Bedřich König

Zobecnění sumačního vzorce Euler-Maclaurinova

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 222--223

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108141`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

RŮZNÉ

ZOBECNĚNÍ SUMAČNÍHO VZORCE EULER-MACLAURINOVA

Bedřich König, Praha

(Došlo dne 15. listopadu 1963)

Nechť a, w jsou libovolná reálná čísla, $h > 0$, q, p, k přirozená čísla. Předpokládejme, že funkce f má v intervalu $I = \langle a - w, a - w + qh \rangle$ spojitou derivaci p-tého řádu. Nechť F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu I a číslo x je tvaru $a + k \,.\, h$, kde $0 \leqq k < q$.

Vyjdeme-li z Taylorových vzorců

$$(1)' \qquad F(x + h - w) = F(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} (h - w)^k + r_p(h - w)$$

$$(1)'' \qquad F(x - w) = F(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} (-w)^k + r_p(-w)$$

dostaneme odečtením vztah

$$(2) \quad F(x + h - w) - F(x - w) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} [(h - \omega)^k - (-w)^k] + \varrho_p(h, w)\,;$$

zbytky r_p lze napsat např. v integrálním tvaru.

Provedeme-li analogickou úvahu pro j-tou derivaci funkce F, dostaneme obecněji:

$$(3) \qquad F^{(j)}(x + h - w) - F^{(j)}(x - w) = \sum_{k=1}^{p-j} \frac{f^{(k+j-1)}(x)}{k!} [(h - w)^k - (-w)^k] + \varrho_{p,j}(h, w)$$

kde $j = 0, 1, \ldots, p - 1$ a kde $\varrho_{p,j}$ je zbytek.

Uvážíme-li, že

$$(4) \qquad F(x + h - w) - F(x - w) = \int_{x-w}^{x+h-w} f(y)\, dy\,,$$

$$F^{(j)} = f^{(j-1)} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, p - 1\,,$$

dostaneme vynásobením vztahu (3) výrazem $a_j h^j$ (při vhodné volbě koeficientů a_j, závislých na w a h) a sečtením pro $j = 0, 1, \ldots, p - 1$ vztah

$$(5) \qquad \int_{x-w}^{x+h-w} f(y)\,\mathrm{d}y + \sum_{j=1}^{p-1} a_j h^j \big(f^{(j-1)}(x + h - w) - f^{(j-1)}(x - w)\big) = \\ = h\,.\,f(x) + \sigma_p(h, w)$$

kde σ_p je opět jakýsi zbytek. Ukazuje se, že koeficienty a_j přitom třeba zvolit takto:

$$(6) \quad a_0 = 1$$

$$a_j = \frac{1}{h^j}\left[\frac{w^j}{j!} - \frac{1}{2}\,\frac{w^{j-1}}{(j-1)!}\,h + \sum_{\nu=1}^{[j/2]} (-1)^{\nu-1}\,\frac{B_\nu}{(2\nu)!}\,\frac{w^{j-2\nu}}{(j-2\nu)!}\,h^{2\nu}\right] \text{pro} \quad j > 0$$

kde B_ν jsou Bernoulliho čísla*) a $[j/2]$ znamená celou část čísla $j/2$.

Jestliže v (5) položíme $x = a + kh$ a sečteme pro $k = 0, 1, \ldots, q - 1$, dostaneme konečně vzorec

$$(7) \qquad h\sum_{k=0}^{q-1} f(a + kh) = \int_{a-w}^{a+qh-w} f(y)\,\mathrm{d}y + \sum_{j=1}^{p-1} a_j h^j [f^{(j-1)}(a + qh - w) - \\ - f^{(j-1)}(a - w)] + R_p(w, h)\,;$$

pro $p = 2n$ a $p = 2n + 1$ lze odvodit odhady zbytků

$$(8) \qquad |R_{2n}(w, h)| \leqq \frac{4h^{2n+1} B_n}{(2n)!} \sum_{k=1}^{q} m_k$$

$$(9) \qquad |R_{2n+1}(w, h)| \leqq \frac{2h^{2n+2} B_n}{(2n)!} \sum_{k=1}^{q} t_k\,,$$

kde m_k znamená maximum funkce $|f^{(2n)}|$ a t_k maximum funkce $|f^{(2n+1)}|$ v intervalu $\langle a + (k - 1)\,h - w, a + kh - w\rangle$.

Položíme-li ve vzorci (7) $w = 0$, dostaneme známý sumační vzorec Euler-Maclaurinův; vzorec (7) je tedy zobecněním tohoto vzorce.

---

*) $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$, ...