Bohdan Zelinka

K jednomu problému S. M. Ulama

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 219--221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108148

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

K JEDNOMU PROBLÉMU S. M. ULAMA

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo 2. dubna 1966)

V [1], str. 28, je položena tato otázka:

Nechť A a B jsou nekonečné množiny, pro něž existuje transfinitní posloupnost bodových transformací $t_\xi(a) \in B$ pro $a \in A$. Transformace t_ξ mají tyto vlastnosti: 1) z toho, že pro některé množiny $X \subset A$ a $Y \subset A$ a některé ξ platí rovnost $t_\xi(X) \cap \cap\, t_\xi(Y) = \emptyset$, plyne, že pro libovolné $\eta > \xi$ je $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$; 2) pro každou nekonečnou množinu $X \subset A$ existuje ξ takové, že $t_\xi(X)$ obsahuje alespoň dva různé prvky, 3) je-li $X \cap Y = \emptyset$ pro konečné X, Y, existuje η takové, že $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$.

Bude mohutnost A vždy menší nebo rovna mohutnosti B? Odpověď na tuto otázku je záporná, což dokážeme konstrukcí protipříkladu.

Budiž A rovno polootevřenému intervalu $(0, 1\rangle$ na množině reálných čísel, budiž B množina všech čísel z $(0, 1\rangle$, která lze vyjádřit ve tvaru $m/2^n$, kde m je přirozené číslo, n nezáporné celé číslo. Pro každé nezáporné celé n definujme rozklad $\mathscr{P}_n$ množiny A na n podmnožin $P_{nk} = (k/2^n, (k+1)/2^n\rangle$ pro $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Je zřejmě $P_{nk} \cap \cap\, P_{nl} = \emptyset$ pro $k \neq l$ a $\bigcup_{k=0}^{2^n-1} P_{nk} = A$. Tedy při pevném n každý prvek $a \in A$ náleží právě do jedné z množin P_{nk} a $\mathscr{P}_n$ je skutečně rozklad množiny A.

Pro každé nezáporné celé n definujme zobrazení t_n množiny A do množiny B takto: $t_n(a) = (k + 1)/2^n$ pro $a \in P_{nk}$.

Ověříme, že posloupnost $\{t_n\}$ skutečně splňuje podmínky.

1) Nechť pro některé množiny $X \subset A$ a $Y \subset A$ a některé ξ platí $t_\xi(X) \cap t_\xi(Y) = \emptyset$. Znamená to, že každá z množin $P_{\xi k}$ může mít neprázdný průnik nejvýše s jednou z množin X, Y. Je-li $\eta > \xi$, pak rozklad $\mathscr{P}_\eta$ je zjemněním rozkladu $\mathscr{P}_\xi$, tedy také každá z množin $P_{\eta k}$ může mít neprázdný průnik nejvýše s jednou z množin X, Y a je tedy $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$.

2) Druhá podmínka platí nejen pro nekonečné množiny, ale pro všechny množiny $X \subset A$ obsahující alespoň dva prvky. Buďtež x, y dva různé prvky z X a budiž n takové přirozené číslo, že $1/2^n < |x - y|$. Pak prvky x a y leží v různých třídách rozkladu $\mathscr{P}_n$ a tedy $t_n(x) \neq t_n(y)$. Množina $t_n(X)$ tedy obsahuje alespoň dva různé prvky, a to $t_n(x)$ a $t_n(y)$.

3) Nechť X a Y jsou konečné a $X \cap Y = \emptyset$. Budiž $q = \min_{x,y \in X \cup Y, x \neq y} |x - y|$ a budiž n takové nezáporné celé číslo, že $1/2^n < q$. Žádné dva z prvků sjednocení $X \cup Y$ neleží v téže třídě rozkladu $\mathcal{P}_n$, tedy z $x \neq y$ plyne $t_n(x) \neq t_n(y)$ pro libovolné prvky x a y z $X \cup Y$. Zobrazení t_n na množině $X \cup Y$ je vzájemně jednoznačné, tedy z $X \cap Y = \emptyset$ vyplývá $t_n(X) \cap t_n(Y) = \emptyset$.

Všechny podmínky jsou tedy splněny. Množina A však má mohutnost kontinua, zatím co množina B má mohutnost $\aleph_0$, poněvadž je podmnožinou množiny racionálních čísel. Tedy mohutnost B je menší než mohutnost A.

Poznámka. Bylo zde použito posloupnosti o ordinálním čísle ω_0. Tuto posloupnost však lze vhodným opakováním členů změnit na posloupnost o vyšším ordinálním čísle, dokonce o ordinálním čísle libovolné mohutnosti (za předpokladu platnosti axiomu výběru). Tak pro mohutnost $\aleph_\alpha$ (α je libovolné ordinální číslo) lze sestrojit posloupnost $\{t'_\xi\}$, $\xi < \omega_\alpha + \omega_0$, tedy mohutnosti $\aleph_\alpha$, takto:

$$t'_\xi(a) = t_0(a) \quad \text{pro} \quad \xi \leqq \omega_\alpha\,,$$
$$t'_\xi(a) = t_n(a) \quad \text{pro} \quad \xi = \omega_\alpha + n \ (n \text{ konečné})\,.$$

Literatura

[1] *S. M. Ulam:* A Collection of Mathematical Problems. The Russian translation: Нерешенные математические задачи, Москва 1964.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Резюме

К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ С. М. УЛАМА

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

С. М. Улам поставил следующую проблему:

„*Пусть A и B — бесконечные множества, для которых существует трансфинитная последовательность точечных преобразований: $t_\xi(a) \in B$ для $a \in A$. Преобразования t_ξ обладают свойствами:* 1) *из того, что для некоторых подмножеств $X \subset A$ и $Y \subset A$ и некоторого ξ имеет место равенство $t_\xi(X) \cap t_\xi(Y) = \emptyset$, следует, что для любого $\eta > \xi$, $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$;* 2) *для всякого бесконечного подмножества $X \cap A$ существует ξ такое, что $t_\xi(X)$ содержит по меньшей мере две различные точки;* 3) *если $X \cap Y = \emptyset$ для конечных X, Y,*

то существует η такое, что $t_\eta(x) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$. Будет ли мощность A всегда меньше или равна мощности B?"

В статье доказывается, что ответ на этот вопрос отрицателен. (Приведен контрпример с card $A = \mathfrak{c}$, card $B = \aleph_0$.)

Summary

TO A PROBLEM OF S. M. ULAM

BOHDAN ZELINKA, Liberec

S. M. Ulam has presented the following problem:

Let A and B be infinite sets, for which there exists a transfinite sequence of point transformations: $t_\xi(a) \in B$ for $a \in A$. Transformations t_ξ have these properties: 1) if for some subsets $X \subset A$ and $Y \subset A$ and some ξ the equality $t_\xi(X) \cap t_\xi(Y) = \emptyset$ holds, then for an arbitrary $\eta > \xi$ there is $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$; 2) for each infinite subset $X \subset A$ there exists a ξ such that $t_\xi(X)$ contains at least two different points; 3) if $X \cap Y = \emptyset$ for finite X, Y, then there exists an η such that $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$. Will the cardinality of A be always less or equal to the cardinality of B?

In this article the proof is given that the answer to this question is negative. (A counterexample is given with card $A = \mathfrak{c}$ card $B = \aleph_0$.)