Miloš Jasný

О существовании колеблющегося решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$, $f(x) > 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 1, 78--83

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108129`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

О СУЩЕСТВОВАНИИ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$, $f(x) > 0$

МИЛОШ ЯСНЫ (Miloš Jasný), Прага

(Поступило в редакцию 15/V 1959 г.)

В статье приводится новое достаточное условие для того, чтобы уравнение $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$, $f(x) > 0$ имело колеблющееся решение. Автор дополняет этим результаты, полученные недавно Ф. В. Аткинсоном.

Ф. В. Аткинсон [1] доказал необходимое и достаточное условие для того, чтобы каждое решение уравнения

$$y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0\,, \quad f(x) > 0\,, \quad x \geqq a\,, \quad n > 1 \text{ (целое)}, \tag{1}$$

было колеблющимся, и достаточное условие для того, чтобы не существовало колеблющееся решение. Ниже доказанная теорема содержит достаточное условие для существования колеблющегося решения уравнения (1).

Примечание. Если продолжать нетривиальное решение уравнения (1), где $f(x)$ положительна и непрерывна для $x \geqq a$, заданное начальными условиями $y(x_0)$, $y'(x_0)$, вправо за точку x_0, то возможны два случая:

1. Решение $y(x)$ обращается в нуль только в конечном числе точек. Пользуясь теоремой существования к единственности решения, можно решение $y(x)$ неограниченно продолжать.

2. Существует бесконечное множество точек x_i, $x_{i+1} > x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, в которых $y(x_i) = 0$. Если функция $f(x)$ положительна и абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \geqq a$, то каждое решение уравнения (1) можно продолжать на всей полупрямой. Действительно, положим

$$V(x) = \frac{y'^2}{f} + \frac{1}{n}\, y^{2n}\,.$$

Тогда

$$V'(x) = -\frac{y'^2 f'}{f^2}$$

и

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{y'^2}{f} \cdot \frac{f'}{f} \,\mathrm{d}t\,,$$

$$\frac{y'^2}{f} \leqq V(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{y'^2}{f} \cdot \frac{|f'|}{f} \,\mathrm{d}t\,,$$

и по неравенству Беллмана [2], стр. 46,

$$\frac{y'^2}{f} \leqq V(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{|f'|}{f} \,\mathrm{d}t\right).$$

Отсюда и из предположений о функции $f(x)$ вытекает ограничение производной $y'(x)$. Поэтому для решения $y(x)$, которое обращается в нуль в точках x_i ,$(i = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i = \bar{x}$, $\bar{x} < +\infty$, мы имели бы $\lim\limits_{x\to\bar{x}-} y(x) = 0$, и ввиду ограниченности второй производной $y''(x)$ в левой окрестности точки $\bar{x}$, также $\lim\limits_{x\to\bar{x}-} y'(x) = 0$. Слева через точку $(\bar{x}, 0)$ проходили бы два решения: решение $y(x)$ и тривиальное решение, а это невозможно. Итак, нулевые точки решения $y(x)$ не могут иметь конечной предельной точки.

Теорема. *Если функция $f(x)$ положительна и абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке $\langle x_1, x_2\rangle$, $x_1 \geqq a$, и если, кроме того, удовлетворяет условиям*

1. $(n + 1)\, f(x) + xf'(x) \geqq 0$ *для* $x > x_0$,

2. $$\sqrt{x} \int_{x}^{+\infty} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{\left[\int_{t}^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{u}^{+\infty} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]^{\frac{2n-1}{2n-2}}} \leqq M \quad \text{для} \quad x > x_0,\ M = \text{const}\,,$$

то существуют колеблющиеся решения уравнения (1).

Доказательство. Пусть решение $y(x)$ уравнения (1) задано начальными условиями

$$y(x_0) = 0\,, \quad x_0 > 0\,, \quad y'(x_0) = K\,.$$

Докажем, что если $K > 0$ достаточно велико, то решение колеблется.

Допустим наоборот, что $y(x)$ не является колеблющимся, и докажем сначала лемму, дающую оценку для $y'(x)$.

Лемма. *Если $y(x)$ — монотонное решение уравнения* (1), *для которого*

$$\operatorname{sign} y(x) = \text{const.} \quad \text{для} \quad x > x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0\,,$$

то имеет место оценка

$$(2)\qquad |y'(x)| < \left(\frac{1}{2n-2}\right)^{\frac{2n-1}{2n-2}} \int\limits_x^{+\infty} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{\left[\int\limits_t^{+\infty} \mathrm{d}u \int\limits_u^{+\infty} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]^{\frac{2n-1}{2n-2}}} \quad \text{для } x > x_0 .$$

Предположим без ограничения общности, что $y(x)$ положительно при $x > x_0$. Интегрированием уравнения (1) в пределах $x, +\infty$, $x > x_0$ получим

$$(3)\qquad y'(x) = \int\limits_x^{+\infty} f(t)\, y^{2n-1}(t)\,\mathrm{d}t ,$$

откуда следует, что ($y(x)$ возрастает, так как $y(x) > 0$ для $x > x_0$ и $y''(x) = -f(x)\,y^{2n-1} < 0$)

$$y'(x) > y^{2n-1}(x) \int\limits_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t ,$$

и, далее, из

$$\frac{y'(x)}{y^{2n-1}} > \int\limits_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

опять интегрированием в пределах $x, +\infty$ получим

$$\frac{1}{2n-2}\,\frac{1}{y^{2n-2}} > \int\limits_x^{+\infty} \mathrm{d}u \int\limits_u^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t ,$$

так как предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ или положителен или равен $+\infty$. Из последнего неравенства вытекает оценка для $y(x)$:

$$y(x) < \left(\frac{1}{2n-2}\right)^{\frac{1}{2n-2}} \frac{1}{\left[\int\limits_x^{+\infty} \mathrm{d}u \int\limits_u^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2n-2}}} \quad \text{для} \quad x > x_0 .$$

При помощи этой оценки получим из уравнения (3) непосредственно неравенство (2), что и требовалось доказать.

Возвращаясь к доказательству теоремы, из предположения 1 находим, что

$$f(x) \geqq \frac{k}{x^{n+1}} \quad \text{для } x > x_1 ,$$

где k и x_1 — некоторые положительные постоянные. Значит, функция $f(x)$ не „слишком мала“:

$$\frac{1}{f} = O(x^{n+1}) \quad x \to +\infty ,$$

и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^{2n-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ — расходящийся.

Далее, для рассматриваемого решения

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0\,.$$

В противном случае из уравнения (1) мы имели бы

$$y'(x) - \beta = \int_x^{+\infty} f(t)\, y^{2n-1}(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad \beta > 0\,,$$

и

$$y(x) > \alpha x\,, \quad 0 < \alpha < \beta\,,$$

для достаточно больших x, что влечет за собой сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} x^{2n-1} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Возьмем теперь $y'(x_0)$ достаточно большим; пусть

(4) $$y'(x_0) > \frac{lM}{\sqrt{x_0}}, \quad l = \left(\frac{1}{2n-2}\right)^{\frac{2n-1}{2n-2}}.$$

Тогда из леммы и из предположения 2 вытекает, что $y(x)$ не может быть положительным на всей полупрямой $x > x_0$. Существует поэтому следующая за x_0 точка, в которой $y(x)$ обращается в нуль, $y(x_1) = 0$, $x_1 > x_0$. Если положить

$$V(x) = x\left(y'^2(x) + \frac{1}{n} f(x)\, y^{2n}(x)\right),$$

то

$$V(x_1) - V(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} V'(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [y'^2 + \frac{1}{n} f y^{2n} + 2xy'y'' + \frac{1}{n} x f' y^{2n} + 2x f y^{2n-1} y']\, \mathrm{d}x =$$

$$= [yy']_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [-yy'' + \frac{1}{n} y^{2n}(f + xf') + 2xy'(y'' + fy^{2n-1})]\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x_1} y^{2n}[(n+1)f + xf']\, \mathrm{d}x\,, \quad (y(x_0) = y(x_1) = 0,\ y'' = -fy^{2n-1})\,.$$

Поэтому (предположение 1)

$$V(x_1) \geqq V(x_0)\,,$$

откуда

$$\sqrt{x_1}|y'(x_1)| \geqq \sqrt{x_0}|y'(x_0)|\,.$$

По неравенству (4) мы видим, что в точке x_1 также

$$|y'(x_1)| > \frac{lM}{\sqrt{x_1}},$$

что гарантирует существование точки x_2, $x_2 > x_1$, в которой $y(x)$ опять обращается в нуль. Таким образом по индукции докажем существование бесконечной последовательности нулей решения $y(x)$, что противоречит тому, что $y(x)$ монотонна для достаточно больших x. Теорема доказана.

Предположения теоремы выполнены, например, для функции $f(x)$ вида

1. $f(x) = \dfrac{h(x)}{x^{n+1}}$, где $h(x)$ положительна, возрастает и $h(s) \leqq Bh(x)$, $s \in \langle x, x^{1+\varepsilon}\rangle$ при некоторых положительных B и ε.

2. $f(x) = \dfrac{h(x)}{x^\lambda}$, $2 < \lambda < n + 1$ где $h'(x) \geqq -\dfrac{n+1-\lambda}{x} h(x)$ и $0 < A \leqq \dfrac{h(s)}{h(x)} \leqq B$, $s \in \langle x, x^{1+\varepsilon}\rangle$, $B > A > 0$, $\varepsilon > 0$.

В частности, можно положить

$$f(x) = \frac{(\lg x)^\sigma (\lg \lg x)^\tau}{x^{n-1}}, \quad \sigma \geqq 0, \ \tau \geqq 0 \quad \text{или} \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

$$f(x) = \frac{(\lg x)^\sigma (\lg \lg x)^\tau}{x^\lambda}, \quad 2 < \lambda < n + 1.$$

Литература

[1] *Atkinson F. V.*: Pacif. Journ. of Math. 5 Suppl. 1955, 643—648.

[2] *Беллман Р.*: Теория устойчивости решений диф. уравнений, Москва 1954.

Výtah

O EXISTENCI OSCILATORICKÉHO ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$, $f(x) > 0$, $x \geqq a$, $n > 1$

MILOŠ JASNÝ, Praha

F. V. ATKINSON [1] dokázal nutnou a postačující podmínku, aby každé řešení rovnice (1) bylo oscilatorické, a postačující podmínku, aby neexistovalo oscilatorické řešení. Uvedená věta dává postačující podmínku, aby existovalo oscilatorické řešení rovnice (1).

Summary

ON THE EXISTENCE OF AN OSCILLATING SOLUTION OF THE NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

$$y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0,\ f(x) > 0,\ x \geqq a,\ n > 1$$

Miloš Jasný, Praha

F. V. Atkinson [1] has proved a necessary and sufficient condition in order that every solution of the equation (1) oscillates, and a sufficient condition in order that there exists no oscillating solution. The theorem proved in this paper represents a sufficient condition for the existence of an oscillating solution of the equation (1).