Nikolai Alekseevich Izobov; O. P. Stepanovich

Об инвариантности характеристических показателей линейных систем при экспоненциально убывающих возмущениях

Archivum Mathematicum, Vol. 26 (1990), No. 2-3, 107,108--114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107377`

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 26, No. 2—3 (1990), 107—114

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н. А. ИЗОБОВ, О. П. СТЕПАНОВИЧ

(Поступило в редакцию 26-го мая 1989 г.)

Посвящено 90-летию Академика О. Борувки

Резюме. Получено условие совпадения совокупностей характеристических показателей исходной и возмущенной линейных систем и установлена его неулучшаемость.

Ключевые слова. Линейная система, характеристический показатель, коэффициент неправильности, нижний показатель.

Классификация МО. 34 D 05

Пусть: $C^0_{[0,\infty)}$ – множество кусочно-непрерывных и ограниченных на промежутке $[0, +\infty)$ матриц $A(t)$ фиксированного порядка $n \geqq 2$; $\lambda[f]$ и $\underline{\lambda}[f]$ – соответственно характеристический показатель Ляпунова [1, с. 27; 2, с. 17] и нижний показатель Перрона [3; 2, с. 18] также кусочно-непрерывной на $[0, +\infty)$ вектор-функции или матрицы $f(t)$; $\lambda \in R^n$ – вектор с упорядоченными по возрастанию компонентами λ_i.

Будем рассматривать линейную систему

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)\,x, \qquad A \in C^0_{[0,\infty)}, \qquad x \in R^n,$$

с характеристическими показателями [1, с. 34; 2, с. 28] $\lambda_1(A) \leqq \ldots \leqq \lambda_n(A)$, составляющими её характеристическую совокупность $\lambda(A) \in R^n$. Пусть $X_A(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ – нормальная упорядоченная система [1, с. 34; 2, с. 28] решений – столбцов $x_i(t)$ системы (1); $\alpha_k(t)$ – угол между вектором $x_k(t)$ и линейным пространством остальных $n - 1$ векторов $x_i(t) \in X_A(t)$, $\alpha_k(t) \in (0, \pi/2]$; $X_A^{-1}(t) = (\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t))$ – обратная к $X_A(t)$ матрица со строками $\tilde{x}_i(t)$. Величину $\sigma(A) = \max_k \{\lambda[x_k] + \lambda[\tilde{x}_k]\}$ называют коэффициентом неправильности Д. М. Гробмана [4] системы (1) или просто её коэффициентом неправильности. Для него хорошо известно следующее важное в асимптотической теории линейных систем и теории устойчивости свойство [4]: характеристические совокупности $\lambda(A)$ исходной системы (1) и $\lambda(A + Q)$ возмущенной системы

$$(2) \qquad \dot{y} = A(t)\,y + Q(t)\,y, \qquad Q \in C^0_{[0,\infty)}, \qquad y \in R^n,$$

совпадают, если выполнено условие $\lambda[Q] < -\sigma(A)$ (аналогичный результат относительно коэффициента неправильности Ляпунова [1, с. 51] установлен Ю. С. Богдановым [5]). Возникает вопрос о сохранении этого свойства при выполнении более слабого (для неправильных [1, с. 38] систем (1)) условия $\lambda[Q] \leqq -\sigma(A) < 0$.

В настоящей работе при решении этой задачи доказано совпадение характеристических совокупностей $\lambda(A)$ и $\lambda(A + Q)$ соответственно систем (1) и (2) при выполнении условия

$$(3) \qquad \lambda[Q] \leqq -\sigma(A) < -\sigma_0(A) = \min_k \underline{\lambda}[\alpha_k],$$

совпадающего для диагональных систем с указанным выше ослабленным условием, и приведены две теоремы о его неулучшаемости, доказываемые с помощью метода поворотов В. М. Миллионщикова [6, 7; см. также обзор 8].

Теорема 1. *Характеристические совокупности $\lambda(A)$ и $\lambda(A + Q)$ систем* (1) *и* (2) *совпадают, если выполнено условие* (3).

Доказательство. Систему (2) преобразованием [4]

$$y = X_A(t)\,e^{-At}z \equiv L(t)\,z, \qquad A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \qquad \lambda_i = \lambda_i(A),$$

приведем к виду

$$(4) \qquad \dot{z} = Az + \tilde{Q}(t)\,z, \qquad z \in R^n, \qquad t \geqq 0,$$

в котором элементы $\tilde{q}_{ij}(t)$ матрицы $\tilde{Q}(t)$ имеют представления

$$(5) \qquad \tilde{q}_{ij}(t) = [\det X_A(t)]^{-1} \sum_{l=1}^{n} x_{lj}(t) \sum_{k=1}^{n} q_{kl}(t)\,X_{ki}(t)\,e^{(\lambda_i - \lambda_j)t},$$

где $x_{lj}(t)$ и $q_{kl}(t)$ — соответственно элементы матриц $X_A(t)$ и $Q(t)$, а $X_{ki}(t)$ — алгебраические дополнения элементов $x_{ki}(t)$ матрицы $X_A(t)$. Представляя минор $M_{ki}(t)$ элемента $x_{ki}(t)$ в виде определителя матрицы $X^{(ki)}(t)$ n-го порядка, полученной из матрицы $X_A(t)$ заменой элементов $x_{li}(t)$ i-го столбца нулями при $l \neq k$ и единицей при $l = k$, и затем переставляя в матрице $X^{(ki)}(t)$ этот полученный i-ый столбец и 1-ый и осуществляя такую же перестановку i-го и 1-го столбцов в матрице $X_A(t)$, из представлений (5) с помощью формулы п. 5 из работы Р. Э. Винограда [9] вычисления определителя квадратной матрицы получаем неравенства

$$(6) \quad |\tilde{q}_{ij}(t)| \leqq n\,\|Q(t)\|\;\|x_j(t)\|\,|\det X_A(t)|^{-1} \max_k |X_{ki}(t)| \exp(\lambda_i - \lambda_j)\,t \leqq$$
$$\leqq n\,\|Q(t)\|\,[\|x_j(t)\|/\|x_i(t)\| \sin\alpha_i(t)] \exp(\lambda_i - \lambda_j)\,t \equiv n\,\|Q(t)\|\,\Phi_{ij}(t).$$

Получим теперь асимптотические представления для нормы i-ой строки $\tilde{x}_i(t) = (X_{1i}(t), \dots, X_{ni}(t))/\det X_A(t)$ матрицы $X_A^{-1}(t)$. Представляя, как и выше, алгебраические дополнения $X_{li}(t)$ соответствующими определителями n-го порядка и осуществляя указанные перестановки столбцов, с помощью уже использовавшейся формулы п. 5 из [9] для вектора $\tilde{x}_i(t)$ будем иметь представление

$$(7)\quad \tilde{x}_i(t) = h_i(t)/\| x_i(t) \| \sin \alpha_i(t), \quad h_i(t) \equiv ((-1)^{i+1} \sin \alpha_{1i}(t), \dots, (-1)^{i+n} \sin \alpha_{ni}(t)),$$

где через $\alpha_{ki}(t)$ обозначен угол между единичным координатным вектором e_k и линейным пространством $\Pi_i(t)$ векторов $x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t)$. Установим существование такой постоянной $c_i > 0$, чтобы при всех $t \geqq 0$ было выполнено неравенство $\| h_i(t) \| \geqq c_i$. Действительно, предположив противное $\| h_i(t) \| \to 0$ при $t \to +\infty$, получим, что все $\sin \alpha_{ki}(t)$ стремятся к 0 при $t \to +\infty$, $k = 1, \dots, n$. Поэтому при каком-то достаточно большом t можно для всякого координатного вектора e_k (в ортогональной системе координат) указать такой вектор $e_k(t) \in \Pi_i(t)$, что $\sin \sphericalangle \{e_k, e_k(t)\}$ будет достаточно мал. В результате будем иметь n линейно независимых векторов $e_1(t), \dots, e_n(t)$, принадлежащих пространству $\Pi_i(t)$ размерности $n - 1$, — противоречие. Итак, для нормы вектора $h_i(t)$ выполнено неравенство $0 < c_i \leqq \| h_i(t) \| \leqq n$, $t \geqq 0$, а тем самым, в силу (7), и требуемая асимптотическая оценка

$$(8)\qquad 0 < \text{const} = c_i \leqq \| \tilde{x}_i(t) \| \; \| x_i(t) \| \sin \alpha_i(t) \leqq n, \qquad i = 1, \dots, n, \; t \geqq 0.$$

Из (8) для коэффициента неправильности $\sigma(A)$ системы (1) получим новое представление

$$(9)\qquad \sigma(A) = \max_i \{\lambda[x_i] - \underline{\lambda}[x_i \sin \alpha_i]\},$$

в котором $x_i = x_i(t)$ — i-ый столбец — решение её нормальной системы решений $X_A(t)$, а $\alpha_i = \alpha_i(t)$ — угол между вектором $x_i(t)$ и подпространством остальных векторов, составляющих матрицу $X_A(t)$. Из равенства (9) и оценок (6) имеем неравенства $\lambda[\tilde{q}_{ij}] \leqq 0$ при $i \neq j$, а по условию доказываемой теоремы — неравенства $\lambda[\tilde{q}_{ii}] < 0$.

Так как, в силу (9), $\lambda[\Phi_{ij}] \leqq \sigma(A) = \sigma$, то для произвольного числа $8\gamma \in (0, \sigma - \sigma_0)$ найдется такой момент $T(\gamma) \geqq 1$, для которого выполнены неравенства

$$(10)\qquad \ln \Phi_{ij}(t) < (\sigma + \gamma)\, t, \qquad i, j = 1, \dots, n, \; t \geqq T(\gamma).$$

Зафиксируем далее произвольное число $\varepsilon \in (0, \gamma/2^{n+1})$. По определению числа σ_0 (см. условие (3)) существует момент $\tau(\varepsilon) \geqq 1$, для которого

$$(11)\qquad s_i(t) \equiv \sin^{-1} \alpha_i(t) \leqq \exp(\sigma_0 + \varepsilon)\, t, \qquad i = 1, \dots, n, \; t \geqq \tau(\varepsilon).$$

Без нарушения общности считаем $T(\gamma) \geqq \tau(\varepsilon)$. Из неравенств (10) вытекает, в частности, следующее Φ-свойство: если в некоторый момент $t_0 \geqq T(\gamma)$ и для некоторых $i < k$ выполнено неравенство $\Phi_{ik}(t_0) \geqq \sqrt{s_i(t_0)} \exp t_0(\sigma + \gamma)/2 \equiv \varphi_i(t_0)$, то выполнено также и неравенство $\Phi_{li}(t_0) \leqq \varphi_i(t_0)$ при всех $l = i+1, \ldots, n$. Действительно, в случае $l = k$ в силу (11) имеем неравенство $\Phi_{ki}(t_0) \leqq s_k(t_0)$ $\sqrt{s_i(t_0)} \exp[(-\sigma - \gamma) t_0/2] \leqq \varphi_i(t_0)$. Для $l \neq k$, предполагая невыполненным необходимое неравенство $\Phi_{li}(t_0) \leqq \varphi_i(t_0)$, приходим к следующему противоречию $\Phi_{lk}(t_0) = \Phi_{ik}(t_0)\, \Phi_{li}(t_0)/s_i(t_0) > \exp(\sigma + \gamma)\, t_0$ с неравенством (10). Для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ введем в рассмотрение функции

$$M^i(t) = \max \Phi_{ij}(t), \qquad M_i(t) = \max \Phi_{ji}(t), \qquad j = i+1, \ldots, n.$$

Исходя из некоторой точки $t_0^i \geqq T(\gamma)$, в которой $M_i(t_0^i) = \exp(\sigma - \gamma)\, t_0^i$, последовательно построим отрезки $[t_l^i, t_{l+1}^i]$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $l \geqq 0$, с концами, определяемыми для $k \geqq 0$ равенствами (ниже, где это не диктуется необходимостью, будем опускать индекс i у чисел t_l^i)

$$(12)\qquad M^i(t_{4k+j}) = \exp(\sigma - \gamma)\, t_{4k+j}, \quad j = 0, 1; \quad M^i(t_{4k+j}) = \varphi_i(t_{4k+j}), j = 2, 3,$$

так что для рассматриваемых $k \geqq 0$: 1. $M^i(t) > \varphi_i(t)$ на интервалах (t_{4k}, t_{4k+2}) и (t_{4k+3}, t_{4k+4}); 2. $M^i(t) < \exp(\sigma - \gamma)\, t$ на интервалах (t_{4k+1}, t_{4k+4}); 3. отрезки $[t_{4k}, t_{4k+1}]$ и $[t_{4k+2}, t_{4k+3}]$ имеют максимально возможную длину. Заметим, что эти отрезки при некоторых i и k могут вырождаться и в точки на полуоси. Для длин же интервалов (t_{2l-1}, t_{2l}), на которых по построению $\varphi_i(t) < M^i(t) < \exp(\sigma - \gamma)\, t$, справедливы неравенства

$$(13)\qquad t_{2l} - t_{2l-1} \geqq \frac{\sigma - \sigma_0}{4(\sigma + 4M)} t_{2l-1} - c_0, \qquad \sup_{t \geqq 0} \| A(t) \| \leqq M,$$

с некоторой постоянной $c_0 = c_0(A) > 0$. Действительно, в случае $l = 2k+1$ в силу (11), (12) и выбора чисел γ и ε для функции $M^i(t)$ имеем неравенства

$$\begin{aligned}
(\sigma - \sigma_0)\, 4^{-1} t_{2l-1} - \sigma(t_{2l} - t_{2l-1}) &\leqq (\sigma - \gamma)\, t_{2l-1} - 2^{-1}(\sigma + \sigma_0 + \gamma + \varepsilon)\, t_{2l} \leqq \\
&\leqq \ln M^i(t_{2l-1}) - \ln M^i(t_{2l}) = \ln \Phi_{ip}(t_{2l-1}) - \ln M^i(t_{2l}) \leqq \\
&\leqq \ln [\Phi_{ip}(t_{2l-1})/\Phi_{ip}(t_{2l})]^{(8)} \leqq \ln(nc_i^{-1}) + \ln[\| x_p(t_{2l-1}) \|/\| x_p(t_{2l}) \|] + \\
&+ \ln[\| \tilde{x}_i(t_{2l-1}) \|/\| \tilde{x}_i(t_{2l}) \|] + (\lambda_p - \lambda_i)(t_{2l} - t_{2l-1}) \leqq c + 4M(t_{2l} - t_{2l-1}),
\end{aligned}$$

из которых и получаем оценку (13). Аналогичными рассуждениями устанавливается справедливость неравенства (13) и в случае $l = 2k$. При этом предполагаем, что при каждом i реализуется худший случай — последовательность $\{t_l^i\}$ является бесконечной. Она является и неограниченной, так как в противном случае $\{t_l^i\} \uparrow \Theta < +\infty$ функция $M^i(t)$ была бы разрывной в точке $t = \Theta$. Поэтому без нарушения общности точку t_0^i считаем настолько большой, что неравенство

$$(13_1) \qquad t_{2l} - t_{2l-1} \geqq c_1(A)\, t_{2l-1}, \qquad c_1(A) = (\sigma - \sigma_0)/5(\sigma + 4M),$$

выполнено при всех $i = 1, \ldots, n-1$ и $l \geqq 1$.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ определим на $[t_0^i, +\infty)$ функцию

$$b_{i+1}(t) = \begin{cases} \exp(-1)^{1+l} \varepsilon_i t, & t \in (t_{2l}, t_{2l+1}), \\ \exp p_i(t)\, \varepsilon_i t, & t \in [t_{2l+1}, t_{2l+2}],\ l \geqq 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon_i \equiv \varepsilon 2^{n-i}$, $t_l = t_l^i$, с линейной на каждом из своих промежутков определения функцией $p_i(t)$, принимающей значения $p_i(t_{4k}) = p_i(t_{4k+1}) = -1$, $p_i(t_{4k+2}) = p_i(t_{4k+3}) = 1$. Для производной функции $\delta_{i+1}(t)$ справедливы очевидная оценка $|\dot\delta_{i+1}(t)|/\delta_{i+1}(t) \leqq \varepsilon_i$ при $t \in (t_{2l}, t_{2l+1})$ и в силу (13_1) оценки

$$|\dot\delta_{i+1}(t)|/b_{i+1}(t) \leqq \varepsilon_i[1 + |\dot p(t)|\, t] \leqq \varepsilon_i[1 + 2t_l/(t_{2l} - t_{2l-1})] \leqq$$
$$\leqq [3 + 2c_1^{-1}(A)]\, \varepsilon_i,\ t \in (t_{2l-1}, t_{2l}),$$

так что $|\dot\delta_i(t)|/\delta_i(t) \leqq c(A)\, \varepsilon$ при всех $i = 2, \ldots, n$ и $t \geqq t_0 = \max t_0^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Введем также в рассмотрение функции

$$\beta_1(t) \equiv 1, \qquad \beta_i(t) = \prod_{j=2}^{i} \beta_j(t), \qquad i = 2, \ldots, n,\ t \geqq t_0.$$

Для их производных, в силу предыдущего, справедливы оценки

$$(14) \qquad |\dot\beta_i(t)|/\beta_i(t) \leqq nc(A)\, \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n,\ t \geqq t_0.$$

Подвергнем систему (4) β-преобразованию

$$z = \operatorname{diag}[\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)]\, w \equiv \beta(t)\, w, \qquad t \in [t_0, +\infty).$$

В результате получим систему

$$(15) \qquad \dot w = [A - \dot\beta(t)\, \beta^{-1}(t)]\, w + C(t)\, w, \qquad w \in R^n,\ t \geqq t_0,$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами и элементами $c_{ij}(t) = \tilde q_{ij}(t)\, \beta_j(t)/ /\beta_i(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Считая, без нарушения общности, момент t_0 настолько большим, что $n\, \| Q(t) \|\, \exp\sigma(A)\, t + \| \tilde Q(t) \| \leqq \exp \varepsilon t$, $t \geqq t_0$, для функций $c_{ij}(t)$ получим следующие оценки. С учётом (6) и представлений для функций $\delta_k(t)$ имеем в случае $i < j$ неравенства

$$|c_{ij}(t)| \leqq n\, \| Q(t) \|\, \Phi_{ij}(t)\, b_{i+1}(t) \ldots b_j(t) \leqq M^i(t)\, \times$$
$$\times \exp\Big(\varepsilon - \sigma + \sum_{l=i}^{n-1} \varepsilon_l\Big) t < \exp\Big(-\gamma + \varepsilon \sum_{l=0}^{n-1} 2^l\Big) t < \exp(-\gamma t/2),$$
$$t_0 \leqq t \in [t_{4k-1}, t_{4k+4}], \qquad k \geqq 0;$$

$$(16)\quad |c_{ij}(t)| \leqq \exp\Big(\varepsilon - \varepsilon_i + \sum_{k=i+1}^{n-1} \varepsilon_k\Big) t \leqq \exp \varepsilon\Big(-2^{n-i} + \sum_{k=0}^{n-i-1} 2^k\Big) t = \exp(-\varepsilon t),$$

$$t_0 \leqq t \in [t_{4k}, t_{4k+1}], \qquad k \geqq 0.$$

Для диагональных элементов по выбору t_0 и оценок (6) и (11) имеем неравенства $|c_{ii}(t)| \leqq \exp(\sigma_0 - \sigma + 2\varepsilon)\, t \leqq \exp(\sigma_0 - \sigma)\, t/2$, $t \geqq t_0$.

Для оценки $|c_{ji}(t)|$, $j > i$, отметим сначала, что в силу Φ-свойства на отрезках $[t_{4k}, t_{4k+2}]$ и $[t_{4k+3}, t_{4k+4}]$, на которых $M^i(t) \geqq \varphi_i(t)$, необходимо выполнено неравенство $M_i(t) \leqq \varphi_i(t)$, а тем самым и неравенство $M_i(t) < \exp(\sigma - \gamma)\, t$. Поэтому на этих отрезках имеем

$$|c_{ji}(t)| \leqq n\, \| Q(t) \|\, \Phi_{ji}(t)\, [b_{i+1}(t) \ldots b_j(t)]^{-1} \leqq M_i(t) \exp(\varepsilon\, 2^n - \sigma)\, t.$$

На отрезке же $[t_{4k+2}, t_{4k+3}]$ функция $\delta_{i+1}(t)$ совпадает с $\exp \varepsilon_i t$ и поэтому $|c_{ji}(t)|$ на нём оцениаевтся также, как и в (16). Таким образом, $||C(t)|| \leqq \mathrm{d}_0 \exp(-\varepsilon t)$ для всех $t \geqq t_0$. Поэтому и в силу оценок (14) система (15) в соответсвии с теоремой 15.2.1 [2, с. 208] имеет нормальную упорядоченную систему решений $W(t) = [w^{(1)}(t), \ldots, w^{(n)}(t)]$ с удовлетворяющими неравенствам

$$(17)\quad \lambda_l - (1 + n)\, c\varepsilon \leqq \underline{\lambda}[w^{(l)}] \leqq \lambda[w^{(l)}] \leqq \lambda_l + (1 + n)\, c\varepsilon, \qquad l = 1, \ldots, n,$$

нижними и характеристическими показателями её столбцов $w^{(l)}(t)$. Так как $||\beta(t)||$, $||\beta^{-1}(t)|| \leqq \exp \varepsilon t 2^n$, $t \geqq t_0$, то решение $Z^{(l)}(t) = \beta(t)\, w^{(l)}(t)$ системы (4) имеет нижний и характеристический показатели, удовлетворяющие при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ оценкам $\lambda_l - \mathrm{d}\varepsilon \leqq \underline{\lambda}[Z^{(l)}] \leqq \lambda[Z^{(l)}] \leqq \lambda_l + \mathrm{d}\varepsilon$ с некоторой постоянной $\mathrm{d} = \mathrm{d}(A) > 0$, т. е. точный показатель $\underline{\lambda}[Z^{(l)}] = \lambda[Z^{(l)}] = \lambda_l$. Из последних равенств, оценок (17), неравенства $\lambda[\beta^{-1}] \leqq 2^n\varepsilon$ и малости $\varepsilon > 0$ следует нормальность и упорядоченность системы решений $Z(t) = \beta(t)\, W(t)$ системы уравнений (4).

Покажем теперь, что фундаментальная система решений $У(t) = L(t)\, Z(t) = [y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t)]$ системы (2) является нормальной, и докажем равенства $\lambda[y^{(l)}] = \lambda_l$, $l = 1, \ldots, n$. Неравенства $\lambda[y^{(l)}] \leqq \lambda_l$ очевидны, так как $\lambda[L] = 0$. Предположим, что для некоторой линейной комбипнации

$$y(t) \equiv \sum_{s=1}^{p} c_s y^{(l(s))}(t) = L(t) \sum_{s=1}^{p} c_s z^{(l(s))}(t) \equiv L(t)\, z(t)$$

с постоянными $C_s \neq 0$ и индексами $l(s) > l(s-1)$ выполнено равенство $\lambda[y] = \lambda_{l(p)} - \delta$, $\delta > 0$. Из системы (4) для i-ой компоненты $z_i(t)$ её решения $z(t)$ получаем уравнение

$$\dot z_i = \lambda_i z_i + \mathrm{e}^{\lambda_i t}(\tilde{x}_i(t), Q(t)\, y(t)) \equiv \lambda_i z_i + f_i(t),$$

в котором $\lambda[f_i] \leqq \lambda_{l(p)} - \delta$. Поэтому из интегрального представления

$$(18)\qquad z_i(t) = \exp \lambda_i(t - t_0)\Big[z_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau) \exp \lambda_i(t_0 - \tau)\, \mathrm{d}\tau\Big]$$

в случае $\lambda_i < \lambda_{l(p)}$ с использованием леммы Ляпунова о характеристическом показателе интеграла сразу получаем неравенство $\lambda[z_i] \leqq \max\{\lambda_i, \lambda_{l(p)} - \delta\}$. Если же $\lambda_i \geqq \lambda_{l(p)}$, то сходится интеграл

$$I_i(t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} f_i(\tau) \exp \lambda_i(t_0 - \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

и в случае $\lambda_i > \lambda_{l(p)}$ необходимо $z_i(t_0) = -I_i(t_0)$ (в противном случае из (18) имели бы неравенство $\lambda[z_i] = \lambda_i > \lambda_{l(p)}$, противоречащее равенству $\lambda[z] = \lambda_{l(p)}$), что приводит к неравенствам $\lambda[z_i] \leqq \lambda_{l(p)-\delta}$. По этой же причине необходимо существует номер $m \in N(p) = \{i : \lambda_i = \lambda_{l(p)}\}$, для которого $z_m(t_0) + I_m(t_0) \neq 0$. Таким образом, для функций $z_i(t)$ справедливы неравенства $\lambda[z_i] < \lambda_{l(p)}$, если $i \notin N(p)$, и представления

$$z_i(t) = [z_i(t_0) + u_i(t, t_0)] \exp \lambda_{l(p)} t, \qquad \lambda[u_i] < 0,\ i \in N(p),$$

с некоторыми новыми значениями $z_i(t_0)$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{i \in N(p)} |z_i(t_0)| > 0. \tag{19}$$

Поэтому, обозначая через $l_i(t)$ i-ый столбец матрицы преобразования $L(t)$, для решения $y(t)$ системы (2) имеем представление

$$y(t) = \Sigma_1 z_i(t)\, l_i(t) + \Sigma_2 u_i(t, t_0)\, x_i(t) + \Sigma_3 z_i(t_0)\, x_i(t),$$

где суммирование производится: в Σ_1 — по всем индексам $i \notin N(p)$, в Σ_2 и Σ_3 — по всем $i \in N(p)$. Так как $\lambda[l_i] = 0$, то $\lambda[\Sigma_k] < \lambda_{l(p)}$, $k = 1, 2$. В силу же (19) и свойства нормальности системы решений $X_A(t)$ системы (I) получаем $\lambda[\Sigma_3] = \lambda_{l(p)}$. Итак, $\lambda[y] = \lambda_{l(p)}$ и, как следствие, $\lambda[y^{(l)}] = \lambda_l$. Теорема 1 полностью доказана.

Следствие. *Характеристические совокупности $\lambda(A)$ диагональной системы* (I) *и $\lambda(A + Q)$ возмущенной системы* (2) *совпадают, если $\lambda[Q] \leqq -\sigma(A) < 0$.*

Неулучшаемость содержающегося в этом следствии условия устанавливает следующая.

Теорема 2. *Для любых чисел $\sigma > 0$, $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$, $q \geqq 1$, и больших 1 натуральных $n_1, \ldots, n_q$ существует диагональная система* (1) *размерности $n = p_q \equiv n_1 + \ldots + n_q$ с характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \Lambda_k$, $i = p_{k-1} + 1, \ldots, p_k$, $k = 1, \ldots, q$, $p_0 = 0$, и коэффициентом неправильности $\sigma(A) = \sigma$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется матрица $Q_\varepsilon \in C^0_{[0, \infty)}$ порядка n, для которой $\lambda[Q_\varepsilon] \leqq \varepsilon - \sigma$ и характеристические показатели $\lambda_i(A + Q_\varepsilon)$ системы* (2) *все различны и $\lambda_i(A + Q_\varepsilon) \neq \lambda_j(A)$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$.*

Неулучшаемость условия (3) теоремы 1 устанавливает

Теорема 3. *Для любых вектора* $\lambda \in R^n$ *и чисел* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\mu \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ *и* $\sigma > 0$ *существуют система* (I) *с характеристической совокупностью* $\lambda(A) = \lambda$ *и коэффициентом неправильности* $\sigma(A) = \sigma_0(A) = \sigma$ *и удовлетворяющая условию* $\lambda[Q] \leqq -\sigma(A)$ *матрица* $Q \in C^0_{[0, \infty)}$ *n*-го *порядка такие, что* $\lambda(A+Q) = \lambda(A) + (\mu - \lambda_k)\, e_k$.

В заключение предлагаем следующие задачи:

Задача 1 Выяснить, является ли условие (3) теоремы 1 неулучшаемым и в смысле теоремы 2, т. е. для любых ли вектора $\lambda \in R^n$ и чисел $\sigma > \sigma_0 \geqq 0$ существует система (1) с $\lambda(A) = \lambda$, $\sigma(A) = \sigma$ и угловой неправильностью $\sigma_0(A) = \sigma_0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется удовлетворяющая условию $\lambda[Q_\varepsilon] \leqq \varepsilon - \sigma(A)$ матрица $Q_\varepsilon \in C^0_{[0, \infty)}$ *n*-го порядка, для которой $\lambda(A + Q_\varepsilon) \neq \lambda(A)$;

Задача 2. Описать гробмановские спектральные множества $\Gamma_n(A) = \{\lambda(A + Q) \in R^n : \lambda[Q] \leqq -\sigma(A)\}$ неправильных систем (1), в частности, выяснить существование этих множеств с $\mathrm{mes}_n \Gamma_n(A) > 0$;

Задача 3. Пусть $\sigma_\Lambda(A)$ — коэффициент неправильности Ляпунова [1, с. 51] системы (1). Будет ли $\lambda(A + Q) = \lambda(A)$ при выполнении условия $\lambda[Q] \leqq -\sigma_\Lambda(A) < 0$?

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, *Собрание сочинений*. В 6-ти т. Т. 2. Издат. АН СССР, М.—Л., 1956.

[2] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости*. Наука, М., 1966.

[3] O. Perron, *Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungsysteme*. Math. Z., 31 (1929), 748—766.

[4] Д. М. Гробман, *Характеристические показатели систем, близких к линейным*. Матем. сб., 30 (1952), № 1, 121—166.

[5] Ю. С. Богданов, *Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений*. Матем. сб., 41 (1957), № 4, 481—498.

[6] В. М. Миллионщиков, *Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы*. Матем. заметки, 4 (1968), № 2, 173—180.

[7] В. М. Миллионщиков, *Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем*. Сибирский матем. ж., 10 (1969), № 1, 99—104.

[8] Н. А. Изобов, *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений*. Матем. анализ (Итоги науки и техники), 12 (1974), 71—146.

[9] Р. Э. Виноград, *Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем*. Успехи матем. наук, 9 (1954), № 2, 129—136.

Н. А. Изобов, О. П. Степанович
АН БССР, Институт математики
220604 *Минск*
СССР