Časopis pro pěstování matematiky

Zdeněk Hustý

Asymptotické vlastnosti integrálů homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 60--69

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108179

ASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI INTEGRÁLŮ HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

DT: 517.934

(Došlo dne 11. ledna 1957)

V práci jsou uvedeny některé postačující podmínky pro ohraničenost integrálů diferenciální rovnice (1,2). Dále je ukázáno, jak lze v některých případech odvodit asymptotické vzorce pro fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1,2) pomocí známých asymptotických vzorců pro fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1,5).

1. Diferenciální rovnici

$$w'''' + 4a_3w''' + 6a_2w'' + 4a_1w' + a_0w = 0\,, \tag{1,1}$$

kde a_3''', a_2'', a_1', a_0 jsou spojité funkce v intervalu $J \equiv \langle x_0, \infty)$, můžeme převést transformací $w = e^{-\int a_3 \mathrm{d}x} y$ na první kanonický tvar

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \tag{1,2}$$

kde ω (ω_1) je invariant (semiinvariant) rovnice (1,1), $A = \frac{3}{5}(a_2 - a_3^2 - a_3')$, viz [6]. Funkce ω', ω_1, A'' jsou spojité v intervalu J.

V případě $\omega \equiv 0$ pro všechna $x \in J$ je

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0 \tag{1,3}$$

samoadjungovanou rovnicí. Rovnice

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\, y = 0 \tag{1,4}$$

je iterovaná a její fundamentální systém řešení tvoří funkce u^3, u^2v, uv^2, v^3, jestliže u, v jsou lineárně nezávislé integrály diferenciální rovnice

$$u'' + Au = 0\,. \quad \text{Viz na př. [9]}\,. \tag{1,5}$$

Má-li rovnice (1,5) integrál $u_1(x)$, který nemá v J ani jeden nulový bod, pak můžeme (1,2) transformovat substitucí

$$y = \frac{v[\xi(x)]}{[\xi'(x)]^{\frac{3}{2}}}\,, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1,6}$$

na druhý kanonický tvar

$$\frac{d^4v}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi'^3}\,\omega\,\frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{\xi'^4}\left(\omega_1 - \frac{3}{2}\,\frac{\xi''}{\xi'}\,\omega\right) v = 0\,, \quad \text{viz [6]}\,. \tag{1,7}$$

Každý integrál $y(x)$ rovnice (1,2) vyhovuje integrální rovnici

$$y(x) = z(x) - \frac{1}{6}\, y(\bar{x}_0)\, \omega(\bar{x}_0) \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(\bar{x}_0) & v(\bar{x}_0) \end{vmatrix}^3 + \tag{1,8}$$

$$+ \frac{1}{6} \int_{\bar{x}_0}^{x} y(t) \left\{ [\omega_1(t) - \omega'(t)] \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 - 3\omega(t) \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} \right\} dt\,,$$

kde $z(x)$ je integrál rovnice (1,4) splňující v bodě $\bar{x}_0 \geqq x_0$ stejné počáteční podmínky jako $y(x)$ a $u(x)$, $v(x)$ jsou integrály rovnice (1,5), jejichž wronskien je roven 1, viz [8].

2. Dále uvedeme některé postačitelné podmínky pro ohraničenost integrálů diferenciální rovnice (1,2). Kvůli stručnějšímu vyjadřování zavedeme tyto definice:

a) Řekneme, že integrál $y(x)$ diferenciální rovnice má vlastnost

$(O_i) \Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$; $\quad i = 0, 1, 2, 3$;

$(O_{01}) \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$;

$\vdots$

$(O_{0123}) \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M$ pro všechna $x \in J$;

$(o_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$;

$(o_{01}) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$; $M = \text{konst} > 0$.*)

b) Řekneme, že diferenciální rovnice má některou z vlastností odst. a), když každé její řešení má tutéž vlastnost.

2,1. Nechť

$$\int^{\infty} |\omega|\, dx < \infty\,, \quad \int^{\infty} |\omega_1|\, dx < \infty\,. \tag{2,1}$$

Jestliže rovnice (1,4) má vlastnost (O_{0123}), pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{0123}), viz [1], T. 6, str. 55.

Poznámka 2,1. Rovnice (1,4) má vlastnost (O_{0123}), jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), při čemž $|A| + |A'| \leqq M$.

Poznámka 2,2. Rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), jestliže

$$\lim_{x\to\infty} |A + a| = 0,\ \int^{\infty} |A + a|\, dx < \infty,\ a = \text{konst} < 0,$$

viz [1], II, T. 7, str. 56, nebo

$$\lim_{x\to\infty} |A + a| = 0,\ \int^{\infty} |A'|\, dx < \infty,\ a = \text{konst} < 0,$$

viz [1], VI, T. 1, str. 133.

*) V dalším textu budeme vždy písmenem M označovat vhodnou kladnou konstantu.

2,2. Nechť

$$\int^{\infty} |\omega_1 - \omega'| \, dx < \infty , \quad \int^{\infty} |\omega| \, dx < \infty . \tag{2,2}$$

Jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_0).

Podle (1,8) je vzhledem k předpokladu $|u(x)| \leqq M$, $|v(x)| \leqq M$, $|u'(x)| \leqq M$, $|v'(x)| \leqq M$

$$|y(x)| \leqq M^3(|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + c_5) + \frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} |y|[|\omega_1 - \omega'| + 3|\omega|] \, dt ,$$

kde jsme použili vztahů

$$z(x) = c_1 u^3(x) + c_2 u^2(x) \, v(x) + c_3 u(x) \, v^2(x) + c_4 v^3(x) ,$$

$$c_5 = \frac{1}{6} |y(\bar{x}_0) \, \omega(\bar{x}_0)| \cdot [|u(\bar{x}_0)| + |v(\bar{x}_0)|]^3 .$$

Podle Bellmanovy nerovnosti, viz [1], str. 46, je

$$|y(x)| \leqq c \exp\left\{\frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} [|\omega_1 - \omega'| + 3|\omega|] \, dt\right\}, \quad c = M^3 \sum_{i=1}^{5} |c_i| ,$$

odkud s ohledem na (2,2) plyne tvrzení.

Poznámka 2,3. Nechť platí (2,2). Jestliže rovnice (1,5) má vlastnost (O_{01}), při čemž $|A| + |A'| \leqq M$, pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{0123}).

2,3. Nechť platí předpoklady:

a) $A \geqq$ konst > 0, $A^{-\frac{1}{4}}$ je konvexní pro $x \in \langle x_0, \infty)$,

b) $\displaystyle\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3}} \, dx < \infty , \quad \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A} \, dx < \infty .$

Pak rovnice (1,2) má vlastnost (O_{01}).

Podle předpokladu a) je

$$|u(x)| \leqq \frac{M}{\sqrt[4]{A}} \geqq |v(x)| , \quad |u'(x)| \leqq M\sqrt[4]{A} \geqq |v'(x)| , \tag{2,3}$$

viz *Zlámal* [3], str. 85. Podle (1,8) je

$$|y(x)| \leqq \frac{c}{\sqrt[4]{A^3(x)}} + \frac{4}{3} \frac{M^6}{\sqrt[4]{A^3(x)}} \int_{\bar{x}}^{x} |y| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{\sqrt[4]{A(t)}}\right] dt ,$$

$$|y(x) \sqrt[4]{A^3(x)}| \leqq c + \frac{4}{3} M^6 \int_{\bar{x}_0}^{x} |y\sqrt[4]{A^3(t)}| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{A(t)}\right] dt , \tag{2,4}$$

kde c je vhodná kladná konstanta. Jestliže aplikujeme na (2,4) Bellmanovu nerovnost, snadno podle předpokladu b) dojdeme k závěru, že integrál $y(x)$ je ohraničený.

Derivací (1,8) s ohledem na (2,3) obdržíme odhad

$$|y'(x)\sqrt[4]{A(x)}| \leqq \bar{c} + 4M^6 \int_{x_0}^{x} |y\sqrt[4]{A^3(t)}| \left[\frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt[4]{A^3(t)}} + \frac{3|\omega|}{A(t)}\right] dt,$$

kde $\bar{c} > 0$ je vhodná konstanta. Integrál na pravé straně podle předpokladu konverguje, neboť funkce $y\sqrt[4]{A^3(x)}$ je podle (2,4) ohraničena.

Poznámka 2,4. Jestliže platí předpoklady odst. 2,7 a $\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$, pak rovnice (1,2) má vlastnost (o_{01}).

Přesněji

$$y(x) = O\left[\frac{1}{\sqrt[4]{A^3(x)}}\right], \quad y'(x) = O\left[\frac{1}{\sqrt[4]{A(x)}}\right].$$

3

3,1. Nechť $|A + a| \to 0$ pro $x \to \infty$, $\int^{\infty} |A'(x)|\, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega|\, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1 + 3A''|\, dx < \infty$. Pak existuje fundamentální systém řešení rovnice (1,2) tvaru

$$y_k^{(i)} = \exp\left[\int_{x_0}^{x} \lambda_k(t)\, dt\right][c_{ki} + o(1)], \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

kde $\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-A(t)}$, $\lambda_{3,4}(t) = \pm 3\sqrt{-A(t)}$, c_{ki} jsou konstanty nezávislé na x, x_0. Viz [1], II, T. 8, str. 64.

3,2. Nechť $|A + a| \to 0$ pro $x \to \infty$, $a =$ konst., $\int^{\infty} |A'(x)|\, dx < \infty$. Potom

$$u_1^{(i)} = e^{-\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\, dt}[c_{1i} + o(1)], \quad u_2^{(i)} = e^{\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\, dt}[c_{2i} + o(1)], \quad i = 0, 1, \tag{3,1}$$

kde c_{ki} jsou konstanty nezávislé na x, x_0; u_1, u_2 jsou nezávislé integrály rovnice (1,5). Viz [1], II, T. 8, str. 64.

Důsledek.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-3\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\, dt}[1 + o(1)], \quad y_2 = e^{-\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\, dt}[1 + o(1)], \\ y_3 &= e^{\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\, dt}[1 + o(1)], \quad y_4 = e^{3\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\, dt}[1 + o(1)], \end{aligned} \tag{3,2}$$

kde $y_i = u_1^{4-i} \cdot u_2^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, jsou nezávislé integrály rovnice (1,4).

3,3. Předpokládejme, že rovnice (1,5) má integrál $u_1(x)$, který nemá v intervalu J žádný nulový bod a $\int^{\infty} \frac{1}{u_1^2(x)}\, dx = +\infty$. Potom můžeme rovnici (1,2) transformovat substitucí (1,6) na tvar (1,7), při čemž $\lim_{x\to\infty} \xi(x) = \infty$.

Nechť

$$\int^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi'^2} |\omega|\, dx < \infty\,, \quad \int^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi'^3} \left|\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right| dx < \infty\,. \tag{3,3}$$

Integrály rovnice (1,7) jsou podle Ghizettiho věty (viz [7]) asymptoticky rovny integrálům rovnice $v^{(4)} = 0$. Přesněji, rovnice (1,7) má fundamentální systém tvaru

$$v_i = \xi^{i-1}[1 + o(1)]\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Důsledek. Integrály rovnice (1,2) jsou podle Ghizettiho věty asymptoticky rovny integrálům rovnice (1,4). Přesněji, rovnice (1,2) má fundamentální systém tvaru $y_i = u_1^{4-i} \,.\, u_2^{i-1}[1 + o(1)]$, kde u_1, u_2 jsou vhodné lineárně) nezávislé integrály rovnice (1,5).

3,4. Nechť rovnice (1,5) má integrál $u_2(x)$ (nezávislý na $u_1(x)$) takový, že $\int^{\infty} \frac{1}{u_2^2(x)} < \infty$.

Jestliže integrály

$$\int^{\infty} \varphi^2(x)\, |\omega|\, dx\,, \quad \int^{\infty} \psi(x)\, \varphi^2(x)\, |\omega|\, dx\,, \quad \int^{\infty} \varphi^3(x)\, |\omega_1|\, dx \tag{3,4}$$

konvergují, kde

$$\begin{aligned} u_1 \,.\, u_2 &= O[\varphi(x)]\,, \\ u_1' \,.\, u_2 &= O[\psi(x)]\,, \end{aligned} \tag{3,5}$$

pak platí tvrzení odstavce 3,3. Ukažme, že je splněna podmínka (3,3).

$$\int^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi'^2} |\omega|\, dx = \int^{\infty} u_1^4 \left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2}\, dt\right)^2 |\omega|\, dx = \int^{\infty} \left[u_1\left(c_1 u_2 + c_2 u_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_2^2}\, dt\right)\right]^2 |\omega|\, dx \leqq$$

$$\leqq N_1 \int^{\infty} (u_1 u_2)^2\, |\omega|\, dx, \quad \text{kde} \quad \left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{u_2^2}\, dt\right)^2 \leqq N_1, \ c_1, c_2 \text{ jsou konst.}$$

Podobně zjistíme, že

$$\int^{\infty} \frac{\xi^3}{\xi'^3} \left|\omega_1 - \frac{3}{2}\frac{\xi''}{\xi'}\omega\right| dx \leqq N_2 \left[\int^{\infty} |(u_1 u_2)^3\, \omega_1|\, dx + \int^{\infty} |(u_1^3)'\, u_2^3 \omega|\, dx\right],$$

kde N_2 je vhodná konstanta > 0.

Všechny tři integrály, které se vyskytují na pravých stranách obou nerovností, podle předpokladů (3,4), (3,5) konvergují.

3,5. Nechť platí předpoklady odstavce 3,2 pro $a > 0$. Jestliže integrály $\int^{\infty}|\omega|\,\mathrm{d}x$, $\int^{\infty}|\omega_1|\,\mathrm{d}x$ konvergují, má rovnice (1,2) fundamentální systém (3,2). Podle (3,1) je $\varphi(x) = \psi(x) = 1$.

4. G. Sansone ve své práci [2] dokazuje následující dvě věty o diferenciální rovnici

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0 \,. \tag{4,1}$$

Věta 1. *Nechť v rovnici* (4,1) *jsou* ϑ_2'', ϑ_1', ϑ_0, ω' *spojité funkce pro všechna* $x \geqq a$ *a nechť platí tyto předpoklady:*

$$\begin{gathered} L \geqq \vartheta_2 > 0 \,, \quad \vartheta_2' \geqq 0 \,, \quad M \geqq \vartheta_1 \geqq m > 0 \,, \quad \vartheta_1 \geqq \vartheta_2' \,, \quad \vartheta_1' \geqq \omega \,, \\ \vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\omega' \geqq \tfrac{1}{2}[\vartheta_1' - \omega] \,, \quad \vartheta_0 + \tfrac{1}{2}\omega' \geqq \tau > 0 \,, \ (L, M, m, \tau \text{ jsou konst.}). \end{gathered} \tag{4,2}$$

Jestliže $y(x)$ *je řešení rovnice* (4,1), *pak mohou nastat tyto případy:*

i) $y(x)$ *neosciluje* [*má v intervalu* $\langle a, \infty)$ *konečný počet kořenů*]; *pak je buď* $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = 0$ *nebo* $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$;

ii) $y(x)$ *osciluje a není* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$; *pak*

$$\int_a^{\infty} [y^2(x) + y'^2(x)]\,\mathrm{d}x = +\infty \,,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y'^2(x_n) = \infty$ [$\{x_n\}$ *je posloupnost nulových bodů integrálu* $y(x)$], $y'(x_n) \,.$ $. \, y''(x_n) > 0$ *pro dosti velká* n.

Věta 2. *Nechť platí předpoklady věty* 1. *Nechť je dále pro všechna* $x \geqq a$

$$|\vartheta_1' - \omega| \leqq H_1 \,, \quad |\vartheta_0 + \omega'| \leqq H_2 \,, \quad (H_1, H_2 \text{ jsou kladné konstanty}) \,. \tag{4,3}$$

iii) *Jestliže integrál* $y(x)$ *rovnice* (4,1) *je ohraničený, pak* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Poznámka 4,1. K důkazu obou vět používá Sansone identity

$$U(x) = U(a) - \int_a^x [\vartheta_2 y''^2 + \vartheta_1 y'^2 + \tfrac{1}{2}(\omega' + \vartheta_0)\,y^2]\,\mathrm{d}x \,, \tag{4,4}$$

kde

$$U(x) = y[\vartheta_2 y'']'' - \vartheta_2 y' y'' - \vartheta_1 y y' - \tfrac{1}{2}\omega y^2 \,,$$

viz [2], str. 15.

Tvrzení obou vět platí beze změny pro diferenciální rovnici (1,2), jenom místo (4,2) event. (4,3) musíme předpokládat

$$\begin{gathered} -M \leqq A \leqq -m < 0 \,, \quad \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega' \geqq n > 0 \,, \\ 0 \leqq A' + \tfrac{1}{2}\omega \leqq \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega' \,, \end{gathered} \tag{4,2'}$$

event.

$$|\omega - 10A'| \leqq H_1 \,, \quad |3(3A^2 + A'') + \omega_1 - \omega'| \leqq H_2 \tag{4,3'}$$

(M, m, n, H_1, H_2 jsou kladné konstanty).

Ovšem k důkazu musíme použít místo (4,4) identity

$$U(x) = U(a) - \int_a^x [(3Ay + y'')^2 + (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega')\, y^2 - 4y'^2 A]\, dt\,,$$

kde

$$U(x) = y'''y - y''y' + 4Ayy' + 3A'y^2 + \tfrac{1}{2}\omega y^2\,.$$

Poznámka 4,2. Jestliže platí předpoklady (4,2'), pak každý integrál $y(x)$ rovnice (1,2), který pro všechna $x \geqq a \in J$ vyhovuje podmínce

$$U(x) = y'''y - y''y' + 4Ayy' + 3A'y^2 + \tfrac{1}{2}\omega y^2 \geqq 0\,,$$

má vlastnost (o_0), viz [2], str. 16—18.

LITERATURA

[1] *R. Bellmann:* Stability theory od differential equations. Ruský překlad, Moskva 1954.

[2] *G. Sansone:* Le equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. XI, Fašc. III—IV, 1942, 151—196.

[3] *M. Zlámal:* Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Чехосл. мат. журнал, Praha, *6(81)* 1956, 75—93.

[4] *M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung. Spisy přírodovědecké fakulty MU, Brno, čís. 374, 1956, 177—184.

[5] *M. Ráb:* Asymptotické vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu. Spisy přírodovědecké fakulty MU, Brno, čís. 379, 1956, 441—454.

[6] *Z. Hustý:* O některých vlastech homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu. Časopis pro pěst. mat. *83* (1958), č. 2.

[7] *A. Ghizetti:* Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee. Rendiconti di matematica e delle sul applicazioni (*5*), *8*, (1949), 28—42.

[8] *З. Густы:* Колебательные свойства однородного линейного диффенциального уравнения четвертого порядка. Чех. мат. ж. *8* (1958), č. 1.

[9] *Z. Hustý:* O iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic. Sborník lesnické fakulty, Brno 1956, 133—148.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

(Поступило в редакцию 11/I 1957 г.)

В предлагаемой работе исследуются достаточные условия ограниченности решений дифференциального уравнения

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \qquad (1)$$

A'', ω', ω_1 непрерывны в $J \equiv \langle x_0, \infty)$, и выводятся некоторые асимптотические формулы для фундаментальной системы. В целях краткости обозначений были введены следующие определения:

а) Мы скажем, что интерал $y(x)$ дифференциального уравнения обладает свойством

$$
\begin{aligned}
&(O_i) \quad \Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M = \text{konst.} > 0\,, \quad i = 0, 1, 2, 3\,,\\
&(O_{01}) \quad \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M\,,\\
&\vdots\\
&(O_{0123}) \Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M\,,\\
&(o_0) \quad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\\
&(o_{01}) \quad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0\,.
\end{aligned}
$$

б) Мы скажем, что дифференциальное уравнение обладает некоторым из свойств пункта а), если каждое его решение обладает этим свойством.

Уравнение (1) обладает свойством (O_{0123}), если уравнение

$$y'' + Ay = 0 \tag{2}$$

обладает свойством (O_{01}), $|A| + |A'| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int^{\infty}|\omega|\,\mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty}\omega_1\,\mathrm{d}x < \infty$.

Уравнение (1) обладает свойством (O_0), если уравнение (2) обладает свойством (O_{01}), $\int^{\infty}|\omega_1 - \omega'|\,\mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty}|\omega|\,\mathrm{d}x < \infty$.

Пусть $A \geqq \text{konst.} > 0$, $A^{-\frac{1}{4}}$ — выпукло,

$$\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}}\,\mathrm{d}x < \infty, \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Тогда уравнение (1) обладает свойством (O_{01}). Если $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = \infty$, то уравнение (1) обладает свойством (o_{01}).

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} |A + a| = 0$, $a = \text{konst.}$, $\int^{\infty}|A'|\,\mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty}|\omega|\,\mathrm{d}x < \infty$. Тогда фундаментальная система решений уравнения (1) имеет вид

$$y_{1,2} = e^{\pm 3\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,\mathrm{d}t}[1 + o(1)]\,, \quad y_{3,4} = e^{\pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{-A(t)}\,\mathrm{d}t}[1 + o(1)]\,.$$

Дж. Сансоне в своей работе [2] доказывает две теоремы об асимптотических свойствах интегралов дифференциального уравнения

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0\,.$$

В настоящей работе приводятся условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения (1), для того, чтобы обе теоремы Сансоне были справедливы и для уравнения (1).

Resumé

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN LINEARER HOMOGENER DIFFERENTIALGLEICHUNG DER VIERTEN ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 11. I. 1957)

In der vorgelegten Arbeit werden hinreichende Bedingungen für die Begrenztheit der Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\,y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0\,, \qquad (1)$$

A'', ω', ω_1, sind stetige Funktionen von $x \in J \equiv \langle x_0, \infty)$ eingeführt und einige asymptotische Formeln für das Fundamentalsystem abgeleitet. Wegen der Möglichkeit von kürzerer Ausdrückung wurden folgende Definitionen eingeführt:

a) Man sagt, dass die Lösung $y(x)$ einer Differentialgleichung folgende Eigenschaft besitzt

$$\begin{aligned}
&(O_i) &&\Rightarrow |y^{(i)}(x)| \leqq M = \text{konst.} > 0\,,\ i = 0, 1, 2, 3\,,\\
&(O_{01}) &&\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| \leqq M\,,\\
&\ \vdots && \ \vdots\\
&(O_{0123}) &&\Rightarrow |y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)| + |y'''(x)| \leqq M\,,\\
&(o_0) &&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\\
&(o_{01}) &&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,,\quad \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

b) Man sagt, dass die Differentialgleichung eine der Eigenschaften des Absatzes a) besitzt, falls jede ihre Lösung dieselbe Eigenschaft besitzt.

Die Differentialgleichung (1) besitzt die Eigenschaft (O_{0123}), wenn die Differentialgleichung

$$y'' + Ay = 0 \qquad (2)$$

die Eigenschaft (O_{01}) besitzt, $|A| + |A'| \leqq M = \text{konst.} > 0$, $\int^{\infty} |\omega|\,\mathrm{d}x < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1|\,\mathrm{d}x < \infty$.

Die Differentialgleichung (1) besitzt die Eigenschaft (O_0), wenn die Differentialgleichung (2) die Eigenschaft (O_{01}) besitzt,

$$\int^{\infty} |\omega_1 - \omega'|\,\mathrm{d}x < \infty\,,\quad \int^{\infty} |\omega|\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Es sei $A \geqq \text{konst.} > 0$ und die Funktion $A^{-\frac{1}{4}}$ sei konvex,

$$\int^{\infty} \frac{|\omega_1 - \omega'|}{\sqrt{A^3}}\,\mathrm{d}x < \infty\,,\quad \int^{\infty} \frac{|\omega|}{A}\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Dann besitzt die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft (O_{01}). Wenn $\lim_{x \to \infty} A(x) = \infty$, so besitzt die Differentialgleichung (1) die Eigenschaft (o_{01}).

Im Falle dass, $\lim_{x \to \infty} |A + a| = 0$, $a =$ konst., $\int^{\infty} |A'| \, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega| \, dx < \infty$, $\int^{\infty} |\omega_1| \, dx < \infty$, dann besitzt die Differentialgleichung (1) das Fundamentalsystem

$$y_{1,2} = e^{\pm 3 \int_{x_0}^{x} \sqrt{-A(t)}\, dt} [1 + o(1)] \,, \quad y_{3,4} = e^{\pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{A(t)}\, dt} [1 + o(1)] \,.$$

G. Sansone beweist in seiner Arbeit [2] zwei Sätze über die asymptotischen Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung

$$[\vartheta_2 y'']'' - [\vartheta_1 y']' - \omega y' + \vartheta_0 y = 0 \,.$$

In dieser Arbeit werden die Voraussetzungen, die die Koefizienten der Differentialgleichung (1) erfüllen müssen, eingeführt, sollten beide Sansons' Sätze auch für die Differentialgleichung (1) gelten.