má vlastnost A, jestliže platí

$$1.\ \Gamma(x, x) > 0 \ \ x \in \Omega, \quad 2.\ \Gamma(x, t) \geqq 0 \ \ x, t \in \bar{\Omega}.$$

Jestliže jádro $\Gamma(x, t)$ je buď positivně definitní nebo má vlastnost A, platí pro jeho maximální vlastní číslo λ extremální princip

$$\lambda(m) = \sup \frac{\int_\Omega \int_\Omega \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, m(x)\, m(t)\, dx\, dt}{\int_\Omega y^2(x)\, m(x)\, dx}.$$

Číslo $\lambda(m)$ takto definované je vždy kladné: $\lambda(m) > 0$, $m \in C_\Omega^+$.

1. Budiž nyní jádro $\Gamma(x, t)$ positivně definitní:

Pak pro funkcionál $\lambda(m)$ platí „vztah aritmetického a harmonického průměru", což značí:

Budiž $m_1(x)$, $m_2(x) \in C_\Omega^+$ a $m_a(x)$, $m_h(x)$ aritmetický a harmonický průměr:

$$m_a(x) = \tfrac{1}{2}[m_1(x) + m_2(x)], \quad m_h(x) = \frac{2m_1(x)\, m_2(x)}{m_1(x) + m_2(x)};$$

pak platí

$$\lambda(m_a) \leqq \tfrac{1}{2}[\lambda(m_1) + \lambda(m_2)], \quad \lambda(m_h) \leqq \frac{2\lambda(m_1)\, \lambda(m_2)}{\lambda(m_1) + \lambda(m_2)}.$$

2. Nechť jádro $\Gamma(x, t)$ má vlastnost A; pak platí analogická nerovnost pro geometrický průměr

$$\lambda(m_g) \leqq \sqrt{\lambda(m_1)\, \lambda(m_2)}, \quad m_g(x) = \sqrt{m_1(x)\, m_2(x)}.$$

Mnohá integrální jádra $\Gamma(x, t)$ známá z fysiky jsou současně positivně definitní a mají vlastnost A (např. příčinkové funkce struny, nosníku, membrány, desky atd.). Pro taková jádra platí tedy současně všechny tři nerovnosti.

Budiž nyní $K(x, t)$ spojité souměrné jádro definované na Ω a mějž vlastnost A. Budiž $m(x)$, $p(x) \in C_\Omega^+$; pak pro maximální vlastní číslo $\alpha(m, p)$ soustavy

$$\int_\Omega K(x, t)\, y(t)\, m(t)\, dt = \alpha z(x), \quad \int_\Omega K(x, t)\, z(t)\, p(t)\, dt = \alpha y(x)$$

platí extremální princip

$$\alpha(m, p) = \sup_{0 \neq y, z \in C_\Omega} \left[\int_\Omega \int_\Omega K(x, t)\, y(x)\, z(t)\, m(x)\, p(t)\, dx\, dt \right] .$$

$$. \left[\int_\Omega y^2(x)\, m(x)\, dx \int_\Omega z^2(x)\, p(x)\, dx \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Lze snadno nahlédnout, že pro $m = p$ je $\alpha(m, m)$ rovno maximálnímu vlastnímu číslu rovnice

$$\int_\Omega K(x, t)\, y(t)\, m(t)\, dt = \alpha y(x)$$

a tedy číslu

$$\sup_{0 \neq y \in C_\Omega} \frac{\int_\Omega \int_\Omega K(x, t)\, y(x)\, y(t)\, m(x)\, m(t)\, dx\, dt}{\int_\Omega y^2(x)\, m(x)\, dx}.$$

Pro funkcionál $\alpha(m, p)$ platí opět vlastnost geometrického průměru tj.:

Buďtež $m_1(x)$, $m_2(x)$, $p_1(x)$, $p(x) \in C_\Omega^+$, pak $\alpha(m_g, p_g) \leqq [\alpha(m_1, p_1)\,\alpha(m_2, p_2)]^{\frac{1}{2}}$. Speciálně pro $m_1 = p_2 = m$; $m_2 = p_1 = p$ z toho plyne

$$\alpha(\sqrt{mp}, \sqrt{mp}) \leqq \alpha(m, p)\,.$$

Zmíněný princip aritmetického, harmonického a geometrického průměru se dosud vztahoval jen na první vlastní číslo. Nyní ukážeme, že princip geometrického průměru lze rozšířit na celé spektrum asociovaných vlastních čísel pro důležitou třídu *jader*, tzv. *oscilačních.*

Označme $\Sigma_n \subset E_n$ oblast E_n složenou z bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro něž platí $0 < x_1 < < x_2 < \ldots x_n < 1$. Oblasti Σ_n nazývejme stručně *simplex.*

Budiž $K(x, t)$ libovolné jádro na $\langle 0, 1 \rangle$. Označme

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \det K(x_i, t_j);\ x_i, t_j \in \langle 0, 1 \rangle,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

a nazývejme jej n-tým asociovaným jádrem. Říkáme, že jádro $K(x, t)$ je oscilační, jestliže

1. $K(x, t)$ je souměrné a spojité na $\langle 0, 1 \rangle$ a kladné na $(0, 1)$: $K(x, t) > 0$, $x, t \in (0, 1)$;
2. n-té asociované jádro má na Σ_n vlastnost A, tedy:

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} \geqq 0\,; \quad 0 \left\langle \begin{matrix} \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots x_n \leqq \\ \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots t_n \leqq \end{matrix} \right\rangle 1\,;$$

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} > 0\,, \quad 0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n < 1\,.$$

Vzhledem k tomu, že všechna asociovaná jádra oscilačního jádra mají vlastnost A, platí princip geometrického průměru pro každé asociované vlastní číslo $\vartheta_n = = \prod_1^n \alpha_i$.

Speciálně pro námi studovaný krajový problém z toho plynou uvedené nerovnosti, neboť ekvivalentní soustava integrálních rovnic má tvar

$$\int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = \alpha z(x)\,,$$

$$\int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \alpha y(x)\,, \quad m(t), p(t) \in C^+_{\langle 0,1 \rangle}\,,$$

$$K(x, t) = \left\langle \begin{matrix} x(1 - t),\ x \leqq t\,, \\ t(1 - x),\ t \leqq x\,; \end{matrix} \right.$$

o jádru $K(x, t)$ lze dokázat, že je oscilační.

Ludvík Janoš, Praha