

Bedřich König

Zobecnění sumačního vzorce Euler-Maclaurinova

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 2, 222--223

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108141>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

R Ů Z N Ě

ZOBECNĚNÍ SUMAČNÍHO VZORCE EULER-MACLAURINOVA

BEDŘICH KÖNIG, Praha

(Došlo dne 15. listopadu 1963)

Nechť a, w jsou libovolná reálná čísla, $h > 0$, q, p, k přirozená čísla. Předpokládejme, že funkce f má v intervalu $I = \langle a - w, a - w + qh \rangle$ spojitou derivaci p -tého řádu. Nechť F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu I a číslo x je tvaru $a + k \cdot h$, kde $0 \leq k < q$.

Vyjdeme-li z Taylorových vzorců

$$(1)' \quad F(x + h - w) = F(x) + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} (h - w)^k + r_p(h - w)$$

$$(1)'' \quad F(x - w) = F(x) + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} (-w)^k + r_p(-w)$$

dostaneme odečtením vztah

$$(2) \quad F(x + h - w) - F(x - w) = \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} [(h - w)^k - (-w)^k] + \varrho_p(h, w);$$

zbytky r_p lze napsat např. v integrálním tvaru.

Provedeme-li analogickou úvahu pro j -tou derivaci funkce F , dostaneme obecněji:

$$(3) \quad F^{(j)}(x + h - w) - F^{(j)}(x - w) = \sum_{k=1}^{p-j} \frac{f^{(k+j-1)}(x)}{k!} [(h - w)^k - (-w)^k] + \varrho_{p,j}(h, w)$$

kde $j = 0, 1, \dots, p - 1$ a kde $\varrho_{p,j}$ je zbytek.

Uvážíme-li, že

$$(4) \quad F(x + h - w) - F(x - w) = \int_{x-w}^{x+h-w} f(y) dy,$$

$$F^{(j)} = f^{(j-1)} \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, p - 1,$$

dostaneme vynásobením vztahu (3) výrazem $a_j h^j$ (při vhodné volbě koeficientů a_j , závislých na w a h) a sečtením pro $j = 0, 1, \dots, p - 1$ vztah

$$(5) \quad \int_{x-w}^{x+h-w} f(y) dy + \sum_{j=1}^{p-1} a_j h^j (f^{(j-1)}(x+h-w) - f^{(j-1)}(x-w)) = \\ = h \cdot f(x) + \sigma_p(h, w)$$

kde σ_p je opět jakýsi zbytek. Ukazuje se, že koeficienty a_j přitom třeba zvolit takto:

$$(6) \quad a_0 = 1 \\ a_j = \frac{1}{h^j} \left[\frac{w^j}{j!} - \frac{1}{2} \frac{w^{j-1}}{(j-1)!} h + \sum_{v=1}^{[j/2]} (-1)^{v-1} \frac{B_v}{(2v)!} \frac{w^{j-2v}}{(j-2v)!} h^{2v} \right] \text{ pro } j > 0$$

kde B_v jsou Bernoulliho čísla*) a $[j/2]$ znamená celou část čísla $j/2$.

Jestliže v (5) položíme $x = a + kh$ a sečteme pro $k = 0, 1, \dots, q - 1$, dostaneme konečně vzorec

$$(7) \quad h \sum_{k=0}^{q-1} f(a + kh) = \int_{a-w}^{a+qh-w} f(y) dy + \sum_{j=1}^{p-1} a_j h^j [f^{(j-1)}(a + qh - w) - \\ - f^{(j-1)}(a - w)] + R_p(w, h);$$

pro $p = 2n$ a $p = 2n + 1$ lze odvodit odhady zbytků

$$(8) \quad |R_{2n}(w, h)| \leq \frac{4h^{2n+1} B_n}{(2n)!} \sum_{k=1}^q m_k$$

$$(9) \quad |R_{2n+1}(w, h)| \leq \frac{2h^{2n+2} B_n}{(2n)!} \sum_{k=1}^q t_k,$$

kde m_k znamená maximum funkce $|f^{(2n)}|$ a t_k maximum funkce $|f^{(2n+1)}|$ v intervalu $\langle a + (k-1)h - w, a + kh - w \rangle$.

Položíme-li ve vzorci (7) $w = 0$, dostaneme známý sumační vzorec Euler-Maclaurinův; vzorec (7) je tedy zobecněním tohoto vzorce.

*) $B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = \frac{691}{2730}, \dots$