Časopis pro pěstování matematiky

Linard Eduardovič Reizinš

Нелокальные функции Ляпунова-Красовского

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 111 (1986), No. 3, 280--293

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108156`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА-КРАСОВСКОГО

Л. Э. РЕЙЗИНЬ, Рига

Посвящается профессору Ярославу Курцвеилу по случаю его шестидесятилетия

(Поступило в редакцию 5/VI. 1985 г.)

В статье дается построение гладкой глобальной функции Ляпунова-Красовского для неавтономного уравнения $\dot{x} = P(x, t)$ без циклов, методом отличным от [1–4].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = P(x, t)\,, \tag{1}$$

где $P: \Omega \to R^n$, $\Omega \subset R^{n+1}$, P удовлетворяет локальному условию Липшица по первому аргументу и равномерно непрерывна относительно второго. Решение уравнения будем обозначать $\varphi(\cdot, x, t)$: $]t_-(x, t), t_+(x, t)[$, $\varphi(t, x, t) = x$, $]t_-(x, t), t_+(x, t)[$ является максимальным интервалом определения решения $\varphi(\cdot, x, t)$. Положим $\Phi(t + \tau, x, t) = (\varphi(t + \tau, x, t), t + \tau) \in R^{n+1}$.

Определения. Множество $G \subset \Omega$ назовем *инвариантным*, если из $(x, t) \in G$ следует $\Phi(t + \tau, x, t) \in G$ для всех $\tau \in R$. Естественно, что для $(x, t) \in G$ будет $]t_-(x, t), t_+(x, t)[= R$.

Введем еще обозначение

$$\varrho_G(x, t) = \inf\{|x - y| : (y, t) \in G\}\,.$$

Функция V называется *функцией Ляпунова-Красовского* для уравнения (1) относительно множества G в области Ω_0, если ее производная в силу уравнения (1) $\dot{V}$,

$$\dot{V}(x, t) = DV(\Phi(t + \cdot, x, t))(0)$$

положительно определенна относительно множества G в некоторой области Ω_1, $G \subset \Omega_1 \dot{\subset} \Omega_0 \subset \Omega$ и положительна в области Ω_0, а сама функция V стремится равномерно к некоторой постоянной, когда (x, t) стремится к G [5]. Если область Ω_0, в которой определена функция Ляпунова-Красовского, является малой окрестностью множества G, то такая функция называется *локальной*. Если же область Ω_0 не является малой окрестностью множества G, то функцию называют *нелокальной*.

Если функция Ляпунова-Красовского для уравнения (1) определена во всей области Ω, то ее называют *глобальной*. При этом может быть, что множество G, на котором производная в силу уравнения равна нулю, состоит из нескольких компонент связности и сама функция на каждой из них принимает свое постоянное значение, а производная в силу уравнения положительно определенна относительно каждой компоненты связности в некоторой ее окрестности.

Уравнение (1) в окрестности Ω замкнутого инвариантного множества G обладает свойством Красовского, если по любым $r > 0$ и $h > r$ таким, что множество $\Omega(h) = \{(x, t): \varrho_G(x, t) < h\}$ можно найти такое $T > 0$, что из $r < \varrho_G(x, t) < h$ следует, что

$$\{\Phi(t + \tau, x, t): -T \leqq \tau \leqq T\} \not\subset \Omega(h).$$

Наименьшее T, обладающее указанным свойством, обозначим через $\overline{T}(r, h)$ [6].

Лемма 1. *Пусть уравнение* (1) *имеет инвариантное множество G, на котором P ограничено, в его окрестности $\Omega(h)$ обладает свойством Красовского и имеет такую окрестность $\Omega(r)$ инвариантного множества с $r < h$, что из $(x, t) \in \Omega(r)$ и из $\Phi(t + \tau_0, x, t) \notin \Omega(h)$ следует $\Phi(t + \tau, x, t) \notin \Omega(r)$ при $|\tau| \geqq |\tau_0|$ и $\tau\tau_0 > 0$.*

Тогда на множестве $\Psi(\Omega(r))$, где $\Psi(x, t) = \Phi(]t_-(x, t), t_+(x, t)[, x, t)$, можно построить непрерывную функцию Ляпунова-Красовского для уравнения (1).

Доказательство. Обозначим

$$\gamma(x, t) = \inf \{\varrho_G(\Phi(t + \tau, x, t)): \tau \in]t_-(x, t), t_+(x, t)[\}.$$

Через $T(x, t)$ обозначим временную длину интегральной кривой от точки (x, t) до точки наименьшего расстояния до множества G, если такая существует, т.е. $\varrho_G(\Phi(t + T(x, t), x, t)) = \gamma(x, t)$. Если таких точек несколько, то положим $T(x, t)$ равным, например, наименьшей временной длине. Если же $\varrho_G(\Phi(t + \tau, x, t)) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, то положим $T(x, t) = \infty$, а если $\varrho_G(\Phi(t + \tau, x, t)) \to 0$ при $\tau \to -\infty$, то $T(x, t) = -\infty$.

Положим

$$W_0(x, t) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sup \{\varrho_G(\Phi(t + \tau, x, t)) - \gamma(x, t):$$
$$|\tau| \leqq T(x, t), \quad \tau\, T(x, t) \geqq 0\} \operatorname{sgn} T(x, t).$$

Тогда $|W_0(x, t)| \leqq 1$.

Берем точку (x_α, t_α) на каждой интегральной кривой, для которой $T(x_\alpha, t_\alpha) = 0$ и строим локально конечное покрытие $\{\Theta_i\}$ множества $\{(x, t): |T(x, t)| < +\infty\}$ трубками интегральных кривых $\Theta_i = \Phi(I_i, U(x_i, \eta_i), t_i)$, где $I_i \subset R$ является минимальным интервалом, для которого

$$\Phi(\partial I_i, U(x_i, \eta_i), t_i) \not\subset \Omega(h) \quad \text{и из} \quad (x, t) \in \Theta_i, \quad (y, t) \in \Theta_i$$

следует $|x - y| < \frac{1}{2}\varrho_G(x_i, t_i)$, а $U(x, \eta)$ является η-окрестностью точки x. Для него строим подчиненное разбиение единицы $\{\chi_i\}$, обладающее свойством $\chi_i(\Phi(t + \tau, x, t)) = \chi_i(x, t)$.

Положим

$$W_1(x, t) = \begin{cases} \Sigma_i \chi_i(x, t)\, W_0(\Phi(t, x_i, t_i)), & \text{если } |T(x, t)| < +\infty, \\ W_0(x, t), & \text{если } |T(x, t)| = +\infty. \end{cases}$$

Тогда $W_1 \in C$ и $W_1(x, t)$ на интегральной кривой не убывает и $|W_1(x, t)| \leqq 1$. Чтобы добиться строгой монотонности, берем

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2)\, W_1(\Phi(t + s, x, t))\, ds.$$

Если интегральная кривая непродолжаема до $+\infty$ или $-\infty$, то для $s \in]-\infty, t_-(x, t)]$ полагаем

$$W_1(\Phi(s, x, t)) = \lim_{\tau \to t_-(x,t)+0} W_1(\Phi(\tau, x, t)), \tag{2}$$

а для $s \in [t_+(x, t), +\infty[$ –

$$W_1(\Phi(s, x, t)) = \lim_{\tau \to t_+(x,t)-0} W_1(\Phi(\tau, x, t)). \tag{3}$$

Для нее

Далее берем функцию

$$\Theta(t) = \begin{cases} \exp(1/(t^2 - 1)) / \int_{-1}^{+1} \exp(1/(s^2 - 1))\, ds, & \text{если } |t| < 1, \\ 0, & \text{если } |t| \geqq 1. \end{cases}$$

Для нее $\operatorname{supp} \Theta = [-1, 1]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(s)\, ds = 1$, $\Theta \in C^\infty$, $D\,\Theta(-s) = -D\,\Theta(s)$.

Положим

$$V_0(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(s)\, W(\Phi(t + s, x, t))\, ds.$$

Здесь также продолжаем $W(\Phi(t+\cdot, x, t))$ на R как в (2) и (3). Тогда $|V_0(x, t)| \leqq 1$,

$$\dot{V}_0(x, t) = -\int_0^1 D\,\Theta(s)\,(W(\Phi(t + s, x, t)) - W(\Phi(t - s, x, t)))\, ds.$$

Используя определение функции W, можем выразить

$$W(\Phi(t + s, x, t)) - W(\Phi(t - s, x, t)) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tau^2)\,(W_1(\Phi(t + \tau + s, x, t)) - W_1(\Phi(t + \tau - s, x, t)))\, ds.$$

Заменив интегрирование по τ на интегрирование по значениям функции W_1, уменьшив интервал интегрирования и заменив множитель $\exp(-\tau^2)$ на его наименьшее значение на этом интервале, получаем оценку

$$W(\Phi(t+s,x,t)) - W(\Phi(t-s,x,t)) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2s\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(h-\gamma(x,t)) - \left|W_1(x,t)\right|\right)\exp\left(-\overline{T}^2(\varrho_G(x,t),h)\right),$$

откуда

$$\dot{V}(x,t) \geqq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(h-\gamma(x,t)) - \left|W_1(x,t)\right|\right)\exp\left(-\overline{T}^2(\varrho_G(x,t),h)\right).$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{2s^2}{1-s^2}\exp\frac{1}{s^2-1}\,\mathrm{d}s\,.$$

Следовательно, $\dot{V}$ является положительно определенной.

Используя определение W_0, имеем

$$\varrho_m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left|W_0(x,t)\right|\right) \leqq \varrho_G(x,t)\exp\left(L|\tau|\right)$$

или

$$|\tau| \geqq \frac{1}{L}\ln\frac{\varrho_m}{\varrho_G(x,t)}\,.$$

Тогда

$$\overline{T}(\varrho_m,h) \geqq |\tau| + \frac{1}{L}\ln\frac{h}{\varrho_G(x,t)}$$

и

$$\frac{1}{L}\ln\frac{\varrho_m h}{\varrho_G^2(x,t)} \leqq \overline{T}(\varrho_m,h)\,,$$

откуда

$$\varrho_m \exp\left(-L\overline{T}(\varrho_m,h)\right) \leqq \frac{\varrho_G^2(x,t)}{h}$$

и

$$W_0(x,t) \leqq \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} f^{-1}\left(\frac{\varrho_G^2(x,t)}{h}\right),$$

где $f(u) = u\exp\left(-L\overline{T}(u,h)\right)$.

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ при

$$\varrho_G(x,t) < \eta_0 = \left(h\operatorname{tg}\frac{\varepsilon\pi}{4}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}L\overline{T}\left(\operatorname{tg}\frac{\varepsilon\pi}{4},h\right)\right)$$

будет

$$\left|W_0(x,t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

В силу определения функции W_1, построения покрытия $\{\Theta_i\}$, которому подчинено разбиение единицы $\{\chi_i\}$ при $\varrho_0 < \eta_0/2$ имеем

$$|W_1(x,t)| \leqq \sup\left\{|W_0(\xi,t): \xi \in U(x,\eta),\ \eta = \frac{\eta_0}{2}\right\}.$$

Следовательно, при

$$\varrho_G(x,t) < \frac{\eta_0}{2}$$

$$|W_1(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее выберем такое $T > 0$, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_T^{+\infty} \exp(-s^2)\,\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4},$$

тогда по определению W имеем

$$|W(x,t)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-T}^{T} \exp(-s^2)\, W_1(\Phi(t+s,x,t))\,\mathrm{d}s,$$

откуда при

$$\varrho_G(x,t) < \frac{\eta_0}{2}\exp(-2LT)$$

получаем

$$|W(x,t)| < \varepsilon,$$

но тогда для

$$\varrho_G(x,t) < \frac{\eta_0}{2}\exp(-2L(T+1))$$

$$|V_0(x,t)| < \varepsilon,$$

чем показано, что V_0 стремится равномерно к нулю, когда $\varrho_G(x,t) \to 0$.

Если же на G зададим для искомой функции некоторое значение $V(G)$, которое может быть и отлично от нуля, то вместо построенной функции V_0 следует взять функцию V, положив

$$V(x,t) = V_0(x,t) + V(G).$$

Определения. Если уравнение (1) имеет два инвариантных множества G_1 и G_2, то говорят, что G_2 *следует* за G_1, если существуют последовательности $\{t'_m\}$ и $\{t''_m\}$ и интегральная кривая $\Phi(R,x,t)$, такие, что $t'_m \to -\infty$, $t''_m \to +\infty$. $\varrho_{G_1}(\Phi(t'_m,x,t)) \to 0$, $\varrho_{G_2}(\Phi(t''_m,x,t)) \to 0$. Следование G_2 за G_1 будем обозначать $G_1 \to G_2$. Множество $\{(x,t): \exists\{t'_m\}, t'_m \to -\infty, \exists\{t''_m\}, t''_m \to +\infty, \varrho_{G_i}(\Phi(t'_m,x,t)) \to 0, \varrho_{G_j}(\Phi(t''_m,x,t)) \to 0\}$ обозначим через G_{ij}.

Если найдется такая конечная последовательность $G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_p$, то будем ее называть *конечной цепочкой*. Если еще $G_p \to G_1$, то ее будем называть *циклом*. Если имеется счетная последовательность $G_1 \to G_2 \to \ldots$, то будем ее называть *счетной цепочкой*. Множества G_j назовем *звеньями* цепочек.

Уравнение (1) имеет *несобственное седло*, если существуют последовательности $\{(x_n, t_n)\}$, $\{\tau_n'\}$ и $\{\tau_n\}$, такие, что

$$0 < \tau_n' < \tau_n, \quad \varrho_{G_1}(x_n, t_n) \to 0, \quad \varrho_{G_2}(\Phi(t_n + \tau_n, x_n, t_n)) \to 0,$$

а $\Phi(t_n + \tau_n', x_n, t_n) \to \partial\Omega$ или $|\varphi(t_n + \tau_n', x_n, t_n)| \to +\infty$, если Ω неограничено, где G_1 и G_2 замкнутые инвариантные множества.

Лемма 2. *Если уравнение* (1) *имеет конечное число замкнутых инвариантных множеств* $G_1, \ldots, G_p$ *не имеет циклов и несобственных седел в окрестности каждого инвариантного множества обладает свойством Красовского, то для него существует непрерывная ограниченная глобальная функция Ляпунова-Красовского.*

Доказательство. 1°. Согласно лемме 1 строим функции Ляпунова-Красовского V_i: $\Psi(\Omega_i(r)) \to R$, где $\Omega_i(r) = \{(x, t): \varrho_{G_i}(x, t) < r\}$, $V_i(G_i) = 0$.

Пусть имеется цепочка $G_i \to G_j \to \ldots \to G_k$. Таких цепочек может быть лишь конечное число. Поэтому можем каждому множеству G_j поставить в соответствие некоторое число k_j, так, чтобы при $G_i \to G_j$ было бы $k_j - k_i \geqq 2$.

Теперь на $\Psi(\Omega_i(r))$ строим функцию

$$W_i(x, t) = V_i(x, t) + k_i.$$

Тогда при $G_i \to G_j$ всегда

$$W_j(x, t) > V_i(x, t).$$

2°. Кроме указанных областей еще могут встретиться области Ψ_0, в которых интегральные кривые не приближаются ни в одном направлении к избранным инвариантным множествам G_i, $i = 1, \ldots, p$. В них можно положить на каком-то сечении $W(x, t_0) = 0$ и положить

$$\dot{W}(x, t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(t - t_0).$$

3°. Если $G_i \to G_j$, то $\Psi(\Omega_i(r)) \cap \Psi(\Omega_j(r)) = \Psi_{ij} \neq \emptyset$. На Ψ_{ij} строим новую функцию W_{ij} следующим образом. Берем

$$k_i < c_1 < \inf\{\sup\{W_i(\Phi(\tau, x, t)): \tau \in]t_-(x, t), t_+(x, t)[\}: (x, t) \in \Omega_i(r) \subset G_i\}$$

и $k_i < c_0 < c_1$.

Полагаем

$$W_{ij}(x, t) = \left(1 - \Theta\left(\frac{W_i(x, t) - c_0}{c_1 - c_0}\right)\right) W_i(x, t) + \Theta\left(\frac{W_i(x, t) - c_0}{c_1 - c_0}\right) W_j(x, t),$$

где Θ: $R \to [0, 1]$, $\Theta^{-1}(0) = R_-$, $\Theta^{-1}(1) = [1, +\infty[$, $\Theta \in C^\infty$, $D\,\Theta(u) \geqq 0$.

Тогда

$$\dot{W}_{ij}(x, t) = \left(1 - \Theta\left(\frac{W_i(x, t) - c_0}{c_1 - c_0}\right)\right) \dot{W}_i(x, t) + \Theta\left(\frac{W_i(x, t) - c_0}{c_1 - c_0}\right) \dot{W}_j(x, t) +$$

$$+ \frac{1}{c_1 - c_0} D\Theta\left(\frac{W_i(x, t) - c_0}{c_1 - c_0}\right) (W_j(x, t) - W_i(x, t)) \dot{W}_i(x, t) .$$

В силу положительной определенности $\dot{W}_i$, $\dot{W}_j$ и выбора c_0 и c_1 функция $\dot{W}_{ij}$ также положительно определенна.

4°. В случаях, когда G_i и G_j соединяет цепочка, например $G_i \to G_{i+1} \to \ldots$ $\ldots \to G_{j-1} \to G_j$ имеется пересечение Ψ_{ij} с $\Psi_{i+1\,j-1}$, являющиеся инвариантным множеством. Поэтому можем построить разбиение единицы, подчиненное Ψ_{ij} и $\Psi_{i+1\,j-1}$ –

$$\{\chi_1, \chi_2\}, \quad \operatorname{supp} \chi_1 \subset \Psi_{ij}, \quad \operatorname{supp} \chi_2 \subset \Psi_{i+1\,j-1},$$

$$\chi_\nu(\Phi(t + \tau, x, t)) = \chi_\nu(x, t), \quad \nu = 1, 2 . \tag{4}$$

Положим

$$V(x, t) = \chi_1(x, t)\, W_{ij}(x, t) + \chi_2(x, t)\, W_{i+1\,j-1}(x, t) .$$

Для нее в силу (4)

$$\dot{V}(x, t) = \chi_1(x, t)\, \dot{W}_{ij}(x, t) + \chi_2(x, t)\, \dot{W}_{i+1\,j-1}(x, t) .$$

Аналогично соединяем Ψ_0 с Ψ_{ij}.

5°. Конечным числом шагов получаем построение искомой функции.

Лемма 3. *Если V является функцией Ляпунова-Красовского, то и W, определенная равенством*

$$W(x, t) = V(\Phi(t + \tau, x, t))$$

при фиксированном $\tau > 0$, является функцией Ляпунова-Красовского, причем по любому (но достаточно малом) $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из $\varrho_G(x, t) > \delta$ следует $W(x, t) - V(x, t) > \varepsilon$.

Доказательство. Так $W(\Phi(t + \vartheta, x, t)) = V(\Phi(t + \tau + \vartheta, x, t))$, то $\dot{W}(x, t) =$ $= \dot{V}(\Phi(t + \tau, x, t))$ и $\dot{W}$ является положительно определенной.

Далее

$$W(x, t) - V(x, t) > \tau \inf\{\dot{V}(\Phi(t + \vartheta, x, t)) : \vartheta \in [0, \tau]\},$$

откуда следует и последнее утверждение.

Лемма 4. *Пусть имеется функция Ляпунова-Красовского V для уравнения* (1) *в области Ω относительно инвариантного множества G. Тогда для каждой точки $(x_0, t_0) \in \Omega \setminus G$ можно найти такую окрестность Θ_0, что $\bar{\Theta}_0 \subset \Omega \setminus G$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $W\colon \Theta_0 \to \mathbb{R}$ такая, что $W \in C^\infty$,*

$\forall(x, t) \in \Theta_0$ $|V(x, t) - W(x, t)| < \varepsilon$ и $|\dot{V}(x, t) - \dot{W}(x, t)| < \varepsilon$, где $\dot{W}$ является производной функции W в силу уравнения (1) и $|D^k W(x, t)| < C_{|k|}$, причем $C_{|k|}$ зависит только от ε, k и $\varrho((x_0, t_0), \partial(\Omega \setminus G))$, но не от t_0.

Доказательство. 1°. Для точки (x_0, t_0) построим трубки интегральных кривых

$$\Theta_0 = \Phi(]t_0 - \tfrac{1}{3}T_0,\ t_0 + \tfrac{1}{3}T_0[,\ U(x_0, \varepsilon_0), t_0)\,,$$

$$\Theta_2 = \Phi(]t_0 - T_0,\ t_0 + T_0[,\ U(x_0, \varepsilon_2), t_0)\,,$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_2$, причем ε_2 и T_0 столь малы, что

$$\varrho(\Theta_2, \partial(\Omega \setminus G)) > \tfrac{1}{2}\varrho((x_0, t_0),\ \partial(\Omega \setminus G))\,.$$

Произвольное $\varepsilon > 0$ выберем столь малым, чтобы $\varepsilon < \frac{1}{2} \inf\{\dot{V}(x, t): (x, t) \in \Theta_2\}$.

Положим

$$V^*(x, t) = \int_{R^n} \chi(x - \xi)\, V(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi\,,$$

$$V_*(x, t) = \int_{R^{n+1}} \chi_*(x - \xi,\ t - \tau)\, \dot{V}(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\,,$$

где

$$\chi \in C^\infty\,, \quad \chi_* \in C^\infty\,, \quad \operatorname{supp}\chi \subset U(0, r_0)\,, \quad \operatorname{supp}\chi_* \subset U(0, r_0)\,,$$

$$\int_{R^n} \chi(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 1\,, \quad \int_{R^{n+1}} \chi_*(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau = 1\,,$$

r_0 столь мало, что

(5) $$\forall x \in U(x_0, r_0)\ |V^*(x, t_0) - V(x, t_0)| < \delta_0\,,$$

(6) $$\forall(x, t) \in \Theta_2 \quad |V_*(x, t) - \dot{V}(x, t)| < \delta_0\,,$$

а $\delta_0 > 0$ в свою очередь удовлетворяет неравенствам

(7) $$\delta_0 < \frac{\varepsilon}{4}\,, \quad \delta_0 < \frac{\varepsilon}{4T_0}\,.$$

Тогда

(8) $$\forall x \in U(x_0, \varepsilon_2)\ |D_1 V^*(x, t_0)| < \Delta^*\,,$$

(9) $$\forall(x, t) \in \Theta_2 \quad |DV_*(x, t)| < \Delta_*\,.$$

Далее положим

(10) $$P^*(x, t) = \int_{R^{n+1}} \chi^*(x - \xi,\ t - \tau)\, P(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\tau\,,$$

где

$$\chi^* \in C^\infty, \quad \operatorname{supp} \chi^* \subset U(0, r), \quad \int_{R^{n+1}} \chi^*(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = 1,$$

а $r > 0$ столь мало, чтобы

$$\forall (x, t) \in \Theta_2 \ |P^*(x, t) - P(x, t)| < \delta, \tag{11}$$

$\delta > 0$ в свою очередь настолько мало, что можно найти такое что

$$\bar{\Theta}_0 \subset \Theta_1^*, \quad \Theta_1^* \subset \Theta_2,$$

где

$$\Theta_1^* = \Phi^*(]t_0 - \tfrac{2}{3}T_0,\ t_0 + \tfrac{2}{3}T_0[,\ U(x_0, \varepsilon_1), t_0),$$

$\varphi^*(\cdot, x, t)$ является решением уравнения $\dot{x} = P^*(x, t)$, $\Phi^*(\tau, x, t) = (\varphi^*(\tau, x, t), \tau)$, и, кроме того,

$$\delta < \frac{3\varepsilon}{4(\Delta^* + T_0 \Delta_*)} \exp(-LT_0), \quad \delta < \frac{\eta}{T_0} \exp(-LT_0), \tag{12}$$

где $\eta > 0$ столь мало, что $\forall (x', t) \in \Theta_2$, $\forall (x'', t) \in \Theta_2$

$$|x' - x''| < \eta \ |\dot{V}(x', t) - \dot{V}(x'', t)| < \frac{\varepsilon}{4T_0} \tag{13}$$

и $\forall x' \in U(x_0, \varepsilon_2)$, $\forall x'' \in U(x_0, \varepsilon_2)$

$$|x' - x''| < \eta \Rightarrow |V(x', t_0) - V(x'', t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{14}$$

Для $(x, t) \in \Theta_0$ положим

$$W(x, t) = V^*(\Phi(t_0, x, t)) + \int_0^{t - t_0} V_*(\Phi^*(t_0 + s, x, t))\, ds. \tag{15}$$

2°. Тогда, используя (11), неравенства $|D_1 P^*(x, t)| \leqq L$, $|t - t_0| < T_0$ и лемму Гронуолла, получаем

$$|D_2 \varphi^*(t_0, x, t)\, P(x, t) + D_3 \varphi^*(t_0, x, t)| < \delta \exp(LT_0), \tag{16}$$

откуда с учетом (8) и (9) имеем

$$|DW(\Phi(t + \cdot, x, t))(\tau) - V_*(\Phi(t + \tau, x, t))| \leqq \delta(\Delta^* + T_0 \Delta_*) \exp(LT_0).$$

Вместе с неравенствами (6), (7) и (12) это дает

$$|\dot{W}(x, t) - \dot{V}(x, t)| < \varepsilon. \tag{17}$$

3°. Далее имеем

$$W(x, t) - V(x, t) = V^*(\Phi^*(t_0, x, t)) - V(\Phi^*(t_0, x, t)) +$$
$$+ V(\Phi^*(t_0, x, t)) - V(\Phi(t_0, x, t)) +$$

$$+ \int_0^{t-t_0} (V_*(\Phi^*(t_0 + s, x, t)) - \dot V(\Phi^*(t_0 + s, x, t)) +$$
$$+ \dot V(\Phi^*(t_0 + s, x, t)) - \dot V(\Phi(t_0 + s, x, t))\, \mathrm{d}s\,.$$

В силу неравенств (12), (13), (14), (5), (6) и (7) получаем

$$|W(x, t) - V(x, t)| < \varepsilon\,.$$

Из неравенства (17) следует положительная определенность $\dot W$ на Θ_0.

4°. Наконец, из определения (15) функции W видно, что ее производные оцениваются через производные функций V^*, V_* и φ^*, а те, в свою очередь, через производные функций χ, χ_*, P^* и χ^*. Производные функций χ, χ_* и χ^* зависят от чисел r_0 и r. Число r_0 зависит от $\delta_0, \varepsilon_2, T_0, \sup\{|V(x, t)\colon (x, t) \in \Theta_2\}$ и $\sup\{\dot V(x, t)\colon (x, t) \in \Theta_2\}$; δ_0 зависит от ε и T_0, $\sup\{\dot V(x, t)\colon (x, t) \in \Theta_2\}$ зависит от $\varrho_G(x_0, t_0)$, ε_2 и T_0, ε_2 и T_0 — от $\varrho((x_0, t_0), \partial(\Omega \setminus G))$, а $\sup\{|V(x, t)|\colon (x, t) \in \Theta_2\}$ не зависит от t_0, поскольку $V(x, t)$ стремится равномерно к $V(G)$ относительно t, когда $\varrho_G(x, t) \to 0$. Наконец, в силу соотношений (12) и равномерной непрерывности P по второму аргументу (13) удовлетворяется также равномерно по t_0. Число r зависит от δ, а последнее от ε и T_0 в силу сказанного равномерно но t_0. Этим доказано последнее утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть имеется непрерывная функция Ляпунова-Красовского $V\colon \Omega \to \to R$. Тогда существует непрерывная функция Ляпунова-Красовского $W\colon \Omega \to R$, которая на $\Omega \setminus G$ принадлежит классу C^∞, и $W(x, t) \to V(G)$ равномерно по t при $\varrho_G(x, t) \to 0$.*

Доказательство. Построим локально конечное покрытие $\{\Theta_i\}$ множества $\Omega \setminus G$ трубками $\Theta_i = \Phi(]t_i - T_i,\ t_i + T_i[,\ U(x_i, r_i), t_i)$, где $T_i \leqq T$. Пусть p_i является числом таких Θ_j, для которых $\Theta_i \cap \Theta_j \neq \Phi$, а $\{\chi_i\}$ — разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{\Theta_i\}$. Выберем аппроксимацию W_i построенную по лемме 4 с таким $\varepsilon_i > 0$, чтобы:

1) $\dot V|_{\theta_i}(x, t) > 2\varepsilon_i$;

2) $|W_j(x, t) - V(x, t)| < \dfrac{\varepsilon_i}{p_i M_j}\ \forall (x, t) \in \Theta_i \cap \Theta_j$,

где $M_j = \sup\{|D\chi_j(\Phi(t+\cdot, x, t))(0)|\colon (x, t) \in \Omega \setminus G\}$;

3) $|\dot W_j(x, t) - \dot V(x, t)| < \varepsilon_i\ \forall (x, t) \in \Theta_i \cap \Theta_j$.

Положим

$$W(x, t) = \Sigma_i \chi_i(x, t)\, W_i(x, t)\,.$$

Тогда для $(x, t) \in \Theta_j$

$$\dot W(x, t) = D\Sigma_i \chi_i(\Phi(t+\cdot, x, t))\, W_i(\Phi(t+\cdot, x, t))(0) =$$

$$= \Sigma_i D\chi_i(\Phi(t+\cdot, x, t))(0)(W_i(x, t) - V(x, t)) +$$
$$+ \Sigma_i \chi_i(x, t)\, DW_i(\Phi(t+\cdot, x, t))(0) >$$
$$> -\Sigma_i D\chi_i(\Phi(t+\cdot, x, t))(0)\,|W_i(x, t) - V(x, t)| + 2\varepsilon_j \geqq$$
$$\geqq -M_i p_j \frac{\varepsilon_j}{M_i p_j} + 2\varepsilon_j = \varepsilon_j .$$

Следовательно функция $\dot{W}$ является положительно определенной на Ω относительно G.

При $\varrho_G(x, t) \to 0$ все $W_i(x, t) \to V(G)$ равномерно относительно t, поэтому и $W(x, t) \to V(G)$ равномерно относительно t.

Теорема. *Если уравнение* (1) *имеет конечное множество замкнутых инвариантных множеств* $G_1, \ldots, G_p$ *и между ними нет циклов и несобственных седел и в окрестности каждого инвариантного множество уравнение* (1) *обладает свойством Красовского, то для уравнения можно построить глобальную функцию Ляпунова-Красовского класса гладкости* C^∞.

Доказательство. 1°. Согласно леммам 1, 3 и 4 строим непрерывную глобальную функцию Ляпунова-Красовского W_0, которая на $\Omega \setminus \bigcup_i G_i$ имеет класс гладкости C^∞.

Используя модифицированную процедуру Курцвейля [7], сглаживаем ее и на $\bigcup_i G_i$.

2°. Возьмем некоторое $q \in N$. Первый раз берем $q = 0$. Положим

$$\psi(x, t) = \int_{-1}^{+1} (W_q(\Phi(t + s, x, t)) - W_q(G_{q+1}))^2 \, \mathrm{d}s .$$

Если $\varphi(t+\cdot, x, t)$ непродолжимо на $[-1, 1]$, то поступаем также как в (2) и (3). Неравенство $\dot{W}_q(x, t) > 0$ равносильно неравенству $\psi(x, t) > (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2$, а равенство $\dot{W}_q(x, t) = 0$ – равенству $\psi(x, t) = 0$.

Положим

$$K(u) = \left\{(x, t)\colon \psi(x, t) > u,\ |t| \leqq \frac{1}{u},\ \varrho_{G_{q+1}}(x, t) \leqq \frac{1}{u}\right\} \tag{18}$$

и построим функцию

$$M_0(u) = \max\left\{\sup\left\{|D^k(W_q(\cdot) - W_q(G_{q+1}))(x, t)|\colon (x, t) \in K(u),\ |k| \leqq \frac{1}{u}\right\}, \frac{1}{u}\right\}$$

при $0 < u \leqq 1$,

$$M_0(u) = (2 - u)\, M_0(1) \quad \text{при} \quad 1 \leqq u \leqq 2, \quad M_0(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \geqq 2 .$$

Тогда $M_0(u) \to +\infty$ при $u \to 0$. Далее положим

$$M_1(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u \leqq 0 \\ \dfrac{1}{M_0(u)} & \text{при} \quad 0 < u < 2 \end{cases}$$

$$M_2(u) = \int_{-\infty}^{2} M_1(s)\,\chi(s - u + 1)\,\mathrm{d}s\,,$$

где $\chi\colon R \to R_+$, $\chi \in C^\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(s)\,\mathrm{d}s = 1$, $\operatorname{supp}\chi \subset [0, 1]$.

Тогда $M_2(u) \leqq M_1(u)$, $u \to 0 \Rightarrow \forall |l| \geqq 0$ $D^l M_2(u) \to 0$ и

$$|D^k W_q(x, t)| < \frac{1}{M_2(u)}$$

при $(x, t) \in K(u)$, $|k| \leqq 1/u$. Еще положим

$$M_3(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2(u)} & \text{при} \quad 0 < u < 2 \\ 0 & \text{при} \quad u \geqq 2 \end{cases}$$

и, наконец,

$$\mu_q(u) = \int_0^{+\infty} M_3(s)\,\chi(s - u)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 M_3(u + s)\,\chi(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

(19) $$\mu_q(u) \geqq M_3(u) \geqq M_0(u) \geqq |D^k W_q(x, t)|$$

при

$$(x, t) \in K(u)\,, \quad |k| \geqq \frac{1}{u}\,,$$

в окрестности $u = 0$ для всех l

(20) $$|D^l \mu_q(u)| \leqq \left| \int_0^1 D^l M_3(u + s)\,\chi(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqq c_l\,\mu_q^{l+1}(u)$$

с некоторой постоянной c_l. Когда $u \to 3$, то $D^l\,\mu_q(u) \to 0$.

Строим функцию

$$V(x, t) = \begin{cases} (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))\exp\left(-\mu_q((W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2)\right) + W_q(G_{q+1})\,, \\ \text{если} \quad 0 < (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 < 2\,, \\ W_q(G_{q+1})\,, \quad \text{если} \quad W_q(x, t) = W_q(G_{q+1})\,, \\ W_q(x, t)\,, \quad \text{если} \quad (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 \geqq 2\,. \end{cases}$$

Так как $(x, t) \in K((W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2)$ при

$$(W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 \leqq \min\left\{\frac{1}{|t|}, \frac{1}{\varrho_{G_{q+1}}(x, t)}\right\},$$

то согласно (18) и (19)

$$|D^k(W_q(\cdot) - W_q(G_{q+1}))(x, t)| \leqq \mu_q((W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2) \tag{21}$$

при

$$\sup\{|k|, |t|, \varrho_{G_{q+1}}(x, t)\} \leqq (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 .$$

Согласно лемме 3 при $\varrho_{G_{q+1}}(x, t) \to 0$ и $W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}) \to 0$, поэтому неравенство (21) справедливо при любом k, если только $\varrho_{G_{q+1}}(x, t)$ достаточно мало.

Так как при $|k| \geqq 1$ справедливо равенство

$$D^k V(x, t) = \Sigma_{|l|+|m|=|k|} \alpha_{lm} D^l W_q(x, t)\, D_k^m \exp(-\mu_q((W_q(\cdot) - W_q(G_{q+1}))^2))(x, t),$$

то с учетом (20) имеем оценку

$$|D^k V(x, t)| \leqq C\mu_q^N((W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2) \exp(-\mu_q((W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2))$$

для тех (x, t), для которых

$$(W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 \leqq \sup\left\{\frac{1}{|k|}, \frac{1}{|t|}, \frac{1}{\varrho_{G_{q+1}}(x, t)}\right\}$$

с некоторыми постоянными C и N, зависящими от k, но не от (x, t). Поэтому с $\varrho_{G_{q+1}}(x, t) \to 0$ и $|D^k V(x, t)| \to 0$. Это показывает, что из $W_q \in C^\infty$ на $\Omega \setminus \bigcup_{i \geqq q+1} G_i$ следует, что $V \in C^\infty$ на $\Omega \setminus \bigcup_{i \geqq q+2} G_i$.

Из определения функции V видно, что

$$\dot V(x, t) = \begin{cases} \dot W_q(x, t)(1 + 2(W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 D\mu_q((W_q(x, t) - \\ - W_q(G_{q+1}))^2) \exp(-\mu_q((W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2)), \\ \text{если} \quad 0 < (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 < 2 \\ \dot W_q(x, t), \quad \text{если} \quad (W_q(x, t) - W_q(G_{q+1}))^2 \notin \,]0, 3[\ , \end{cases}$$

т.е. функция $\dot V$ положительна на

$$\Omega \setminus \bigcup_i G_i \subset W_q^{-1}(W_q(G_{q+1})) .$$

3°. Как из функции W_0 мы в пп. 1° и 2° получили функцию V, так из функции W_τ, определенной равенством $W_\tau(x, t) = W_0(\Phi(t + \tau, x, t))$ строим функцию V_τ с некоторым фиксированным τ.

Далее полагаем

$$W_{q+1}(x, t) = (V_{-\tau}(x, t) + V_\tau(x, t))/2 .$$

В силу леммы 3 функция $\dot W_{q+1}$ уже положительно определенна на Ω относительно $\bigcup_i G_i$.

4°. Если еще есть G_{q+2}, то повторяем построения пп. 2° и 3°, увеличив на единицу q. Процесс повторяем, пока не исчерпана все множество $\{G_1, \ldots, G_p\}$.

Литература

[1] *А. Я. Каневский:* Энергетические функции для некоторых неавтономных дифференциальных уравнений. Латв. мат. ежегодник *23* (1979), 61—67.

[2] *А. Я. Каневский:* Обобщение некоторыцх теорем Н. Н. Красовского. Латв. мат. ежегодник *23* (1979), 68—72.

[3] *А. Я. Каневский:* О функциях Ляпунова-Красовского. Латв. мат. ежегодник *24* (1980), 83—91.

[4] *А. Я. Каневский:* Существование функций Ляпунова-Красовского в окрестности некоторого множества для неавтономного уравнения. Дифф. уравн. *17* (1981), 796—804.

[5] *В. В. Немыцкий:* Топологическая классификация особых точек и обобщенные функции Ляпунова. Дифф. уравн. (1967), 359—370.

[6] *Н. Н. Красовский:* Некоторае задачи об устойчивости движения. М., Наука (1959), 212.

[7] *Я. Курцвейль:* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехослов. мат. ж. *6* (*81*) (1956), 217—259, 455—473.

Адрес автора: Институт физики АН ЛССР, Саласпилс, 229021 Рига, СССР.