Časopis pro pěstování matematiky

Oldřich Dvořák

Über schlichte Funktionen. I.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 162--192

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108150`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ÜBER SCHLICHTE FUNKTIONEN I

OLDŘICH DVOŘÁK, Praha

(Eingegangen am 15. Januar 1966)

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit dem Koeffizientenproblem einer regulären, schlichten, normierten Funktion im Einheitskreis $|z| < 1$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \; f(0) = 0 \, , \; f'(0) = 1, \; |z| < 1 \, .$$

Der Funktion $f(z)$ schreibe ich eine gewisse Nebenbedingung vor, aus welcher die sogenannte Bieberbachsche Vermutung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$ folgt und dann untersuche ich, wie weit im Einheitskreis $|z| < 1$ diese Bedingung für jede schlichte Funktion erfüllt ist. Entsprechende Sätze beweise ich für eine reguläre, ungerade, schlichte, normierte Funktion

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots, \; g(0) = 0, \; g'(0) = 1, \; |z| < 1 \, .$$

Eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \, , \quad |z| < 1 \, ,$$

nennt man schlicht, wenn für $z_1 \neq z_2$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ immer $f(z_1) \neq f(z_2)$ ist. Bisher war es üblich überwiegend reguläre, schlichte, *normierte* Funktionen zu betrachten, d. h. solche schlichte Funktionen, welche den Bedingungen $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ entsprechen. In einer weiteren Arbeit will ich zeigen, dass wir auch für eine allgemeine, reguläre, schlichte Funktion

$$f(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \ldots, \; d_0 \neq 0, \; f'(0) = d_1 \neq 0, \; |z| < 1$$

gewisse Teilergebnisse erreichen können.

Die reguläre, schlichte, normierte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \; f(0) = 0 \, , \; f'(0) = 1, \; |z| < 1$$

hat eine ganze Reihe von merkwürdigen Eigenschaften namentlich geometrischer

Natur. Interessierten Leser verweise ich auf die zugehörige Literatur [1], [2], [3], [4]. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten a_n sind aber bisher unbekannt. Wir wissen nur, dass $|a_2| \leqq 2$ (BIEBERBACH [1]), $|a_3| \leqq 3$ (LÖWNER [5]), $|a_4| \leqq 4$ (GARABEDIAN und SCHIFFER [6]). Alle Grenzen sind genau. Allgemein wurde bewiesen: $|a_n| < en$ (LITTLEWOOD [7]), $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(|a_n|/n) < (\frac{1}{2} + \pi^{-1})\,e$ (LANDAU [9]), $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(|a_n|/n) < \frac{1}{2}e$ (BASILEVIČ [4]), $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(|a_n|/n) = q < 1$ (HAYMAN [3]).

Dieses letzte Ergebnis, welches für alle schlichte Funktionen gilt, soweit dieselben nicht die Form

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2z^2e^{i\alpha} + 3z^3e^{2i\alpha} + \ldots, \quad |z| < 1, \quad \alpha \text{ reel}$$

haben, stellt eine merkwürdige Unterstützung der Bieberbachschen Vermutung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$ dar. Es folgt offenbar aus ihm, dass für jede schlichte Funktion $f(z)$eine positive ganze Zahl $n_0(f)$ existiert, sodass für alle $n > n_0(f)$ die Ungleichung $|a_n| \leqq n$ gilt.

Die scharfe Abschätzung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$ gilt für alle schlichte Funktionen mit reellen Koeffizienten a_n (DIEUDONNÉ [10], ROGOSINSKI [11]). Weiter gilt sie auch für die sogenannten sternförmigen, schlichten Funktionen (R. NEVANLINNA [12a]); eine schlichte Funktion nennt man sternförmig, wenn sie die Kreislinie $|z| = r < 1$ auf einen Stern abbildet, d.i. auf eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve, die von jedem, vom Nullpunkt auslaufenden Halbstrahl, in genau einem Punkte durchgeschnitten wird. Analytisch ist diese Eigenschaft durch die Bedingung

$$\Re\left\{\frac{z f'(z)}{f(z)}\right\} \geqq 0, \quad |z| \leqq r < 1.$$

ausgedrückt. Jede schlichte Funktion $f(z)$ ist sternförmig (GRUNSKY [13]) im Innern des Kreises vom Radiüs r

$$r = \operatorname{tgh}\frac{\pi}{4} = 0{,}65.$$

Es ist jetzt bei der Hand gelegen, die Untersuchungen in dieser Richtung durchzuführen: eine solche Eigenschaft der schlichten Funktionen zu finden, aus welcher die Bieberbachsche Vermutung folgen sollte und dann zu untersuchen, wie weit im Einheitskreis $|z| < 1$ diese Eigenschaft für jede schlichte Funktion erfüllt ist. In meiner ersten Arbeit [15] habe ich bewiesen, dass für jede schlichte Funktion $f(z)$, welche im Einheitskreis $|z| < 1$ die Bedingung

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

erfüllt, die scharfe Abschätzung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2,3,\ldots)$ gilt und dass jede schlichte Funktion die Bedingung (1) im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}83 < r < 0{,}84$$

erfüllt; r ist die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$r \log \frac{1+r}{1-r} = 2\,.$$

Beim Beweis der Bieberbachschen Vermutung – im Zusammenhang mit der Bedingung (1) – habe ich einen Satz von CARATHEODORY benutzt, aus welchem die Beschränktheit der Koeffizienten einer im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären und diesen auf eine Halbebene abbildenden Funktion hervorgeht.

Zur Abschätzung von r benutze ich:

a) die geometrische Interpretation der Bedingung (1),

b) die Eigenschaften der Funktion

$$\sqrt{\frac{z}{f(z)}} = 1 + b_1^{(2)}z + b_3^{(2)}z^2 + \ldots + b_{2n-1}^{(2)}z^n + \ldots, \quad |z| < 1\,,$$

wo $f(z)$ eine schlichte Funktion ist,

c) den Bieberbachschen Flächensatz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|b_{2n-1}^{(2)}|^2 \leqq 1$ und

d) den Verzerrungssatz.

In dieser Arbeit beweise ich, dass die Bedingung (1) für jede schlichte Funktion $f(z)$ im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}90 < r < 0{,}91$$

erfüllt ist; r ist die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$\sqrt{(r)} \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - 2\sqrt{(r)} \operatorname{arctg} \sqrt{r} = 2\,.$$

Die Verschärfung um 7% zu erreichen ist es mir gelungen durch,

a) die tiefere geometrische Interpretation der Bedingung (1),

b) die Benutzung eines Satzes von FABER über schlichte Funktionen,

c) die Benutzung der Eigenschaften der Funktion

$$\sqrt[\nu]{\frac{z}{f(z)}} = 1 + b_{\nu-1}^{(\nu)}z + \ldots + b_{\nu n-1}^{(\nu)}z^n + \ldots, \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \quad |z| < 1\,,$$

wo $f(z)$ eine schlichte Funktion ist,

d) den Bieberbachschen Flächensatz $\sum_{n=1}^{\infty}(\nu n - 1)\left|b_{\nu n-1}^{(\nu)}\right|^2 \leqq 1$ und durch

e) den Verzerrungssatz.

Was eine reguläre, ungerade, schlichte Funktion

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots, \quad |z| < 1$$

betrifft, habe ich ursprünglich bewiesen [15], dass aus der Erfüllung der Bedingung

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \tag{2}$$

folgt, dass

$$\left|c_{2n-1}\right| \leqq 1, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

ist und dass jede ungerade, schlichte Funktion die Bedingung (2) im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}90 < r < 0{,}91$$

erfüllt; r ist die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$r^2 \log \frac{1 + r^2}{1 - r^2} = 2\,.$$

Durch ähnliche Methode, wie bei der Funktion $f(z)$, beweise ich, dass die Bedingung (2) für jede ungerade, schlichte Funktion im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}95 < r < 0{,}96$$

erfüllt ist; r ist die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$r \log \frac{1 + r}{1 - r} - 2r \operatorname{arctg} r = 2\,.$$

Littlewood und Paley [8] haben eine Vermutung ausgesprochen, dass $\left|c_{2n-1}\right| \leqq 1$, $(n = 2, 3, \ldots)$ ist. Diese Abschätzung gilt nur, wenn die Funktion $g(z)$ reelle Koeffizienten hat (Dieudonné [10]). Es gilt aber nicht allgemein; Fekete und Szegö haben nämlich bewiesen [14], dass ungerade, schlichte Funktionen existieren für welche

$$\operatorname{Max}\left|c_5\right| = \tfrac{1}{2} + e^{-2/3} = 1{,}01 > 1$$

ist. Die Bedingung (2) kann also nicht im ganzen Einheitskreis $|z| < 1$ für jede ungerade, schlichte Funktion $g(z)$ erfüllt werden.

Ich beweise alles, was ich zu eigenen Ergebnissen brauche. Aus der umfangreichen Literatur von schlichten Funktionen habe ich nicht die kürzesten Beweise ausgewählt, sondern – meiner Ansicht nach – die anschaulichsten, welche ich, mit kleineren Veränderungen, langsam und ausführlich, wie alle Beweise überhaupt, durchführe. Dies tue ich wegen der Bequemlichkeit des Lesers, namentlich eines jungen Lesers, dem ich zeigen will, was für eine schöne Partie der Mathematik Analytische Funktionen bilden.

I

Zuerst beweise ich, dass aus der Gültigkeit der Bedingung (1) für eine reguläre, schlichte Funktion $f(z)$ die Bieberbachsche Vermutung folgt. Ich brauche dazu den folgenden von Caratheodory [12b] herrührenden

Satz 1. *Es sei*

$$f(z) = \tfrac{1}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre Funktion, welche dort nur Werte mit positivem Realteil

$$\Re\{f(z)\} > 0$$

annimmt. Dann ist

$$|c_n| \leqq 1 \,, \quad (n = 2, 3, \dots) \,.$$

Die Grenze ist genau; es gibt Funktionen, für welche dieselbe erreicht wird.

Beweis. Die Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$ drückt man durch den reellen und imaginären Teil der Funktion $f(z)$ auf der Kreislinie $|z| = \varrho < 1$ aus.

$$\begin{aligned} z &= \varrho e^{i\vartheta} = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \,, \quad \varrho < 1 \,, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \,; \\ c_n &= c_n' + i c_n'' \,; \quad c_n', c_n'' \text{ reel} \,; \quad c_0'' = 0 \,; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \,; \\ c_n z^n &= (c_n' + i c_n'')\, \varrho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) = \\ &= \varrho^n(c_n' \cos n\vartheta - c_n'' \sin n\vartheta) + i\varrho^n(c_n'' \cos n\vartheta + c_n' \sin n\vartheta) \,. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen erhält man

$$f(\varrho e^{i\vartheta}) = U(\varrho, \vartheta) + iV(\varrho, \vartheta)$$

wo $U(\varrho, \vartheta)$ und $V(\varrho, \vartheta)$ reelle Funktionen sind

$$\begin{aligned} U(\varrho, \vartheta) &= c_0' + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^m(c_m' \cos m\vartheta - c_m'' \sin m\vartheta) \\ V(\varrho, \vartheta) &= c_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^m(c_m'' \cos m\vartheta + c_m' \sin m\vartheta) \,. \end{aligned}$$

Beide Entwicklungen sind einerseits, als der Real und Imaginärteil der regulären Funktion $f(z)$, für $\varrho < 1$ konvergent und als Potenzreihen von ϱ im Innern des Intervalles $0 \leqq \varrho < 1$ gleichmässig konvergent, andererseits als trigonometrische Reihen im abgeschlosenen Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ gleichmässig konvergent, so dass man gliedweise integrieren kann. Nach Multiplikation mit dem Faktor $e^{-in\vartheta}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und Integration erhalten wir

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} U(\varrho, \vartheta)\, e^{-in\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} [c_0' + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^m (c_m' \cos m\vartheta - $$

$$- c_m'' \sin m\vartheta)(\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta)]\, d\vartheta =$$

$$= \varrho^n c_n' \pi + \varrho^n i c_n'' \pi = \pi \varrho^n (c_n' + i c_n'') = \pi \varrho^n c_n$$

$$(4) \qquad \int_0^{2\pi} V(\varrho, \vartheta)\, e^{-in\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} [c_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^m (c_m'' \cos m\vartheta +$$

$$+ c_m' \sin m\vartheta)(\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta)]\, d\vartheta =$$

$$= \varrho^n c_n'' \pi - \varrho^n i c_n' \pi = -i\pi \varrho^n (c_n' + i c_n'') =$$

$$= \frac{\pi \varrho^n c_n}{i},$$

da nach den bekannten Orthogonalrelationen alle Glieder in den beiden Formeln bis auf zwei abfallen.

Die Formel (4) ist für die Abschätzung des absoluten Betrages von c_n nicht geignet, da wir nichts näheres von der Funktion $V(\varrho, \vartheta)$ wissen. Wir können aber die Formel (3) benutzen, denn es gilt $U(\varrho, \vartheta) = \Re\{f(z)\} > 0$ und so haben wir

$$c_n = \frac{1}{\pi \varrho^n} \int_0^{2\pi} U(\varrho, \vartheta)\, e^{-in\vartheta}\, d\vartheta$$

$$|c_n| \leqq \frac{1}{\pi \varrho^n} \int_0^{2\pi} |U(\varrho, \vartheta)\, e^{-in\vartheta}|\, d\vartheta = \frac{1}{\pi \varrho^n} \int_0^{2\pi} U(\varrho, \vartheta)\, d\vartheta$$

$$|c_n| \leqq \frac{1}{\pi \varrho^n} \int_0^{2\pi} [\tfrac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho^m (c_m' \cos m\vartheta - c_m'' \sin m\vartheta)]\, d\vartheta = \frac{1}{\pi \varrho^n} \frac{1}{2} 2\pi = \frac{1}{\varrho^n};$$

wenn $\varrho \to 1$, dann ist $|c_n| \leqq 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Die Grenze wird z.B., für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1 + z}{1 - z} = \tfrac{1}{2} + z + z^2 + \ldots, \quad |z| < 1$$

erreicht.

Satz 2. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, schlichte Funktion, welche dort die Bedingung*

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

erfüllt. Dann ist

$$|a_n| \leqq n, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Beweis. Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist dort die Funktion $f(z)/z$ regulär und von 0 verschieden. Dasselbe gilt von der Funktion $\sqrt{[f(z)/z]}$, die man in die folgende Potenzreihe entwickeln kann

$$\sqrt{\frac{f(z)}{z}} = 1 + \frac{1}{2} a_2 z + \frac{1}{8}(4a_3 - a_2^2) + \dots$$

oder

$$\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_2 z + \frac{1}{8}(4a_3 - a_2^2) + \dots$$

Unter Voraussetzung Gültigkeit der Bedingung (1)

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2}\right\} > 0,$$

erhält man mit Benutzung des Satzes 1

$$|\tfrac{1}{2} a_2| \leqq 1, \quad |a_2| \leqq 2$$

$$|\tfrac{1}{8}(4a_3 - a_2^2)| \leqq 1, \quad 4|a_3| \leqq 8 + |a_2|^2 \leqq 12, \quad |a_3| \leqq 3.$$

Allgemein:

$$\sqrt{(1 + a_2 z + \dots + a_{n+1} z^n + \dots)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

$$1 + a_2 z + \dots + a_{n+1} z^n + \dots = (1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)^2.$$

Durch Vergleichung der Glieder bei z^n erhalten wir;

$$n \text{ gerade:} \quad a_{n+1} = 2c_n + 2c_1 c_{n-1} + \dots + c_{n/2}^2,$$

$$n \text{ ungerade:} \quad a_{n+1} = 2c_n + 2c_1 c_{n-1} + \dots + 2c_{\frac{1}{2}(n-1)} c_{\frac{1}{2}(n+1)}.$$

Nach dem Satz 1 gilt für jedes n, dass $|c_n| \leqq 1$, $(n = 1, 2, \dots)$; wir haben also:

n gerade: Anzahl der Glieder $\frac{1}{2}n + 1$, der letzte $\leqq 1$, alle vorangehende $\leqq 2$, gemäss dem absoluten Betrag, also $|a_{n+1}| \leqq 2n/2 + 1 = n + 1$; n ungerade: Anzahl der Glieder $\frac{1}{2}(n + 1)$ und jeder $\leqq 2$, gemäss dem absoluten Betrag, also $|a_{n+1}| \leqq$ $\leqq 2(n + 1)/2 = n + 1$ oder allgemein

$$|a_n| \leqq n\,, \quad (n = 2, 3, \ldots)\,.$$

Die Grenze ist genau; sie wird durch die bekannte schlichte Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots, \quad |z| < 1$$

erreicht.

II

Jetzt untersuche ich, wie weit die Bedingung (1) im Einheitskreis $|z| < 1$ für jede schlichte Funktion erfüllt ist. Ich benutze dabei einen Satz von Faber (Satz 3a), den Bieberbachschen Flächensatz (Satz 4), den Verzerrungssatz (Satz 5) und noch einen weiteren Hilfssatz.

Satz 3a. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, schlichte Funktion und es sei* ν *eine beliebige, positive, ganze Zahl* $\nu = 2, 3, \ldots,$ *dann ist die Funktion*

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]} = z + a^{(\nu)}_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots + a^{(\nu)}_{\nu n+1} z^{\nu n+1} + \ldots \tag{5}$$

auch regulär und schlicht im Einheitskreis $|z| < 1$; *hierbei ist ein bestimmter Zweig der* ν*-Wurzel zu nehmen,*

Beweis. Die Funktion

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]} = z \sqrt[\nu]{\frac{f(z^\nu)}{z^\nu}}$$

ist im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär, weil daselbst $f(z^\nu)/z^\nu$ regulär und von 0 verschieden ist. Es seien nun z_1 und z_2 beliebig im Einheitskreis $|z| < 1$ und es sei

$$\varphi_\nu(z_1) = \varphi_\nu(z_2) \quad \text{oder} \quad \sqrt[\nu]{[f(z_1^\nu)]} = \sqrt[\nu]{[f(z_2^\nu)]}\,, \tag{6}$$

dann ist notwendig $z_1 = z_2$. Es folgt nämlich aus (6) $f(z_1^\nu) = f(z_2^\nu)$ und da $f(z)$ eine schlichte Funktion ist, folgt es daraus, dass $z_1^\nu = z_2^\nu$, d. h. $z_1 = \omega_k z_2$, wo $\omega_k = \sqrt[\nu]{1}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Nur die erste Wurzel $\omega_1 = 1$, d. h. $z_1 = z_2$, kommt in Betracht. Die Möglichkeit $z_1 = \omega_k z_2$, wo ω_k die $\nu - 1$ übrigbleibenden ν-Einheitswurzeln durchläuft, fällt ab, weil dann bekämen wir

$$\begin{aligned}\varphi_\nu(z_1) = \varphi_\nu(\omega_k z_2) &= \omega_k z_2 + a_{\nu+1}^{(\nu)}(\omega_k z_2)^{\nu+1} + \ldots + a_{\nu n+1}^{(\nu)}(\omega_k z_2)^{\nu n+1} + \ldots \\ &= \omega_k z_2 + \omega_k a_{\nu+1}^{(\nu)} z_2^{\nu+1} + \ldots + \omega_k a_{\nu n+1}^{(\nu)} z_2^{\nu n+1} + \ldots, \quad \omega_k^\nu = 1\end{aligned}$$

$\varphi_\nu(z_1) = \omega_k \varphi_\nu(z_2)$: also einen Widerspruch mit (6).

Für diesen Satz können wird auch einen zweiten ganz kurzen Beweis angeben. Durch die Funktion z^ν geht der Einheitskreis $|z| < 1$ in einen ν-blättrigen Einheitskreis mit dem Verzweigungspunkt $z = 0$ über und dieser wird durch die Funktion $f(z^\nu)$ auf ein in ähnlicher Weise verzweigtes Gebiet abgebildet. Durch Übergang zu der Funktion $\sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}$ fällt diese Verzweigung ab und man erhält ein einfach bedecktes, schlichtes Gebiet.

Bemerkung: Den Satz 3a hat FABER zuerst für $\nu = 2$ bewiesen. Siche dazu auch [12d].

Satz 3b. *Es sei*

$$\psi_\nu(z) = z + c_{\nu+1}^{(\nu)} z^{\nu+1} + \ldots + c_{\nu n+1}^{(\nu)} z^{\nu n+1} + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion und es sei ν eine beliebige, positive, ganze Zahl $\nu = 2, 3, \ldots$; dann existiert zu jeder Funktion $\psi_\nu(z)$ eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^3 + a_3 z^3 + \ldots,$$

aus welcher die Funktion $\psi_\nu(z)$ durch die Operation

$$\psi_\nu(z) = \sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}$$

hervorgeht; hierbei ist ein bestimmter Zweig der ν-Wurzel zu nehmen.

Beweis: Die Funktion

$$\begin{aligned}[\psi_\nu(z^{1/\nu})]^\nu &= [z^{1/\nu} + c_{\nu+1}^{(\nu)} z^{(\nu+1)/\nu} + \ldots + c_{\nu n+1}^{(\nu)} z^{(\nu n+1)/\nu} + \ldots]^\nu \\ &= [z^{1/\nu}(1 + c_{\nu+1}^{(\nu)} z + \ldots + c_{\nu n+1}^{(\nu)} z^n + \ldots)]^\nu \\ &= z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = f(z)\end{aligned} \tag{7}$$

ist offenbar im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und mit der Funktion $f(z)$ durch die Relation $\psi_\nu(z) = \sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}$ verbunden. Es seien nun z_1 und z_2 beliebig im Einheitskreis $|z| < 1$ und es sei

$$[\psi_\nu(z_1^{1/\nu})]^\nu = [\psi_\nu(z_2^{1/\nu})]^\nu, \tag{8}$$

dann ist notwendig $z_1 = z_2$. Es folgt nämlich aus (8)

$$\begin{aligned}\psi_\nu(z_1^{1/\nu}) &= \omega_k \psi_\nu(z_2^{1/\nu}), \quad \omega_k = \sqrt[\nu]{1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu . \\ &= \omega_k z_2^{1/\nu} + \omega_k c_{\nu+1}^{(\nu)} z_2^{(\nu+1)/\nu} + \ldots + \omega_k c_{\nu n+1}^{(\nu)} z_2^{(\nu n+1)/\nu} + \ldots \\ &= \omega_k z_2^{1/\nu} + c_{\nu+1}^{(\nu)} (\omega_k z_2^{1/\nu})^{\nu+1} + \ldots + c_{\nu n+1}^{(\nu)} (\omega_k z_2^{1/\nu})^{\nu n+1} \\ \psi_\nu(z_1^{1/\nu}) &= \psi_\nu(\omega_k z_2^{1/\nu})\end{aligned}$$

und da $\psi_\nu(z)$ eine schlichte Funktion ist, folgt daraus

$$z_1^{1/\nu} = \omega_k z_2^{1/\nu}, \quad \text{d.h.} \quad z_1 = z_2 .$$

Bemerkung. Den Satz 3b für $\nu = 2$ hat zuerst RADÓ für die Abschätzung des absoluten Betrages einer regulären, schlichten, ungeraden Funktion $g(z)$ benutzt. Siehe dazu [12e].

Satz 4. *Es sei*

$$w = \varphi(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

eine im Gebiet $0 < |z| < 1$ *reguläre, schlichte Funktion mit dem einfachen Pol im Unendlichen. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqq 1 .$$

Beweis: Bei der schlichten Abbildung des Gebietes $0 < |z| < 1$ durch die Funktion $w = \varphi(z)$ bleibt ein ganz bestimmter Bereich der w-Ebene unbedeckt, dessen Flächeninhalt grösser oder gleich Null ist; daraus folgt die Beweismethode. Die Kreislinie $|z| = r < 1$ wird durch die Funktion $\varphi(z)$ auf eine geschlossene analytische Jordankurve von der Gleichung $w = w(\vartheta) = \varphi(re^{i\vartheta})$, $z = re^{i\vartheta}$ abgebildet. Die Fläche P des von dieser Kurve umschlossenen Bereiches ist durch die bekannte Integralformel gegeben

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (uv' - u'v)\, d\vartheta , \quad w = u + iv$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{w(\vartheta) + \bar{w}(\vartheta)}{2} \frac{w'(\vartheta) - \bar{w}'(\vartheta)}{2i} - \frac{w'(\vartheta) + \bar{w}'(\vartheta)}{2} \frac{w(\vartheta) - \bar{w}(\vartheta)}{2i}\right] d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{8i}\int_0^{2\pi} [w(\vartheta)\, w'(\vartheta) + \bar{w}(\vartheta)\, w'(\vartheta) - w(\vartheta)\, \bar{w}'(\vartheta) - \bar{w}(\vartheta)\, \bar{w}'(\vartheta) - w(\vartheta)\, w'(\vartheta) -$$

$$- w(\vartheta)\, \bar{w}'(\vartheta) + \bar{w}(\vartheta)\, w'(\vartheta) + \bar{w}(\vartheta)\, \bar{w}'(\vartheta)]\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4i}\int_0^{2\pi} [\bar{w}(\vartheta)\, w'(\vartheta) - w(\vartheta)\, \bar{w}'(\vartheta)]\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4i}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{re^{-i\vartheta}} + \bar{b}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{b}_n r^n e^{-in\vartheta}\right)\left(-\frac{i}{re^{i\vartheta}} + i\sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^n e^{in\vartheta}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{re^{i\vartheta}} + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n e^{in\vartheta}\right)\left(+\frac{i}{re^{-i\vartheta}} - i\sum_{n=1}^{\infty} n\bar{b}_n r^n e^{-in\vartheta}\right)\right] \mathrm{d}\vartheta\,.$$

Alle Glieder mit der ganzzahligen Potenz von $e^{in\vartheta}$ fallen bei der Integration ab und so erhält man

$$P = \frac{1}{4i}\left[-\frac{2\pi i}{r^2} - 2\pi i\bar{b}_1 + 2\pi i b_1 + 2\pi i\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n} -\right.$$

$$- \frac{2\pi i}{r^2} - 2\pi i b_1 + 2\pi i\bar{b}_1 + 2\pi i\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n}$$

$$\left. P = -\frac{\pi}{r^2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n}\right].$$

Der Flächeninhalt wird negativ gerechnet, da bei positivem Umlaufen der Kreislinie $|z| = r$ der mitbewegte Bildpunkt $w = \varphi(z)$ den durch Jordankurve umschlossenen Bereich rechts lässt. Das können wir sofort einsehen, wenn wir ein kleines z betrachten; dann spielt offenbar das erste Glied $1/z$ die entscheidende Rolle. Nach obiger Bemerkung muss dieser Flächeninhalt grösser oder gleich Null sein. Wir haben also

$$\frac{\pi}{r^2} - \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n} \geqq 0$$

und daraus wenn $r \to 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqq 1\,.$$

Satz 5. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion. Dann ist

a) $|a_2| \leqq 2$,

b) $|c| \geqq \frac{1}{4}$ (*c ist der nächste Punkt der Grenze des Bildgebietes*),

c) $\dfrac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \dfrac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$ (*der Verzerrungssatz*),

(9) d) $\dfrac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leqq |f(z)| \leqq \dfrac{|z|}{(1 - |z|)^2}\,.$

Alle Grenzen sind genau; es gibt Funktionen, für welche dieselben erreicht werden.

Beweis. a) Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist dort – nach dem Satz 3a – die Funktion $F(z) = \sqrt{[f(z^2)]} = z + \frac{1}{2}a_2 z^2 + \ldots$ auch regulär und schlicht. Die Funktion

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} a_2 z + \ldots$$

ist dann regulär und schlicht im Gebiet $0 < |z| < 1$ und nach dem Satz 4 gilt

$$|-\tfrac{1}{2}a_2| \leqq 1 \quad \text{d.i.} \quad |a_2| \leqq 2\,.$$

b) Es sei $f(z) \neq c$ im Einheitskreis $|z| < 1$. Dann ist auch $c \neq 0$ und die Funktion

$$f_1(z) = \frac{c\,f(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2$$

ist im Einheitskreis $|z| < 1$ offenbar regulär und schlicht. Nach a) gilt aber

$$\left| a_2 + \frac{1}{c} \right| \leqq 2$$

und da $|a_2| \leqq 2$ ist, folgt daraus, dass $|c| \geqq \frac{1}{4}$.

c) Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, dann ist die Funktion

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 + \ldots$$

regulär und schlicht im Einheitskreis $|\zeta| < 1$, da die homographische Transformation $(\zeta + z)/(1 + \bar{z}\zeta)$ die schlichte Abbildung des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ auf sich selbst vermittelt.

Die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ bestimmt man nach der Taylorschen Formel

$$\alpha_0 = \varphi(0) = f(z)\,, \quad \alpha_1 = \varphi'(0) = (1 - z\bar{z})f'(z)\,,$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\varphi''(0) = \tfrac{1}{2}(1 - z\bar{z})^2 f''(z) - \bar{z}(1 - z\bar{z})f'(z)\,.$$

Jetzt normiert man die Funktion $\varphi(\zeta)$

$$\frac{\varphi(\zeta) - \alpha_0}{\alpha_1} = \frac{f\left(\dfrac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{f'(z)\,(1 - z\bar{z})} = g(\zeta) = \zeta + \beta_2\zeta^2 + \ldots$$

und da nach a) $|a_2| \leqq 2$ ist, erhält man

$$|\beta_2| = \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(z)\,(1 - z\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leqq 2$$

oder

$$\left|\frac{z\,f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2}\right| \leqq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}\,.$$

Daraus folgt

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leqq \Re\left\{\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right\} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \leqq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

oder

$$\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2} \leqq \Re\left\{\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right\} \leqq \frac{2|z|^2+4|z}{|1-|z|^2};$$

betrachten wir, dass

$$\frac{z\,f''(z)}{f'(z)} = \frac{d\log f'(z)}{d\log z} = \frac{\partial\log f'(z)}{\partial\log|z|} = |z|\,\frac{\partial\log f'(z)}{\partial|z|}$$

ist, erhalten wir weiter

$$\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2} \leqq |z|\,\frac{\partial}{\partial|z|}\,\Re\{\log f'(z)\} \leqq \frac{2|z|^2+4|z|}{1-|z|^2}.$$

Da aber $\Re\{\log f'(z)\} = \log|f'(z)|$ ist, haben wir endlich

$$\frac{2|z|-4}{1-|z|^2} \leqq \frac{\partial}{\partial|z|}\log|f'(z)| \leqq \frac{2|z|+4}{1-|z|^2}$$

und daraus folgt durch Integration

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

d) Aus

$$|f'(z)| \leqq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

folgt durch Integration über den Radius des Punktes z

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq \int_0^{|z|} |f'(z)|\,\mathrm{d}|z| \leqq \int_0^{|z|} \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\,\mathrm{d}|z| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Die untere Abschätzung von $|f(z)|$ beweisen wir folgendermassen: Es sei $f(z)$ der dem Nullpunkt nächstgelegene Punkt des Bildes der Kreislinie $|z| = r$ und es sei L jene Kurve der z-Ebene, welche der Verbindungsstrecke von 0 bis $f(z)$ entspricht; dann folgt aus

$$|f(z)| = \int_L |f'(z)|\,|\mathrm{d}z| \quad \text{wegen} \quad |dz| \geqq \mathrm{d}|z|,$$

dass

$$|f(z)| \geqq \int_0^{|z|} |f'(z)|\,\mathrm{d}|z| \geqq \int_0^{|z|} \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\,\mathrm{d}|z| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

Man hat also

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqq |f(z)| \leqq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Die untere Abschätzung enthält aufs neue das Ergebnis über den nächsten Punkt der Grenze des Bildgebietes; die obere Abschätzung schränkt das Wachstum der Funktion $f(z)$ ein. Alle Grenzen werden durch die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots, \quad |z| < 1$$

erreicht, wie man sich leicht überzeugen kann.

Satz 6. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion. Dann ist die Funktion

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + b_0^{(1)} z + b_1^{(1)} z^2 + \ldots + b_n^{(1)} z^{n+1} + \ldots, \quad b_0^{(1)} = -a_2,$$

im Einheitskreis $|z| < 1$;

a) *regulär,*

b) *beschränkt,*

c) *für ihre Koeffizienten gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|b_n^{(1)}|^2 \leqq 1$ und*

d) *sie lässt sich in der Form schreiben*

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + B_\nu(z)]^\nu, \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

wo die Funktion

$$B_\nu(z) = b_{\nu-1}^{(\nu)} z + \ldots + b_{\nu n-1}^{(\nu)} z^n + \ldots$$

im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär, beschränkt, $\neq -1$ ist und für ihre Koeffizienten gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu n - 1)\, |b_{\nu n-1}^{(\nu)}|^2 \leqq 1 \tag{11}$$

und für den absoluten Betrag die Abschätzung

$$|B_\nu(z)| \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{\nu-1} \log \frac{1}{1-r^2}\right)}. \tag{12}$$

Beweis. a) Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist dort die Funktion $f(z)/z$ regulär und von 0 verschieden; es ist daher auch ihr reziproker Wert eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre Funktion.

b) Aus (9) erhalt man für die Funktion $f(z)/z$

$$\text{(13)} \qquad \frac{1}{(1+|z|)^2} \leqq \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{(1-|z|)^2}, \quad |z| < 1$$

und daraus folgt nach a)

$$\text{(14)} \qquad 0 < (1-|z|)^2 \leqq \left|\frac{z}{f(z)}\right| \leqq (1+|z|)^2 < 4, \quad |z| < 1\,.$$

c) Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist die Funktion

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + b_0^{(1)} + b_1^{(1)}z + b_2^{(1)}z^2 + \dots, \quad b_0^{(1)} = -a_2$$

regulär und schlicht im Gebiet $0 < |z| < 1$ und für ihre Koeffizienten gilt nach dem Bieberbachschen Flächensatz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|b_n^{(1)}|^2 \leqq 1$.

d) Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht so ist dort, nach dem Satz 3a, die Funktion

$$\varphi_\nu(z) = \sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]} = z + a_{\nu+1}^{(\nu)}z^{\nu+1} + \dots + a_{\nu n+1}^{(\nu)}z^{\nu n+1} + \dots, \quad (\nu = 2, 3, \dots)\,;$$

auch regulär und schlicht, die Funktion

$$\frac{1}{\varphi_\nu(z)} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}} = \frac{1}{z} + b_{\nu-1}^{(\nu)}z^{\nu-1} + \dots + b_{\nu n-1}^{(\nu)}z^{\nu n-1} + \dots$$

ist dann regulär und schlicht im Gebiet $0 < |z| < 1$ und für ihre Koeffizienten gilt nach dem Bieberbachschen Flächensatz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\nu n - 1)\,|b_{\nu n-1}^{(\nu)}|^2 \leqq 1$; den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}} = \frac{1}{z} + b_{\nu-1}^{(\nu)}z^{\nu-1} + \dots + b_{\nu n-1}^{(\nu)}z^{\nu n-1} + \dots, \quad 0 < |z| < 1$$

kann man aber in dieser Form schreiben

$$\frac{z}{\sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}} = \sqrt[\nu]{\frac{z^\nu}{f(z^\nu)}} = 1 + b_{\nu-1}^{(\nu)}z^\nu + \dots + b_{\nu n-1}^{(\nu)}z^{\nu n} + \dots, \quad |z| < 1$$

oder

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + b_{\nu-1}^{(\nu)}z + \dots + b_{\nu n-1}^{(\nu)}z^n + \dots]^\nu = [1 + B_\nu(z)]^\nu\,;$$

die Funktion

$$B_\nu(z) = b^{(\nu)}_{\nu-1} z + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^n + \ldots, \quad |z| < 1$$

ist im Einheitskreis $|z| < 1$ offenbar regulär, beschränkt und $\neq -1$, es folgt aus der Relation (14),

$$(15) \quad 0 < \sqrt[\nu]{(1 - |z|)^2} \leqq \left|\sqrt[\nu]{\frac{z}{f(z)}}\right| = |1 + B_\nu(z)| \leqq \sqrt[\nu]{(1 + |z|)^2} < \sqrt[\nu]{4}, \quad |z| < 1;$$

zur Abschätzung der Funktion $B_\nu(z)$

$$|B_\nu(z)| \leqq |b^{(\nu)}_{\nu-1}|\, r + \ldots + |b^{(\nu)}_{\nu n-1}|\, r^n + \ldots, \quad |z| = r < 1$$

benutzen wir die Schwarzsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\right)}, \quad \alpha_n \geqq 0, \quad \beta_n \geqq 0$$

$$\alpha_n = \sqrt{(\nu n - 1)}\, |b^{(\nu)}_{\nu n-1}|, \quad \beta_n = \frac{r^n}{\sqrt{(\nu n - 1)}}$$

$$|B_\nu(z)| \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\nu n - 1) |b^{(\nu)}_{\nu n-1}|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\nu n - 1}\right)}$$

und daraus wegen (11)

$$|B_\nu(z)| \leqq \sqrt{1} \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\nu n - 1}\right)} \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\nu n - n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\nu - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n}\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\nu - 1} \log \frac{1}{1 - r^2}\right)}.$$

Bemerkung. Für $\nu = 2$ und $\nu = 4$ haben wir für $|B_\nu(z)|$ schärfere Abschätzungen, da man die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2n - 1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{4n - 1}$$

addieren kann.

$$(16) \qquad \nu = 2, \quad |B_2(z)| \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)\, |b^{(2)}_{2n-1}|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2n - 1}\right)} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{\left(\frac{r}{2} \log \frac{1 + r}{1 - r}\right)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n-1}}{2n - 1} = r + \frac{r^3}{3} + \ldots + \frac{r^{2n-1}}{2n - 1} + \ldots = \frac{1}{2} \log \frac{1 + r}{1 - r}.$$

(17) $$v = 4\,, \quad |B_4(z)| \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(4n-1)\,|b_{4n-1}^{(4)}|^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{4n-1}\right)} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{\left(\frac{\sqrt{r}}{4}\log\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{r}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{r}\right)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{4n-1} = \sqrt{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{r})^{4n-1}}{4n-1} = \sqrt{r}\int_0^{\sqrt{r}}\frac{d}{d(\sqrt{r})}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{r})^{4n-1}}{4n-1}\right]d(\sqrt{r}) =$$
$$= \sqrt{r}\int_0^{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r})^{4n-2}\,d(\sqrt{r}) = \sqrt{r}\int_0^{\sqrt{r}}\frac{(\sqrt{r})^2}{1-(\sqrt{r})^4}\,d(\sqrt{r}) =$$
$$= \sqrt{r}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{r}}\frac{d(\sqrt{r})}{1-(\sqrt{r})^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{r}}\frac{d(\sqrt{r})}{1+(\sqrt{r})^2}\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{r}}{4}\log\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{r}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{r}\,.$$

Beide Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r})^{4n-1}/(4n-1)$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r})^{4n-2}$ sind im Innern des Intervales $0 \leqq \sqrt{(r)} < 1$ stetig, differenzierbar und gleichmässig konvergent; man kann also gliedweise differenzieren und integrieren.

Jetzt kann ich die in meiner Arbeit [15] bewiesene Abschätzung durchführen.

Satz 7. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, schlichte Funktion. Die Bedingung*

(1) $$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2}$$

erfüllt jede schlichte Funktion im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}83 < r < 0{,}84\,;$$

r ist die zwischen 0 *und* 1 *gelegene Wurzel der Gleichung*

$$r\log\frac{1+r}{1-r} = 2\,.$$

Beweis. Die Bedingung (1) ist, wie man leicht aus einer Zeichnung erkennt, mit der Ungleichung

(18) $$\left|\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - 1\right| < \left|\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right|$$

äqvivalent. Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist dort die Funktion $f(z)/z$ regulär von 0 verschieden. Dasselbe gilt von der Funktion $\sqrt{(f(z)/z)}$; man kann also durch diese Funktion teilen und so erhält man aus der Ungleichung (18)

$$\left|1 - \sqrt{\frac{z}{f(z)}}\right| < 1 \tag{19}$$

Nach dem Satz 6, aber für $\nu = 2$, gilt

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + B_2(z)]^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{z}{f(z)}} = 1 + B_2(z)\,.$$

Nach Einsetzen reduziert sich also die Ungleichung (19) auf

$$|B_2(z)| < 1 \tag{20}$$

und daraus nach dem Satz 6, der Bemerkung für $\nu = 2$

$$|B_2(z)| \leqq \sqrt{\left(\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\right)} < 1$$

oder

$$r\log\frac{1+r}{1-r} < 2$$

$$0{,}83 < r < 0{,}84\,.$$

Es könnte im ersten Augenblick vorkommen, dass eine weitere Verschärfung nicht mehr möglich ist. Denn legen wir für die Koeffizienten der Funktion

$$B_2(z) = b_1^{(2)}z + b_3^{(2)}z^2 + \ldots + b_{2n-1}^{(2)}z^n + \ldots\,, \quad |z| < 1$$

$$|b_{2n-1}^{(2)}| = \frac{1}{\sqrt{[n(n+1)(2n-1)]}}\,. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{21}$$

so ist die Bedingung (11) hier offenbar erfüllt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|b_{2n-1}^{(2)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\frac{1}{n(n+1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

und für die Abschätzung von $B_2(z)$ erhalten wir

$$|B_2(z)| \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|b_{2n-1}^{(2)}|^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n-1}\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n-1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\right)},$$

das ist aber unsere alte Abschätzung.

Das Ergebnis ist nur scheinbar; es ist nämlich vorhinein nicht klar, ob die Funktion $f(z)$, die mit der Funktion $B_2(z)$ durch die Gleichung $\sqrt{(z/f(z))} = 1 + B_2(z)$ verbunden ist, regulär und schlicht im Einheitskreis $|z| < 1$ ist. Es zeigt sich aber durch eine tiefere Analyse der Ungleichung (19) eine weitere Verschärfung um 7%; denn es gilt der folgende

Satz 8. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, schlichte Funktion. Die Bedingung*

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

erfüllt jede schlichte Funktion im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}90 < r < 0{,}91\,;$$

r ist die zwischen 0 *und* 1 *gelegene Wurzel der Gleichung*

$$\sqrt{(r)}\log\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - 2\sqrt{(r)}\operatorname{arctg}\sqrt{r} = 2\,.$$

Beweis. Die Ungleichung (19)

$$\left|1 - \sqrt{\frac{z}{f(z)}}\right| < 1 \quad \text{oder} \quad \left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| < 1$$

kann man in dieser Form schreiben

$$\left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right|\left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} + 1\right| < 1\,. \tag{22}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, soweit die Funktion

$$w_4(z) = \sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} = 1 + B_4(z)$$

(siehe (10)) die Abbildung des Einheitskreises $|z| < 1$ auf ein in der rechten Hälfte der Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$ gelegenes Gebiet vermittelt. Die Ausdrücke

$$\left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| \quad \text{und} \quad \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} + 1\right|$$

stellen nämlich die Entfernungen des Punktes $w_4(z)$ von den Punkten $+1$ resp. -1 dar und für den absoluten Betrag der Funktion $w_4(z)$ erhält man aus der Relation (15)

$$(23)\qquad 0 < \sqrt{(1 - |z|)} \leqq \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}}\right| = |w_4(z)| \leqq \sqrt{(1 + |z|)} < \sqrt{2}\,, \quad |z| < 1\,.$$

(Der gefällige Leser macht sich eine Zeichnung beim Beweis des Satzes 8).

Für ein kleines r ist die Ungleichung (22) offenbar erfüllt, da die Funktion $w_4(z)$ den Nullpunkt der z-Ebene auf den Punkt (1, 0) der w-Ebene abbildet und ein kleiner Kreis der z-Ebene mit dem Mittelpunkt im Anfang wird sicher auf ein in der rechten Hälfte der Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$ gelegenes Gebiet der w-Ebene abgebildet. Aus der Ungleichung (22) können wir auch die Abschätzung für den Radius r dieses Kreises gewinnen.

$$(24)\qquad \begin{gathered} |1 + B_4(z) - 1|\,|1 + B_4(z) + 1| < 1 \\ |B_4(z)|\,|2 + B_4(z)| \leqq |B_4(z)|\,(2 + |B_4(z)|) < 1 \\ (1 + |B_4(z)|)^2 < 2 \\ |B_4(z)| < \sqrt{(2)} - 1\,. \end{gathered}$$

Dies wäre keine Verbesserung der bisher gewonnenen Abschätzung. Aus der Relation (10) haben wir nämlich $[1 + B_2(z)]^2 = [1 + B_4(z)]^4$ oder $B_2(z) = 2B_4(z) + B_4^2(z)$, so dass aus (22) folgt $|2B_4(z) + B_4^2(z)| = |B_2(z)| < 1$ und das ist die Ungleichung (20) aus dem Satz 7. Aus der Ungleichung (24) folgt eine noch schwächere Abschätzung als aus (20).

Eine Verbesserung erreichen wir nur dadurch, dass wir die Ungleichung (22) durch eine andere ersetzen, die wir besser abschätzen können. Zu diesem Zweck müssen wir sie im Ganzen fünfmal abändern. Den Ausdruck auf der linken Seite ersetzen wir dreimal nacheinander durch einen äquivalenten Ausdruck; dann ersetzen wir ihn zweimal durch einen anderen, welcher in den zugehörigen Intervalen für $|w_4(z)|$ und φ_z grössere oder gleiche Werte annimmt.

1. Die Ungleichung (22) kann man im Reellen in dieser Form ausdrücken

$$(25)\qquad \begin{gathered} \sqrt{[1^2 + |w_4(z)|^2 - 2\,.\,1\,.\,|w_4(z)|\cos\varphi_z]}\,. \\ .\sqrt{[1^2 + |w_4(z)|^2 - 2\,.\,1\,.\,|w_4(z)|\cos(\pi - \varphi_z)]} < 1\,, \\ 0 < |w_4(z)| < \sqrt{2}\,, \quad 0 \leqq \varphi_z < \pi/4\,, \end{gathered}$$

oder

$$(26)\qquad (1 + |w_4(z)|^2 - 2|w_4(z)|\cos\varphi_z)\,(1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)|\cos\varphi_z) < 1\,.$$

2. Betrachtet man, dass die Relation

$$\left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| = |B_4(z)| = \sqrt{[1 + |w_4(z)|^2 - 2|w_4(z)| \cos \varphi_z]} \tag{27}$$

gilt, so nimmt die Ungleichung (26) diese Form an

$$|B_4(z)|^2 (1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)| \cos \varphi_z) < 1 . \tag{28}$$

3. Die Ungleichung (28) kann man folgendermassen schreiben

$$\begin{gathered} |B_4(z)|^2 \{k[1 + |w_4(z)|^2 - 2|w_4(z)| \cos \varphi_z] - \\ - (k - 1)(1 + |w_4(z)|^2) + (k + 1) 2|w_4(z)| \cos \varphi_z\} < 1 , \end{gathered} \tag{29}$$

wo $\cdot k$ eine beliebige positive ganze Zahl $k = 2, 3, \ldots$ ist und daraus wegen (27) ergibt sich

$$\begin{gathered} |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - \\ - [(k - 1)(1 + |w_4(z)|^2) - 2(k + 1)|w_4(z)| \cos \varphi_z]\} < 1 . \end{gathered} \tag{30}$$

4. Die Ungleichung (30) ist mit der Ungleichung (26) identisch, aus der aber

$$(1 + |w_4(z)|^2)^2 - 4|w_4(z)|^2 \cos^2 \varphi_z < 1 \tag{31}$$

folgt; die Ungleichung (30) ist also bestimmt erfüllt, wenn wir für $\cos \varphi_z$ das Minimum d.i. $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ legen:

$$|B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - [(k - 1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k + 1)|w_4(z)|]\} < 1 . \tag{32}$$

5. Endlich betrachten wir, dass die folgende Ungleichung gilt

$$\begin{gathered} k|B_4(z)|^2 - [(k - 1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k + 1)|w_4(z)|] \leqq \\ \leqq k|B_4(z)|^2 - \mathrm{Min}\,[(k - 1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k + 1)|w_4(z)|] ; \end{gathered} \tag{33}$$

jetzt berechnet man das Minimum der Funktion

$$\psi(|w_4(z)|) = (k - 1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k + 1)|w_4(z)|$$

$$\frac{d\psi(|w_4(z)|)}{d|w_4(z)|} = 2(k - 1)|w_4(z)| - \sqrt{(2)}(k + 1) = 0$$

und daraus

$$|w_4(z)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k + 1}{k - 1} \tag{34}$$

$$\frac{d^2\psi(|w_4(z)|)}{d|w_4(z)|^2} = 2(k - 1) > 0$$

also das Minimum; nach Einsetzen in (32) erhält man

$$|B_4(z)|^2 \left\{k|B_4(z)|^2 - \left[(k-1) + (k-1)\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - \right.\right. \tag{35}$$

$$\left.\left. - \sqrt{(2)}\,(k+1)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k+1}{k-1}\right]\right\} < 1$$

$$|B_4(z)|^2 \left\{k|B_4(z)|^2 - \frac{k^2 - 6k + 1}{2(k-1)}\right\} < 1\,; \tag{36}$$

jetzt machen wir uns eine kurze Übersicht von allem, was bisher in dem Satz 8 bewiesen wurde:

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| < 1$$

$$\left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1\right|^2 = \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right|^2 \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} + 1\right|^2 =$$

$$= |B_4(z)|^2 \{1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)| \cos \varphi_2\} =$$

$$= |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - 2(k+1)\,|w_4(z)| \cos \varphi_2]\} \leqq$$

$$\leqq |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}\,(k+1)\,|w_4(z)|]\} \leqq$$

$$\leqq |B_4(z)|^2 \left\{k|B_4(z)|^2 - \frac{k^2 - 6k + 1}{2(k-1)}\right\}.$$

Die Bedingung (1) ist also bestimmt erfüllt, soweit die Ungleichung (36) gilt. Aus dieser aber folgt

$$|B_4(z)|^4 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5k-1}{k^2 - k}\right)|B_4(z)|^2 < \frac{1}{k}, \tag{37}$$

wenn $k \to \infty$ sehen wir, dass die Ungleichung (37) bestimmt erfüllt ist, wenn die Ungleichung

$$|B_4(z)|^4 - \tfrac{1}{2}|B_4(z)|^2 < 0 \tag{38}$$

gilt und daraus endlich

$$|B_4(z)|^2 < \tfrac{1}{2} \tag{39}$$ [1]

---

[1]) Nach der völligen Ausarbeitung von dieser Abhandlung ist es mir gelungen die Ungleichung (39) durch eine schärfere zu ersetzen und zwar $|B_4(z)|^2 < 1$, aus welcher die Abschätzung $0{,}98 < r < 0{,}99$ hervorgeht; näheres in weiterer Arbeit.

Nach dem Satz 6, der Bemerkung für $v = 4$, erhält man dann

$$|B_4(z)|^2 \leqq \frac{\sqrt{r}}{4} \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - \frac{1}{2}\sqrt{(r)} \operatorname{arctg} \sqrt{r} < \frac{1}{2}$$

oder

$$\sqrt{(r)} \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - 2\sqrt{(r)} \operatorname{arctg} \sqrt{r} < 2$$

und daraus folgt

$$0{,}90 < r < 0{,}91 .$$

Bemerkung. Über die zur Ungleichung (39) führende Methode behandle ich eingehend in einer selbständigen Arbeit „Ein Satz über beschränkte Funktionen".

III

Zuletzt beweise ich entsprechende Sätze über eine reguläre, ungerade, schlichte Funktion $g(z)$.

Satz 9. *Es sei*

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, ungerade, schlichte Funktion, welche dort die Bedingung*

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \tag{2}$$

erfüllt. Dann ist

$$|c_{2n-1}| \leqq 1, \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Beweis: Ist die Funktion $g(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär, ungerade und schlicht dann ist dort die gerade Funktion

$$\frac{g(z)}{z} = 1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-2} + \ldots$$

oder

$$\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-2} + \ldots$$

auch regulär.
Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Bedingung (2)

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{2}\right\} > 0,$$

erhält man mit Benutzung des Satzes 1 die Ungleichung

$$|c_{2n-1}| \leqq 1, \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Die Grenze ist genau; sie wird durch die ungerade, schlichte Funktion

$$g(z) = \frac{z}{1 - z^2} = z + z^3 + z^5 + \ldots + z^{2n-1} + \ldots, \quad |z| < 1$$

erreicht.

Satz 10. *Es sei*

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, ungerade, schlichte Funktion. Die Bedingung*

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \tag{2}$$

erfüllt jede ungerade, schlichte Funktion im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}90 < r < 0{,}91\,;$$

r ist die zwischen 0 *und* 1 *gelegene Wurzel der Gleichung*

$$r^2 \log \frac{1 + r^2}{1 - r^2} = 2\,.$$

Beweis. Man kann wie beim Beweis des Satzes 7 fortschreiten. Die Bedingung (2) ist mit der Ungleichung

$$\left|\frac{g(z)}{z} - 1\right| < \left|\frac{g(z)}{z}\right| \tag{40}$$

äqvivalent und da die Funktion $g(z)/z$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und von 0 verschieden ist, folgt daraus

$$\left|1 - \frac{z}{g(z)}\right| < 1\,. \tag{41}$$

Ist die Funktion $g(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist dort, nach dem Satz 3a, die Funktion

$$\sqrt[\nu]{[g(z^\nu)]} = \sqrt[\nu]{(z^\nu + c_3 z^{3\nu} + \ldots + c_{2n-1} z^{\nu(2n-1)} + \ldots)} =$$
$$= z + c_{2\nu+1}^{(\nu)} z^{2\nu+1} + \ldots + c_{2\nu n+1}^{(\nu)} z^{2\nu n+1} + \ldots, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

auch regulär und schlicht und weiter ist im Gebiet $0 < |z| < 1$ die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{[g(z^\nu)]}} = \frac{1}{z} + b^{(\nu)}_{2\nu-1} z^{2\nu-1} + \ldots + b^{(\nu)}_{2\nu n-1} z^{2\nu n-1} + \ldots \tag{42}$$

auch regulär und schlicht und für ihre Koeffizienten gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (2\nu n - 1) |b^{(\nu)}_{2\nu n-1}|^2 \leqq 1$. Aus der Relation (42) erhält man

$$\frac{z}{g(z)} = [1 + b^{(\nu)}_{2\nu-1} z^2 + \ldots + b^{(\nu)}_{2\nu n-1} z^{2n} + \ldots]^\nu = [1 + B^{(\nu)}_{2\nu}(z^2)]^\nu \tag{43}$$

und daraus folgt für $\nu = 1$

$$\frac{z}{g(z)} = 1 + B^{(1)}_2(z^2)\,. \tag{44}$$

Für den absoluten Betrag von $B^{(1)}_2(z^2)$ haben wir aber die folgende Abschätzung (45)

$$|B^{(1)}_2(z^2)| \leqq \sqrt{\left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) |b^{(1)}_{2n-1}|^2\right]} \sqrt{\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{4n}}{2n-1}\right]} \leqq \sqrt{\left[\frac{r^2}{2} \log \frac{1+r^2}{1-r^2}\right]},$$

so dass die Ungleichung (41) die Form

$$|B^{(1)}_2(z^2)| < 1 \quad \text{oder} \quad r^2 \log \frac{1+r^2}{1-r^2} < 2 \tag{46}$$

hat und daraus wegen (20)

$$0{,}90 < \sqrt{(0{,}83)} < r < \sqrt{(0{,}84)} < 0{,}91\,.$$

Bevor ich die Verschärfung des Satzes 10 beweise, muss ich das Analogon der Formel (9) für die reguläre, ungerade, schlichte Funktion $g(z)$ nach Radó [12e] ableiten.

Nach dem Satz 3b existiert zu jeder, im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären, ungeraden, schlichten Funktion

$$\psi_2(z) \equiv g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots,$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

welche mit der Funktion $g(z)$ durch folgende Beziehung verbunden ist

$$g(z) = \sqrt{[f(z^2)]}\,.$$

Man kann dann die Formel (9) benutzen

$$\sqrt{\frac{|z|^2}{(1+|z|^2)^2}} \leqq |g(z)| = |\sqrt{[f(z^2)]}| \leqq \sqrt{\frac{|z|^2}{(1-|z|^2)^2}}, \quad |z| < 1$$

oder

$$\frac{|z|}{1+|z|^2} \leqq |g(z)| \leqq \frac{|z|}{1-|z|^2} \tag{47}$$

und daraus erhält man für die Funktion $g(z)/z$ die Abschätzungen

$$\frac{1}{1+|z|^2} \leqq \left|\frac{g(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{1-|z|^2} \tag{48}$$

und daraus endlich folgt — die Funktion $g(z)$ ist im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und von 0 verschieden — ähnlich wie bei den Formeln (13) und (14)

$$0 < 1 - |z|^2 \leqq \left|\frac{z}{g(z)}\right| \leqq 1 + |z|^2 < 2\,, \quad |z| < 1\,. \tag{49}$$

Satz 11. *Es sei*

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ *reguläre, ungerade, schlichte Funktion. Die Bedingung*

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \tag{2}$$

erfüllt jede ungerade, schlichte Funktion im Innern des Kreises vom Radius r

$$0{,}95 < r < 0{,}96\,;$$

r *ist die zwischen* 0 *und* 1 *gelegene Wurzel der Gleichung*

$$r \log\frac{1+r}{1-r} - 2r \operatorname{arctg} r = 2\,.$$

Beweis. Alles verläuft wie beim Beweis des Satzes 8. Die Ungleichung (41)

$$\left|1 - \frac{z}{g(z)}\right| < 1 \quad \text{oder} \quad \left|\frac{z}{g(z)} - 1\right| < 1$$

kann man schreiben

$$\left|\sqrt{\left(\frac{z}{g(z)}\right)} - 1\right| \left|\sqrt{\left(\frac{z}{g(z)}\right)} + 1\right| < 1\,. \tag{50}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, soweit die Funktion

$$W_2(z) = \sqrt{\frac{z}{g(z)}} = 1 + B_4^{(2)}(z^2)$$

(siehe (43)) die Abbildung des Einheitskreises $|z| < 1$ auf ein in der rechten Hälfte der

Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$ gelegenes Gebiet vermittelt. Die Ausdrücke

$$\left|\sqrt{\left(\frac{z}{g(z)}\right)} - 1\right| \quad \text{und} \quad \left|\sqrt{\left(\frac{z}{g(z)}\right)} + 1\right|$$

stellen die Entfernungen des Punktes $W_2(z)$ von den Punkten $+1$ resp. -1 dar und für den absoluten Betrag der Funktion $W_2(z)$ haben wir aus der Relation (49)

$$(51)\quad 0 < \sqrt{(1 - |z|^2)} \leqq \left|\sqrt{\frac{z}{g(z)}}\right| = |W_2(z)| \leqq \sqrt{(1 + |z|^2)} < \sqrt{2}\,, \quad |z| < 1\,.$$

Wir sehen also, dass die Ungleichung (50) bestimmt erfüllt ist, wenn die Ungleichung

$$(52)\qquad |B_4^{(2)}(z^2)|^1 < \tfrac{1}{2}$$

gilt. Für den absoluten Betrag von $B_4^{(2)}(z^2)$ haben wir aber folgende Abschätzung

$$|B_4^{(2)}(z^2)| \leqq |b_3^{(2)}|\, r^2 + |b_7^{(2)}|\, r^4 + \ldots + |b_{4n-1}^{(2)}|\, r^{2n} + \ldots \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\left[\sum_{n=1}^{\infty} (4n-1)\, |b_{4n-1}^{(2)}|^2\right]} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r^{4n}}{4n-1}\right]} \leqq \sqrt{1}\, \sqrt{\left[\frac{r}{4}\log\frac{1+r}{1-r} - \frac{r}{2}\operatorname{arctg} r\right]}\,.$$

Siehe Satz 6, Bemerkung, $\nu = 4$.

Es muss also

$$r\log\frac{1+r}{1-r} - 2r \operatorname{arctg} r < 2$$

und daraus wegen (39)

$$0{,}95 < \sqrt{(0{,}90)} < r < \sqrt{(0{,}91)} < 0{,}96\,.$$

Zu Ende beweise ich einen Satz, welcher uns eine gewisse Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten der Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ zeigt.

Satz 12. *Es sei*

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, ungerade, schlichte Funktion, für welche

$$|c_{2n-1}| \leqq 1\,, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

ist, dann gilt für die schlichte Funktion

$$(53)\qquad [g(z^{1/2})]^2 = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

die Abschätzung

$$|a_n| \leqq n\,, \quad (n = 2, 3, \ldots)\,.$$

Beweis. Nach dem Satz 3b existiert zu jeder im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären, ungeraden, schlichten Funktion

$$\psi_2(z) = g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots,$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

welche mit der Funktion $g(z)$ durch die Relation

$$g(z) = \sqrt{[f(z^2)]}$$

verbunden ist. Die Funktion

$$\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = \sqrt{(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots)} = 1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \dots \tag{54}$$

ist offenbar im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und aus (54) folgt

$$1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots = (1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \dots)^2 . \tag{55}$$

Wir erhalten da analogische Formeln wie im Satz 2, aus welchen folgt, dass

$$|a_n| \leqq n, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

ist.

Literaturverzeichnis

[1] *Bieberbach:* Lehrbuch der Funktionentheorie II., 1931, S. 71—83.
[2] *Privalov:* Analytische Funktionen, 1955, (tschechische Übersetzung), S. 475—500.
[3] *Hayman:* Multivalent Funktions, 1960, (russische Übersetzung).
[4] *Jenkins:* Univalent Funktions and conformal mapping, 1960, (russische Übersetzung).
[5] *Löwner:* Mathematische Annalen, *89*, 1923, S. 103—121.
[6] *Garabedian* and *Schiffer:* Journal Rational Mechanics and Analysis, *4*, 1955, S. 427—465.
[7] *Littlewood:* Procedings of the London Mathematical Society (2), *23*, 1925, S. 498.
[8] *Littlewood* and *Paley:* Journal London Math. Soc. *7*, 1932, S. 167—169.
[9] *Landau:* Mathematische Zeitschrift, *30*, 1929, S. 635—638.
[10] *Dieudonné:* Comptes Rendus, *192*, 1931, S. 1148—1150.
[11] *Rogosinski:* Mathematische Zeitschrift, *35*, 1932, S. 93—121.
[12] *Pólya-Szegö:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I. und II. Band, 1925. a) IV. Abschn., Nr. 161, b) III. Abschn., Nr. 235, c) IV. Abschn., Nr. 136, 139, d) IV. Abschn. Nr. 79, 80, e) IV. Abschn., Nr. 154.
[13] *Grunsky:* Jahresbericht der deutschen Math. Ver., *43*, 1933, 1. Abt., S. 140—143.
[14] *Fekete-Szegö:* Journal London Math. Soc. 8, 1933, S. 85—89.
[15] *Dvořák:* Časopis, *63*, 1934, S. 9—16, (tschechisch).

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Nerudova 32.

Výtah

O FUNKCÍCH PROSTÝCH I

Oldřich Dvořák, Praha

V této práci se zabývám problémem koeficientů regulární, prosté, normované funkce v kruhu jednotkovém $|z| < 1$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \; f(0) = 0, \; f'(0) = 1, \; |z| < 1$$

a dokazuji o ní, že

1. splňuje-li tam podmínku

$$\mathfrak{R}\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2}, \tag{1}$$

plyne z toho domněnka Bieberbachova $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$; (Věta 2);

2. že podmínku (1) splňují všechny prosté funkce uvnitř kruhu o poloměru r, pro nějž platí $0{,}83 < r < 0{,}84$, (Věta 7) a tento odhad zostřuji na $0{,}90 < r < 0{,}91$, (Věta 8).

K důkazu domněnky Bieberbachovy, ve spojení s podmínkou (1), používám jedné věty Caratheodoryho, pojednávající o ohraničenosti koeficientů funkce regulární v kruhu jednotkovém a nabývající tam hodnot s pozitivní reálnou částí (Věta 1).

K numerickým odhadům pro r používám

1. geometrické interpretace podmínky (1),

2. Bieberbachovy věty o ploše pro funkci

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]}} = \frac{1}{z} + b^{(\nu)}_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^{\nu n-1} + \ldots, \quad 0 < |z| < 1, \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

která je vždy prostá, pokud je $f(z)$ prostá, (Věta 3 a 4),

3. věty o deformaci, (Věta 5),

4. možnosti vyjádřit prostou funkci $f(z)$ ve tvaru

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + B_\nu(z)]^\nu, \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

kde

$$B_\nu(z) = b^{(\nu)}_{\nu-1} z + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^n + \ldots$$

je regulární, ohraničená funkce v kruhu jednotkovém $|z| < 1$, pro jejíž koeficienty platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu n - 1) |b^{(\nu)}_{\nu n-1}|^2 \leqq 1$$

a pro ní samou pak odhad

$$|B_\nu(z)| \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{\nu - 1} \log \frac{1}{1 - r^2}\right)}.$$

(Věta 6).

Analogické výsledky dokazují o regulární, liché, prosté funkci v kruhu jednotkovém $|z| < 1$

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots,\ g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ |z| < 1\,;$$

1. splňuje-li tam podmínku

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}, \tag{2}$$

plyne z toho $|c_{2n-1}| \leqq 1$, ($n = 2, 3, \ldots$); (Věta 9);

2. podmínku (2) splňují všechny liché, prosté funkce uvnitř kruhu o poloměru r, pro nějž platí $0{,}90 < r < 0{,}91$, (Věta 10) a tento odhad zostřuji na $0{,}95 < r < 0{,}96$ (Věta 11). Nakonec dokazuji jednu větu o vztahu mezi koeficienty funkce $f(z)$ a funkce $g(z)$. (Věta 12).

Резюме

ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ, I

ОЛЬДРЖИХ ДВОРЖАК (Oldřich Dvořák), Прага

В настоящей работе я занимаюсь проблемой коэффициентов регулярной, однолистной, нормированной функции в единичном круге $|z| < 1$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ |z| < 1$$

и показываю про нее, что

1. если она удовлетворяет там условию

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2}, \tag{1}$$

из этого вытекает гипотеза Бибербаха $|a_n| \leqq n$ ($n = 2, 3, \ldots$); (Теорема 2)

2. условие (1) выполняют все однолистные функции внутри круга радиуса r для которого имеют место неравенства $0{,}83 < r < 0{,}84$ (Теорема 7), причем ету оценку улучшаю так: $0{,}90 < r < 0{,}91$ (Теорема 8).

При доказательстве предположения Бибербаха пользуюсь совместно с условием (1) одной теоремой Каратеодори, касающейся ограниченности коэффициентов функции, регулярной в единичном круге и принимающей там значения с положительной вещественной частью (Теорема 1).

Для числовых оценок r пользуюсь

1. геометрической интерпретацией условия (1),
2. теоремой Бибербаха о площади для функции

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{f(z^\nu)}} = \frac{1}{z} + b^{(\nu)}_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^{\nu n-1} + \ldots, \; 0 < |z| < 1, \; (\nu = 2, 3, \ldots)$$

которая является всегда однолистной, если только $f(z)$ будет однолистной (Теоремы 3 и 4),

3. теоремой о деформации (Теорема 5),
4. возможностью представить однолистную функцию $f(z)$ в виде

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + B_\nu(z)]^\nu, \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

где

$$B_\nu(z) = b^{(\nu)}_{\nu-1} z + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^n + \ldots$$

– регулярная, ограниченная функция в единичном круге $|z| < 1$, для коэффициентов которой имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\nu n - 1) \left|b^{(\nu)}_{\nu n-1}\right|^2 \leqq 1$$

и для нее самой оценка

$$|B_\nu(z)| \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{\nu - 1} \log \frac{1}{1 - r^2}\right)}$$

(Теорема 6).

Аналогичные результаты я доказываю для регулярной, нечетной однолистной функции в единичном круге $|z| < 1$

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots, \; g(0) = 0, \; g'(0) = 1, \; |z| < 1;$$

1. если она удовлетворяет там условию

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}, \tag{2}$$

из этого вытекает $|c_{2n-1}| \leqq 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$ (Теорема 9);

2. усовию (2) удовлетворяют все нечетные однолистные функции внутри единичного круга радиуса r, выполняющего неравенства $0{,}90 < r < 0{,}91$ (Теорема 10), причем эту оценку улучшаю так, что $0{,}95 < r < 0{,}96$ (Теорема 11).

Наконец, я доказываю одну теорему и взаимном соотношении между коэффициентами функции $f(z)$ и функции $g(z)$. (Теорема 12).