Zbyněk Nádeník

Die Ungleichungen für die Oberfläche, das Integral der mittleren Krümmung und die Breite der konvexen Körper

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 133--145

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108151`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

DIE UNGLEICHUNGEN FÜR DIE OBERFLÄCHE, DAS INTEGRAL DER MITTLEREN KRÜMMUNG UND DIE BREITE DER KONVEXEN KÖRPER

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 30. Dezember 1965)

Für die Oberfläche O und das Integral der mittleren Krümmung M eines konvexen Körpers $\mathscr{K}$ gilt die wohlbekannte MINKOWSKIsche Ungleichung

(1) $$M^2 - 4\pi O \geqq 0 .$$

Ist für irgendeinen Wert von x

(2) $$-O + 2xM - 4\pi x^2 \geqq 0 ,$$

so können wir die lineare Ungleichung (2) für eine Verschärfung der quadratischen Ungleichung (1) halten; denn aus (2) folgt $M^2 - 4\pi O \geqq (M - 4\pi x)^2$. Deshalb war die Ungleichung (2) der Gegenstand der oftmaligen Untersuchungen.

T. BONNESEN ([3], S. 176) hat die erste Ungleichung von der Form (2) hergeleitet. Er hat festgestellt, dass für einen Rotationskörper mit dem Äquatorradius a die Ungleichung (2) für $x = a$ gültig ist; die Gleichheit gilt nur für die Kugel oder für den Kugelzylinder.

A. DINGHAS ([6], S. 16) hat dieses Ergebnis verallgemeinert: Ist a^* der Äquatorradius eines konvexen Körpers, welcher aus dem Körper $\mathscr{K}$ durch die Versteifung von BLASCHKE (s. [2], S. 137; [6], S. 12–14 und [5], S. 73–74) entstanden ist, so gilt für den Körper $\mathscr{K}$ die Ungleichung (2) für $x = a^*$. T. Bonnesen ([4], S. 105) hat die Ungleichung (2) auch für andere x bewiesen. Es seien r_σ und R_σ der innere und der äussere Radius eines Minimalkreisringes der orthogonalen Projektion des Körpers $\mathscr{K}$ auf eine zur Richtung σ senkrechte Ebene. Wenn σ alle möglichen Richtungen durchläuft, so ist $\max r_\sigma \leqq \min R_\sigma$ und die Ungleichung (2) gilt auch für solche x, welche die Ungleichungen $\max r_\sigma \leqq x \leqq \min R_\sigma$ erfüllen.

Das zitierte Ergebnis aus [3] führt natürlich zur Frage, ob die Ungleichung (2) auch dann gültig ist, wenn $2x$ die Breite des Körpers $\mathscr{K}$ in einer beliebigen Richtung bedeutet. Die Antwort ist negativ, wie schon dieses sehr spezielle Beispiel zeigt: Ist $\mathscr{K}$ ein Rotationszylinder von der Höhe h und vom Radius r, so ist $O = 2\pi r(r + h)$, $M = \pi(h + \pi r)$ und für genügend kleines h ist die Ungleichung (2) für $2x = h$ gewiss nicht erfüllt.

Im folgenden werden wir uns mit den Ungleichungen von der Form $-O + BM - \pi B^2 + (.) \geqq 0$ beschäftigen; B ist dabei die Breite des Körpers $\mathscr{K}$ in gewisser Richtung s und $(.)$ bedeutet eine nichtnegative Grösse, die wir sofort definieren werden.

Wir konstruieren eine solche Kugel $\mathscr{L}$, dass die Körper $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ die gemeinsamen zur Richtung s senkrechten Stützebenen besitzen. Weiter sei Ω die mit $\mathscr{L}$ konzentrische Einheitskugelfläche und λ und $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ ihre geographischen Koordinaten, deren Äquatorebene ϱ zur Richtung s senkrecht steht (ϱ ist also die Symmetrieebene der gemeinsamen Stützebenen der Körper $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$).

Es sei $h(\lambda, \varphi)$ die auf Ω definierte Stützfunktion des Körpers $\mathscr{K}$; also

$$h(\lambda, 0) = h(\lambda, \pi) = \tfrac{1}{2}B \,. \tag{3}$$

Jedem Punkt von Ω mit den Koordinaten λ, φ gehören auf bekannte Weise die parallelen Stützebenen von $\mathscr{L}$ und $\mathscr{K}$, welche die Ebene ϱ in einem Streifen der Breite $|b(\lambda, \varphi)|$ durchschneiden; dabei

$$b(\lambda, \varphi) = \left[h(\lambda, \varphi) - \tfrac{1}{2}B\right] : \sin \varphi \,. \tag{4}$$

Die Funktion (4) ist in der Nähe der Pole $\varphi = 0, \pi$ beschränkt (s. Abschn. 1), und folglich das Integral

$$I(\mathscr{K}) = \int_\Omega b^2(\lambda, \varphi)\, \mathrm{d}\omega \tag{5}$$

ist vorhanden; $\mathrm{d}\omega$ bedeutet das Flächenelement von Ω.

I. *Wir setzen*

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h(\lambda, \varphi) \cos \lambda \,\mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\varphi \,, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h(\lambda, \varphi) \sin \lambda \,\mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\varphi \,. \tag{6}$$

Wenn wir den Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{L}$ in den Punkt mit der auf Ω definierten Stützfunktion $(\alpha \cos \lambda + \beta \sin \lambda) \sin \varphi$ verschieben, so erreicht das Integral (5) sein Minimum

$$J(\mathscr{K}) = \min I(\mathscr{K}) = I(\mathscr{K}) - 2\pi(\alpha^2 + \beta^2) \,. \tag{7}$$

Ist speziell $\mathscr{K}$ ein Rotationskörper, dessen Rotationsachse zur Richtung s parallel steht, so nimmt das Integral (5) sein Minimum für den auf der Achse von $\mathscr{K}$ liegenden Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{L}$ an.

Wir bemerken ausdrücklich, dass das Extremum (7) von der Wahl des Mittelpunktes der Kugel $\mathscr{L}$ unabhängig ist. Für festes φ stellen die inneren Integrale in (6) die Koordinaten des Krümmungsschwerpunktes[1]) des Randes des konvexen ebenen

[1]) Unter dem Krümmungsschwerpunkt einer zweimal stetig differenzierbaren ebenen konvexen geschlossenen Kurve versteht man — nach J. Steiner — den Punkt, dessen Koordinaten z. B. in [9], (1,1) angeführt sind. Man kann sie in der Form (1,5) und (2,1) aus [9] schreiben und so den Krümmungsschwerpunkt für beliebige konvexe geschlossene Kurve definieren.

Bereiches mit der ebenen Stützfunktion $h(\lambda, \varphi)$ dar; daraus folgt die evidente geometrische Interpretation der Konstanten (6), welche — auf die im Satz I angeführte Weise — einen Punkt bestimmen, der freilich ebenso gegenüber der Wahl des Mittelpunktes der Kugel $\mathscr{L}$ (oder der Kugelfläche Ω) invariant ist.

Mit Hilfe des Extremwertes (7) sind wir imstande die erste Ungleichung der angemeldeten Gattung zu formulieren:

II. *Für den konvexen Körper $\mathscr{K}$ gilt die Ungleichung*

$$-O + BM - \pi B^2 + \tfrac{1}{2}J(\mathscr{K}) \geqq 0\,, \tag{8}$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann eintritt, wenn $\mathscr{K}$ die kleinste konvexe Hülle eines Torus ist, dessen Rotationsachse zur Richtung s parallel verläuft und dessen Meridiankreis (sein Durchschnitt mit der Rotationsachse ist hier nicht ausgeschlossen) *den Durchmesser B besitzt.*

Wir bezeichnen nun mit $\mathscr{K}^*$ den Körper, welcher aus dem Körper $\mathscr{K}$ durch die Versteifung in bezug auf die durch den Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{L}$ parallel zur Richtung s gehende Achse entsteht.

III. *Für den konvexen Körper $\mathscr{K}$ gilt die Ungleichung*

$$-O + BM - \pi B^2 + \tfrac{1}{2}\,J(\mathscr{K}^*) \geqq 0 \tag{9}$$

mit denselben Extremalkörpern wie im Satz II.

Der Satz II folgt aus dem Satz III auf Grund der Relation (7) und folgender Behauptung:

IV. *Es ist $I(\mathscr{K}) \geqq J(\mathscr{K}^*)$ und die Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $\mathscr{K}$ ein Rotationskörper mit der zur Richtung s parallelen Rotationsachse ist.*

Der folgende Abschn. 1 enthält den Beweis des Satzes I und der Abschn. 2 den Beweis eines Hilfssatzes. Im Abschn. 3 werden die Formeln für die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung hergeleitet. Im Abschn. 4 wird der Satz II für die Rotationskörper bewiesen und auf seinem Grund wird dann der Satz III gefolgert. Der Absch. 5 enthält die Verifikation der Behauptung IV. Die Abschn. 6 und 7 behandeln die Verallgemeinerungen der Ungleichungen (9) und (8) für zwei Körper.

1. Wir beginnen mit der Diskusion des Integrals (5); unser Ausgangspunkt ist dabei die in der Einleitung vor dem Satz I beschriebene Konstruktion. Mittels der Stützfunktion $h(\lambda, \varphi)$ des Körpers $\mathscr{K}$ definieren wir für alle λ und ψ die Funktion $\chi(\lambda, \psi)$ folgendermassen:

$$\begin{aligned} &\psi \equiv \varphi (\mathrm{mod}\ 2\pi) \Rightarrow \chi(\lambda, \psi) = h(\lambda, \varphi)\,, \\ &\psi \equiv 2\pi - \varphi (\mathrm{mod}\ 2\pi) \Rightarrow \chi(\lambda, \psi) = h(\lambda + \pi, \varphi)\,. \end{aligned} \tag{1,1}$$

Die Funktion $\chi(\lambda, \psi)$ stellt für jedes $\lambda =$ konst. die Stützfunktion der Projektion des

Körpers $\mathscr{K}$ auf gewisse zur Richtung s senkrechte Ebene dar. Das bedeutet (s. [1], S. 230–231), dass die symmetrische partielle Ableitung

$$\frac{\delta \chi}{\delta \psi} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\chi(\lambda, \psi + \varepsilon) - \chi(\lambda, \psi - \varepsilon)}{2\varepsilon} \tag{1,2}$$

durchwegs existiert und dass diese Ableitung für festes λ von beschränkter Schwankung auf dem Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ der Variablen ψ ist. Wenden wir – stets für festes λ – auf die Funktion $\chi(\lambda, \psi)$ und die Intervalle $\langle 0, \varphi \rangle \subset \langle 0, \pi)$ und $\langle \varphi, \pi \rangle \subset (0, \pi \rangle$ der Veränderlichen ψ die Analogie des Mittelwertsatzes an (s. [1], S. 231; wiederholt in [10], S. 222), so erhalten wir in Hinsicht auf die beschränkte Schwankung der Ableitung (1,2), dass

$$|\chi(\lambda, \varphi) - \chi(\lambda, 0)| < C\varphi\,, \quad |\chi(\lambda, \varphi) - \chi(\lambda, \pi)| < C(\pi - \varphi)\,, \tag{1,3}$$

wo C gewisse positive Konstante ist. Aus (1,3), (1,1) und (3) folgt die Beschränkung der Funktion (4) in einer Umgebung der Pole $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ und deshalb auch die Existenz des Integrals (5).

In der Ebene ϱ, welche die Entfernung der zur Richtung s senkrechten gemeinsamen Stützebenen der Körper $\mathscr{K}$ und $\mathscr{L}$ halbiert, verschieben wir den Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{L}$ – und folglich auch den Mittelpunkt der Einheitskugelfläche Ω – in den Punkt, welcher auf der ursprünglichen Lage der Kugelfläche Ω die Stützfunktion $(\alpha \cos \lambda + \beta \sin \lambda) \sin \varphi$ besitzt; $\alpha, \beta =$ konst. Auf der neuen Lage der Kugelfläche Ω hat der Körper $\mathscr{K}$ die Stützfunktion $h(\lambda, \varphi) - (\alpha \cos \lambda + \beta \sin \lambda) \sin \varphi$ und dementsprechend das Integral (5) für die neue Lage der Kugel $\mathscr{L}$ ist

$$\begin{aligned} I(\mathscr{K}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[h(\lambda, \varphi) - (\alpha \cos \lambda + \beta \sin \lambda) \sin \varphi - \frac{1}{2}B]^2}{\sin \varphi} \, d\varphi \, d\lambda = \\ &= 2\pi(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h(\lambda, \varphi) \cos \lambda \, d\varphi \, d\lambda - \\ &- 2\beta \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h(\lambda, \varphi) \sin \lambda \, d\varphi \, d\lambda + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[h(\lambda, \varphi) - \frac{1}{2}B]^2}{\sin \varphi} \, d\varphi \, d\lambda\,. \end{aligned} \tag{1,4}$$

Halten wir α, β für veränderliche Parameter, so ist (1,4) eine quadratische Funktion und man bestätigt mühelos, dass sie für α, β aus (6) ihr Minimum (7) annimmt.

Ist $\mathscr{K}$ ein Rotationskörper mit der zur Richtung s parallelen Rotationsachse, so besitzt er die Stützfunktion

$$h(\lambda, \varphi) = h(\varphi) + (a \cos \lambda + b \sin \lambda) \sin \varphi\,, \tag{1,5}$$

wo $h(\varphi)$ gewisse Funktion nur der Variablen φ ist und $(a \cos \lambda + b \sin \lambda) \sin \varphi$ die Stützfunktion des Durchschnittes der Ebene ϱ und der Rotationsachse des Körpers $\mathscr{K}$

darstellt; diese Stützfunktion ist – ebenso wie (1,5) – freilich auf Ω definiert. Für die Funktion (1,5) ergibt sich aus (6), dass $\alpha = a$, $\beta = b$; folglich erreicht für den betrachteten Rotationskörper $\mathscr{K}$ das Integral (5) das Minimum, sobald der Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{L}$ auf der Rotationsachse des Körpers $\mathscr{K}$ liegt.

2. In diesem Abschn. modifizieren wir das Verfahren von A. Dinghas aus [6], S. 10; besonders benutzen wir die symmetrische Ableitung.

Es sei $h(\psi)$ stetige gerade Funktion, welche die Periode 2π besitzt. Weiter sei

$$h(0) = h(\pi) = \tfrac{1}{2}B . \tag{2,1}$$

Wir nehmen an, dass die Funktion $h(\psi)$ durchwegs mit der symmetrischen Ableitung $h^{\cdot}(\psi)$ versehen ist und diese auf dem Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ von beschränkter Schwankung ist. Dann

(2,2)

$$\int_0^\pi h^{\cdot 2}(\psi) \sin \psi \, d\psi - 2 \int_0^\pi [h(\psi) - \tfrac{1}{2}B]^2 \sin \psi \, d\psi + \int_0^\pi \frac{[h(\psi) - \tfrac{1}{2}B]^2}{\sin \psi} \, d\psi \geqq 0$$

und das Gleichheitszeichen gilt in (2,2) dann und nur dann, wenn

$$h(\psi) = \tfrac{1}{2}B + c|\sin \psi| , \tag{2,3}$$

wo c eine beliebige Konstante ist.

Wir setzen

$$g(\psi) = h(\psi) - \tfrac{1}{2}B . \tag{2,4}$$

Ähnlich wie im Abschn. 1 folgt auch jetzt aus dem Analogon zum Mittelwertsatz die Beschränkung der Funktion $g(\psi) : \sin \psi$, und folglich auch die Existenz des dritten Integrals links in (2,2) und der Integrale aus der nachstehenden Rechnung, in der wir noch von dem leicht verifizierbaren Seitenstück zur partiellen Integration Gebrauch machen (vgl. [1], S. 233 oder [10], (b) in Abschn. 1):

$$\int_0^\pi [g^{\cdot}(\psi) - g(\psi) \operatorname{cotg} \psi]^2 \sin \psi \, d\psi = \tag{2,5}$$

$$= \int_0^\pi g^{\cdot 2}(\psi) \sin \psi \, d\psi + \int_0^\pi g^2(\psi) \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \, d\psi - \int_0^\pi [g^2(\psi)]^{\cdot} \cos \psi \, d\psi =$$

$$= \int_0^\pi g^{\cdot 2}(\psi) \sin \psi \, d\psi + \int_0^\pi g^2(\psi) \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \, d\psi - \int_0^\pi g^2(\psi) \sin \psi \, d\psi =$$

$$= \int_0^\pi g^{\cdot 2}(\psi) \sin \psi \, d\psi - 2\int_0^\pi g^2(\psi) \sin \psi \, d\psi + \int_0^\pi \frac{g^2(\psi)}{\sin \psi} \, d\psi .$$

Setzen wir aus (2,4) in die letzte Zeile in (2,5) ein, so erhalten wir die Ungleichung

(2,2), in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $\psi \in (0, \pi) \Rightarrow \Rightarrow g^{\cdot}(\psi) - g(\psi) \operatorname{cotg} \psi = 0$, d. h. wenn die symmetrische Ableitung von $g(\psi) : \sin \psi$ verschwindet. Dies ist aber nach dem Analogon zum Mittelwertsatz nur dann der Fall, dass $\psi \in (0, \pi) \Rightarrow g(\psi) : \sin \psi =$ konst. Wegen (2,4) ergibt sich daraus (2,3).

3. In diesem Abschn. bedeutet $\mathscr{K}$ stets einen Rotationskörper. Es sei $h(\varphi)$, $\varphi \in \in \langle 0, \pi \rangle$, seine auf der Einheitskugelfläche mit dem Mittelpunkt auf der Rotationsachse von $\mathscr{K}$ definierte Stützfunktion. Es gibt einzige gerade Funktion, welche die Periode 2π besitzt und welche im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ mit $h(\varphi)$ identisch ist; wir bezeichnen sie mit $h(\psi)$. Diese Funktion stellt die ebene Stützfunktion des ebenen Bereiches dar, welcher der Schnitt des Körpers $\mathscr{K}$ und der durch seine Achse gehenden Ebene ist. Das bedeutet (s. [1], S. 230–231), dass die Funktion $h(\psi)$ stetig ist und dass sie durchwegs die symmetrische Ableitung $h^{\cdot}(\psi)$, welche auf dem Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$ von beschränkter Schwankung ist, besitzt.

Für das Volumen V, die Oberfläche O und das Integral der mittleren Krümmung M gelten dann die Formeln

$$(3,1) \qquad V = \pi \int_0^\pi [\tfrac{2}{3} h^3(\psi) \sin \psi - h(\psi)\, h^{\cdot 2}(\psi) \sin \psi - \tfrac{1}{3} h^{\cdot 3}(\psi) \cos \psi] \,\mathrm{d}\psi \,,$$

$$(3,2) \qquad O = \pi \int_0^\pi [2h^2(\psi) - h^{\cdot 2}(\psi)] \sin \psi \,\mathrm{d}\psi \,, \quad M = 2\pi \int_0^\pi h(\psi) \sin \psi \,\mathrm{d}\psi \,.$$

Im Falle, dass die Stützfunktion der Meridiankurve des Körpers $\mathscr{K}$ (im gewöhnlichen Sinn) stetig differenzierbar ist, hat diese Formeln (3,1) und (3,2) T. Bonnesen ([3], S. 136; s. auch [7], S. 9) gefunden. Die allgemeine Formel (3,1) werden wir – ähnlich wie in [3] – unter Verwendung der Guldinschen Regeln herleiten. Die Formeln (3,2) ergeben sich aus (3,1) mit Hilfe der Steinerschen Formel durch den wohlbekannten Übergang zu den Parallelkörpern.

Dem konvexen Bereich, welcher der Schnitt des Körpers $\mathscr{K}$ und seiner Meridianebene ist, umschreiben wir ein in bezug auf die Rotationsachse von $\mathscr{K}$ symmetrisches Polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$; die Indizes nehmen wir mod n und die Seite $A_k A_{k+1}$ orientieren wir von A_k zu A_{k+1}. Wir denken uns – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – den Mittelpunkt S der Einheitskugelfläche, auf der die Stützfunktion $h(\varphi)$ des Körpers $\mathscr{K}$ erklärt ist, zwischen den Polen von $\mathscr{K}$. Für die Entfernung h_k des Mittelpunktes S von der Geraden $A_{k-1}A_k$ gilt dann $h_k = h(\psi_k)$, wo ψ_k ein gewisser Wert der Variablen ψ ist; dabei sind die Ungleichungen $0 \leqq \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_n < 2\pi$ erreichbar. Wir setzen noch $\Delta\psi_k = \psi_{k+1} - \psi_k$. Den Fusspunkt des auf die Gerade $A_{k-1}A_k$ vom Mittelpunkt S gefällten Lotes bezeichnen wir mit B_k und die Projektion des Punktes B_k auf die Rotationsachse mit B'_k.

Es ist leicht einzusehen (vgl. [1], S. 217), dass

$$A_k B_k = \frac{h_k \cos \Delta\psi_k - h_{k+1}}{\sin \Delta\psi_k} \,, \quad A_k B_{k+1} = \frac{h_k - h_{k+1} \cos \Delta\psi_k}{\sin \Delta\psi_k} \,;$$

benützen wir also das schon mehrfach zitierte Seitenstück zum Mittelwertsatz, so erhalten wir

$$(3,3) \qquad A_kB_k = -h_k^{\cdot} + (1)\,, \quad A_kB_{k+1} = -h_k^{\cdot} + (1)\,,$$

wo (m) die übliche Bedeutung hat und $h_k^{\cdot} = (h_{k+1} - h_k) : \Delta\psi_k$ eine solche Zahl ist, dass

$$(3,4) \qquad \inf_{\psi\in\langle\psi_k,\psi_{k+1}\rangle} h^{\cdot}(\psi) \leqq h_k^{\cdot} \leqq \sup_{\psi\in\langle\psi_k,\psi_{k+1}\rangle} h^{\cdot}(\psi)\,.$$

Auf ähnliche Weise verifizieren wir (wir unterdrücken begreiflich die Diskusion der Spezialfälle bei den Polen des Körpers $\mathscr{K}$), dass der Flächeninhalt des Trapezes $B_k'B_kB_{k+1}B_{k+1}'$ ist

$$(3,5) \qquad \tfrac{1}{2}(h_k \cos\psi_k - h_{k+1}\cos\psi_{k+1})(h_k \sin\psi_k + h_{k+1}\sin\psi_{k+1}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}h_k(h_k \sin\psi_k - h_k^{\cdot}\cos\psi_k)\sin\psi_k\Delta\psi_k + (2)$$

und dass die Entfernung der Rotationsachse vom Schwerpunkt des Trapezes $B_k'B_kB_{k+1}B_{k+1}'$ bzw. des Dreieckes $A_kB_kB_{k+1}$ ist

$$(3,6) \qquad \tfrac{1}{2}(h_k \sin\psi_k + h_{k+1}\sin\psi_{k+1}) = h_k \sin\psi_k + (1)$$

bzw.

$$(3,7) \qquad \frac{1}{3}\left(h_{k+1}\sin\psi_{k+1} + 2h_k\sin\psi_k - \frac{h_k\cos\Delta\psi_k - h_{k+1}}{\sin\Delta\psi_k}\cos\psi_k\right) =$$
$$= h_k\sin\psi_k + \tfrac{1}{3}h_k^{\cdot}\cos\psi_k + (1)\,.$$

Das Volumen des konvexen Körpers, welcher durch das Drehen des Polygons $A_1A_2\ldots A_n$ um die Rotationsachse des Körpers $\mathscr{K}$ entsteht, hat folglich nach den Guldinschen Regeln und nach (3,3), (3,5)–(3,7) diesen Hauptteil:

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[h_k^2(h_k\sin\psi_k - h_k^{\cdot}\cos\psi_k)\sin^2\psi_k - h_k^{\cdot 2}(h_k\sin\psi_k + \tfrac{1}{3}h_k^{\cdot}\cos\psi_k)\right]\Delta\psi_k\,.$$

In Hinsicht auf (3,4) erhalten wir aus diesem Ergebnis folgende Formel für das Volumen V des Körpers $\mathscr{K}$:

$$(3,8) \qquad V = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\left[h^3(\psi)\sin^3\psi - h^2(\psi)\,h^{\cdot}(\psi)\cos\psi\sin^2\psi -\right.$$
$$\left. - h(\psi)\,h^{\cdot 2}(\psi)\sin\psi - \tfrac{1}{3}h^{\cdot 3}(\psi)\cos\psi\right]\mathrm{d}\psi\,.$$

Benutzen wir die einfache Analogie der partiellen Integration und betrachten wir die Eigenschaften der Funktion $h(\psi)$, so gewinnen wir aus (3,8) sofort (3,1).

4. Wir kehren zur Konstruktion des Integrals (5) zurück, und zwar für den Rotationskörper $\mathscr{K}$ mit der zur Richtung s parallelen Achse; die Breite B ist dann die Entfernung der Pole des Körpers $\mathscr{K}$ (d. h. der Durchschnitte der Achse und der Berandung von $\mathscr{K}$). Den Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{S}$ wählen wir in dem Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten in den Polen des Körpers $\mathscr{K}$. Für die (auf der mit $\mathscr{S}$ konzentrischen Einheitskugelfläche Ω definierte) Stützfunktion $h(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, des Körpers $\mathscr{K}$ gilt dann $h(0) = h(\pi) = \frac{1}{2}B$ und folglich die gerade Funktion $h(\psi)$, welche die Periode 2π besitzt und im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ mit $h(\varphi)$ identisch ist, erfüllt alle Voraussetzungen des Hilfssatzes aus dem Abschn. 2 (s. auch Anfang des Abschn. 3). Deshalb existiert das Integral $\int_0^\pi [h(\psi) - \frac{1}{2}B]^2 : \sin \psi \, d\psi$, welches in unserem Fall nach (4) und nach dem Satz I dem Minimum $J(\mathscr{K})$ des Integrals (5) gleich ist. Aus den Formeln (3,2) und aus der Ungleichung (2,2) folgt dann unmittelbar die Ungleichung (8) aus dem Satz II und die Bedingung (2,3) führt zur Bestimmung der zugehörigen extremalen Rotationskörper.

Es sei jetzt $\mathscr{K}$ ein beliebiger konvexer Körper mit der Breite B in der Richtung s. Wir versteifen ihn in bezug auf die zur Richtung s parallele Achse und wir erhalten so einen konvexen Rotationskörper $\mathscr{K}^*$ mit der zur Richtung s parallelen Rotationsachse und mit der Breite B in der Richtung s. Wir bezeichnen mit O^* und M^* die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung des Körpers $\mathscr{K}^*$. Nach dem soeben für einen Rotationskörper mit der zur Richtung s parallelen Achse und mit der Breite B in der Richtung s bewiesenen Satz II gilt

$$-O^* + BM^* - \pi B + \tfrac{1}{2}J(\mathscr{K}^*) \geqq 0 \, ; \tag{4,1}$$

die Extremalkörper dieser Ungleichung sind uns schon bekannt. Aber

$$M^* = M \, , \quad O^* \geqq O \, , \tag{4,2}$$

wobei in der letzten Relation das Gleichheitszeichen dann und nur dann eintritt, wenn $\mathscr{K}$ ein Rotationskörper mit der zur Versteifungsachse parallelen Rotationsachse ist (s. – einschliesslich der Gleichheitsbedingung – [2], S. 103; [5], S. 73–74; [6], S. 12–14; [8], S. 13). Aus (4,1) und (4,2) mit den ergänzenden Bemerkungen betreffs der Gleichheit ergibt sich schon sofort der Satz III.

5. Wir fangen jetzt den Beweis des Satzes IV an. Für den konvexen Körper $\mathscr{K}$ ist nach (4) und (5)

$$I(\mathscr{K}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[h(\lambda, \varphi) - \frac{1}{2}B]^2}{\sin \varphi} \, d\varphi \, d\lambda \tag{5,1}$$

und für den Körper $\mathscr{K}^*$, der aus dem Körper $\mathscr{K}$ durch die Versteifung in bezug auf die zur Richtung s parallele Achse entsteht, gilt nach dem zweiten Teil des Satzes I

$$J(\mathscr{K}^*) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[h^*(\varphi) - \frac{1}{2}B]^2}{\sin \varphi} \, d\varphi \, d\lambda \, , \tag{5,2}$$

wo

$$h^*(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\lambda, \varphi)\, d\lambda \tag{5,3}$$

die auf der Einheitskugelfläche Ω mit dem Mittelpunkt auf der Rotationsachse des Körpers $\mathscr{K}^*$ definierte Stützfunktion des Körpers $\mathscr{K}^*$ ist.

Unter Zuhilfenahme von (5,1)–(5,3) stellen wir fest, dass

$$I(\mathscr{K}) - J(\mathscr{K}^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} h^2(\lambda, \varphi)\, d\lambda - \left[\int_0^{2\pi} h(\lambda, \varphi)\, d\lambda\right]^2}{\sin \varphi}\, d\varphi .$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist folglich

$$I(\mathscr{K}) - J(\mathscr{K}^*) \geqq 0 \tag{5,4}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann (s. [11], S. 286), wenn für jedes $\varphi =$ konst. $\in (0, \pi)$ auch $h(\lambda, \varphi) =$ konst. ist, d. h. wenn $\mathscr{K}$ ein Rotationskörper ist, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel $\mathscr{S}$ parallel zur Richtung s geht.

Erwägen wir, dass die Relation (5,4) evident auch für $I(\mathscr{K}) = J(\mathscr{K})$ gültig ist, so erhalten wir aus ihr sofort den Satz IV und aus dem Satze III den Satz II.

6. Es seien $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ zwei konvexe Körper mit den Oberflächen O_1 und O_2, mit den Integralen M_1 und M_2 der mittleren Krümmung, mit den Breiten B_1 und B_2 in der Richtung s und mit der gemischten Oberfläche O_{12}.

Die Ungleichung (2) für $x = a^*$ (s. das Zitieren der Arbeit [6] in der Einleitung) ist von A. Dinghas ([8], S. 12) für zwei Körper verallgemeinert worden; er hat nämlich eine Ungleichung hergeleitet, welche formal denselben Aufbau wie die wohlbekannte Frobeniussche Ungleichung für konvexe ebene Bereiche ausweist.

Was die Ungleichung (9) betrifft, so ist auch eine analoge Verallgemeinerung möglich, und zwar auf die zur Blaschkes Herleitung der Frobeniusschen Ungleichung analoge Weise (s. [2], S. 107). Auf die Körper $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ wenden wir die Blaschkesche Versteifung in bezug auf die zur Richtung s parallele Achse an und wir erhalten so die konvexen Rotationskörper $\mathscr{K}_1^*$ und $\mathscr{K}_2^*$. Falls O_1^* und O_2^* ihre Oberflächen und O_{12}^* ihre gemischte Oberfläche bedeuten, so gilt (s. [8], S. 8)

$$-\frac{O_1}{M_1^2} + \frac{2O_{12}}{M_1 M_2} - \frac{O_2}{M_2^2} \geqq -\frac{O_1^*}{M_1^2} + \frac{2O_{12}^*}{M_1 M_2} - \frac{O_2^*}{M_2^2} . \tag{6,1}$$

Wir verschieben die Körper $\mathscr{K}_1^*$ und $\mathscr{K}_2^*$ so, dass die Strecken mit den Endpunkten in den Polen desselben Körpers den gemeinsamen Mittelpunkt S besitzen. Es sei nun $h_i^*(\varphi)$ [$\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$; $i = 1, 2$] die auf der Einheitskugelfläche Ω mit dem Mittelpunkt S erklärte Stützfunktion des Körpers $\mathscr{K}_i^*$ und $h_i^*(\psi)$ die gerade im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$

mit $h_i^*(\varphi)$ identische Funktion von der Periode 2π. Die Funktion

$$h(\psi) = \frac{h_1^*(\psi)}{M_1} - \frac{h_2^*(\psi)}{M_2} \tag{6,2}$$

erfüllt alle Voraussetzungen des Hilfssatzes aus dem Abschn. 2 und weil das Integral der mittleren Krümmung gegenüber der Versteifung invariant bleibt, so ist

$$\int_0^\pi h(\psi) \sin \psi \, d\psi = 0 . \tag{6,3}$$

Das Einsetzen aus (6,2) in die Ungleichung (2,2), in der nach (6,2) und (2,1) jetzt $B = B_1/M_1 - B_2/M_2$ zu schreiben ist, und die Anwendung der Formeln (3,2) auf die Körper $\mathscr{K}_1^*$ und $\mathscr{K}_2^*$ führen nach (6,3) und (6,1) zur Ungleichung

$$\begin{aligned} & -\frac{O_1}{M_1^2} + \frac{2O_{12}}{M_1 M_2} - \frac{O_2}{M_2^2} + \\ & + \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{b_1^*(\varphi)}{M_1} - \frac{b_2^*(\varphi)}{M_2}\right]^2 d\omega \geqq \pi \,.\left(\frac{B_1}{M_1} - \frac{B_2}{M_2}\right)^2 ; \end{aligned} \tag{6,4}$$

hierin haben die Funktionen $b_i^*(\varphi) = \left[h_i^*(\varphi) - \frac{1}{2}B_i\right] : \sin \varphi$ für die Körper $\mathscr{K}_i^*$ eine analoge Bedeutung wie die Funktion (4) für den Körper $\mathscr{K}$ in der Einleitung ($i = 1, 2$).

Ist der Körper $\mathscr{K}_2$ die Einheitskugel, so ist $O_2 = 4\pi$, $O_{12} = M_1$, $M_2 = 4\pi$, $B_2 = 2$, $b_2^*(\varphi) = 0$ und weil nach (5,2) nun $J(\mathscr{K}_1^*) = \int_\Omega b_1^{*2}(\varphi)\, d\omega$, so gewinnen wir aus der Ungleichung (6,4) zurück die Ungleichung (9).

Die Bestimmung der Extremalkörper der Ungleichung (6,4) ist nach (6,2) und (2,3) ganz evident (vgl. [10], S. 224).

7. Es sei $f(\lambda, \varphi)$, $\lambda \in \langle 0, 2\pi)$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ eine auf der Einheitskugelfläche Ω erklärte Funktion; wir nehmen an, dass sie stetig differenzierbar ist, dass $f(\lambda, 0) = f(\lambda, \pi)$ und dass ihr Mittelwert verschwindet:

$$\int_\Omega f(\lambda, \varphi)\, d\omega = 0 . \tag{7,1}$$

Wir bezeichnen noch mit

$$\Delta_1(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2 \tag{7,2}$$

den ersten Beltramischen Differentialoperator von f in bezug auf Ω.

Das zum Abschn. 2 analoge Verfahren führt zu dieser Feststellung: Für die Funktion

$$l(\lambda, \varphi) = f(\lambda, \varphi) - \tfrac{1}{2}B \, ; \quad \tfrac{1}{2}B = f(\lambda, 0) = f(\lambda, \pi) = \text{konst.} \tag{7,3}$$

gilt die Identität, welche wir erhalten, wenn wir in (2,5) in der ersten und letzten Zeile $l(\lambda, \varphi)$ statt $g(\psi)$ und $\partial l(\lambda, \varphi)/\partial\varphi$ statt $g'(\psi)$ und freilich φ statt ψ schreiben. Integrieren wir die beiden Seiten dieser Identität in bezug auf λ im Intervall $\langle 0, 2\pi\rangle$ und addieren wir zu den beiden Seiten das Integral $\int_\Omega [(\sin^{-1}\varphi)\, \partial f(\lambda, \varphi)/\partial\lambda]^2 \, d\omega$, wo $d\omega$ das Flächenelement von Ω bedeutet, so erhalten wir – mit Berücksichtigung von (7,1) und (7,2) – die Identität

$$(7,4) \qquad \int_\Omega [\Delta_1 f(\lambda, \varphi) - 2f^2(\lambda, \varphi)] \, d\omega - 2\pi B^2 + \int_\Omega \left[\frac{f(\lambda, \varphi) - \frac{1}{2}B}{\sin\varphi}\right]^2 d\omega =$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial f}{\partial\varphi} - (f - \tfrac{1}{2}B)\operatorname{cotg}\varphi\right]^2 d\omega + \int_\Omega \left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right]^2 d\omega \,.$$

Aus dieser Beziehung folgt ohne weiters folgende Behauptung, welche eine Ähnlichkeit zum räumlichen Analogon des Lemmas von Wirtinger (s. [2], S. 108) ausweist:

Für die Funktion $f(\lambda, \varphi)$ mit den obenerwähnten Eigenschaften gilt die Ungleichung

$$(7,5) \qquad \int_\Omega [\Delta_1 f(\lambda, \varphi) - 2f^2(\lambda, \varphi)] \, d\omega + \int_\Omega \left[\frac{f(\lambda, \varphi) - \frac{1}{2}B}{\sin\varphi}\right]^2 d\omega \geqq 2\pi B^2 \,,$$

in der das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn

$$(7,6) \qquad f(\lambda, \varphi) = \tfrac{1}{2}B - (2/\pi)\, B \sin\varphi \,.$$

Wir kehren jetzt zu den Körpern $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ aus dem Abschn. 6 zurück. Wir verschieben sie in der Richtung s, bis die zu s senkrechten Stützebenen von $\mathscr{K}_1$ und die zu s senkrechten Stützebenen von $\mathscr{K}_2$ gemeinsame Symmetrieebene besitzen. Die Einheitskugelfläche Ω wählen wir so, dass ihr Äquator in dieser Symmetrieebene liegt und von den auf Ω definierten Stützfunktionen $h_1(\lambda, \varphi)$ und $h_2(\lambda, \varphi)$ der Körper $\mathscr{K}_1$ und $\mathscr{K}_2$ setzen wir voraus, dass sie stetig differenzierbar sind. Es ist dann freilich $h_i(\lambda, 0) = h_i(\lambda, \pi) = \frac{1}{2}B_i = $ konst. $(i = 1, 2)$ und wir dürfen setzen

$$(7,7) \qquad f(\lambda, \varphi) = \frac{h_1(\lambda, \varphi)}{M_1} - \frac{h_2(\lambda, \varphi)}{M_2} \,;$$

weiter ist nach (7,3) und ähnlich zum Abschn. 6

$$(7,8) \qquad B = B_1/M_1 - B_2/M_2 \,.$$

Wir benutzen noch die zu (4) analoge Bezeichnung:

$$(7,9) \qquad b_i(\lambda, \varphi) = \frac{h_i(\lambda, \varphi) - \frac{1}{2}B_i}{\sin\varphi} \quad (i = 1, 2) \,.$$

Setzen wir aus (7,7) und (7,8) in (7,5) ein, so erhalten wir hinsichtlich (7,9), dass

$$(7,10) \qquad -\frac{O_1}{M_1^2} + \frac{2O_{12}}{M_1 M_2} - \frac{O_2}{M_2^2} + \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{b_1(\lambda, \varphi)}{M_1} - \frac{b_2(\lambda, \varphi)}{M_2}\right]^2 d\omega \geqq$$

$$\geqq \pi \left(\frac{B_1}{M_1} - \frac{B_2}{M_2}\right)^2 .$$

Ist $\mathscr{K}_2$ die Einheitskugel, so folgt aus (7,10) die Ungleichung (8).

Ebenfalls die Bestimmung der Extremalkörper für die Ungleichung (7,10) macht – auf Grund von (7,7) und (7,6) – keine Schwierigkeiten (s., ähnlich wie im Abschn. 6, die Bestimmung der Extremalkurven in [10], S. 224; mittels ähnlicher Transformationen bestimmt man unsere Extremalkörper).

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. *23* (1914), 210–234.

[2] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, Berlin 1956.

[3] *T. Bonnesen:* Quelques problèmes isopérimétriques. Acta math. *48* (1926), 123–178.

[4] *T. Bonnesen:* Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. Paris 1929.

[5] *T. Bonnesen* und *W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, New York 1948.

[6] *A. Dinghas:* Zur Theorie der konvexen Körper im n-dimensionalen Raum. Abh. preu. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1939, no 4.

[7] *A. Dinghas:* Elementarer Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ebenda 1939, no. 9.

[8] *A. Dinghas:* Beweis einer Ungleichung für konvexe Körper. Ebenda 1939, no. 11.

[9] *Z. Nádeník:* Zobecnění Guldinových pravidel. Čas. pro pěst. mat. *88* (1963), 311–316.

[10] *Z. Nádeník:* Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 220–225.

[11] *B. Szökefalvi-Nagy:* Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions. Budapest 1964.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).

Výtah

NEROVNOSTI PRO POVRCH, INTEGRÁL STŘEDNÍ KŘIVOSTI A ŠÍŘKU KONVEXNÍHO TĚLESA

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Pro povrch O, integrál střední křivosti M a šířku B konvexního tělesa jsou odvozeny (včetně zobecnění a zostření v nerovnosti Frobeniova typu) nerovnosti tvaru $-O + BM - \pi B^2 + (.) \geqq 0$, kde $(.)$ jsou jisté positivní funkcionály, které lze jednoduše geometricky interpretovat. Extremálními tělesy jsou konvexní obaly torů.

Резюме

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЛОЩАДИ, ИНТЕГРАЛА СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ И ШИРОТЫ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК, (Zbyněk Nádeník), Прага

Для площади O, интеграла средней кривизны M и широты B выпуклого тела выведены (включительно обобщения и усиления типа Фробения) неравенства $-O + BM - \pi B^2 + (.) \geqq 0$, где $(.)$ — определенные положительные функционалы, которые допускают простую геометрическую интерпретацию. Экстремальные тела — выпуклые оболочки торов.