Archivum Mathematicum

Bedřich Půža

Заметка о разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

Archivum Mathematicum, Vol. 21 (1985), No. 2, 85--92

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107219`

ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Vol. 21, No 2 (1985), 85—92

ЗАМЕТКА О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

Б. ПУЖА, БРНО

(Поступило в редакцию 7-го июня 1983 г)

Резюме. Приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с краевыми условиями функционального типа. Общий результат иллюстрируется на задачах Коши, периодической и линейной двухточечной.

Ключевые слова. Необходимые и достаточные условия существования решения, краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, нелинейные условия с функционалом.

В заметке приводятся на основе результатов работы [5] необходимые и достаточные условия разрешимости задач типа:

$$(f) \qquad u^{(n)} = f(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)})$$

$$(\varphi) \qquad u^{(i-1)}(t_i) = \varphi_i(u, u', \ldots, u^{(n-1)}) \ (= \varphi_i(u)) \ (i = 1, \ldots, n),$$

где R — числовая прямая, $[a, b]$ — сегмент, функция $f: [a, b] \mathrm{x} R^n \to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори (см. напр. [1], [2], [5], [12], [13]), $t_i \in [a, b]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $t_n \in \{a, b\}$ и φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные функционалы, $u^{(k)} = d^k u/\mathrm{d}t^k$ $(k = 1, \ldots, n)$, $u^{(0)} = u$ на $[a, b]$.

Частным случаем задачи (f, φ) являются например задача Коши

$$(\varphi_1) \qquad u^{(i-1)}(a) = c_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

периодическая

$$(\varphi_2) \qquad u^{(i-1)}(a) = u^{(i-1)}(b) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и ленейная

$$(\varphi_3) \qquad \lambda_i u^{(i-1)}(a) + \mu_i u^{(i-1)}(b) = c_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

где $\lambda_i, \mu_i, c_i \in R$, $|\lambda_i| + |\mu_i| \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Под решением задачи (f, φ) разумеется функция $u(t)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ совместно с ее производными до порядка $n - 1$ включительно, удовлетворяющая уравнению (f) для почти всех $t \in [a, b]$ и удовлетворяющая краевым условиям (φ). Если f — непрерывная функция всех аргументов, то решение и уравнения (f), и также задачи (f, φ), непрерывно дифференцируемо до порядка n включительно.

Теорема: *Для разрешимости задачи (f, φ) необходимо и достаточно существование функций $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ абсолютно непрерывных на сегменте $[a, b]$ в месте с их производными до порядка $n - 1$ включительно и таких, чтобы*

$$(1) \qquad \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j \alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j \alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t \in [a, b]\,(i = 1, \dots, n),$$

$$(2) \qquad (-1)^l \Big[v_l(\varphi_i) - \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j \alpha_l^{(i-1)}(t_i)\Big] \leqq 0 \qquad (l = 1, 2;\ i = 1, \dots, n)$$

и для почти всех $t \in [a, b]$ и

$$y_j \in R, \qquad \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k \alpha_1^{(j-1)}(t) \leqq y_j \leqq \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k \alpha_2^{(j-1)}(t) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

соблюдаются неравенства

$$(3) \qquad (-1)^l \Big[\Delta f\Big(t, \Delta y_1, \Delta\sigma_1 y_2, \dots, \Delta \prod_{j=1}^{n-2} \sigma_j y_{n-1}, \Delta\alpha_1^{(n-1)}(t)\Big) - \alpha_l^{(n)}(t)\Big] \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j \operatorname{sign}(t - t_n) \leqq 0 \qquad (l = 1, 2),$$

где $\sigma_i = \operatorname{sign}(t - t_i)$, $t \in [a, b]$, $t_i \in \{a, b\}$ $(i = 1, \dots, n - 1)$, $\prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}$ $(i = 2, \dots, n)$, $\prod_{j=1}^{0} \sigma_j = 1$, $\Delta \in \{-1, +1\}$ и для $i = 1, \dots, n$ есть

$$v_1(\varphi_i) = \inf \Big\{\Delta \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j \varphi_i\Big(\Delta y_1, \Delta\sigma_1 y_2, \dots, \Delta \prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j y_n\Big) : y_j \in C[a, b]\ ^{1}),$$
$$\prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k \alpha_1^{(j-1)}(t) \leqq y_j(t) \leqq \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k \alpha_2^{(j-1)}(t),\ t \in [a, b], j = 1, \dots, n\Big\},$$

$$v_2(\varphi_i) = \sup \Big\{\Delta \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j \varphi_i\Big(\Delta y_1, \Delta\sigma_1 y_2, \dots, \Delta \prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j y_n\Big) : y_j \in C[a, b],$$
$$\prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k \alpha_1^{(j-1)}(t) \leqq y_j(t) \leqq \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k \alpha_2^{(j-1)}(t),\ t \in [a, b], j = 1, \dots, n\Big\}.$$

---

[1]) $C[a, b]$ обозначает множество всех функций одной переменной непрерывных на сегменте $[a, b]$

Если условия (1)—(3) *выполнены, то решение* $u(t)$ *задачи* (f, φ) *удовлетворяет условию*

$$(4)\qquad \prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j\alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \Delta\prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j u^{(i-1)}(t) \leqq \prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j\alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t\in[a, b]\,(i = 1, \dots, n).$$

Доказательство: Для доказательства необходимости достаточно положить $\alpha_l(t) \equiv \Delta u(t)$ на $[a, b]$ $(l = 1, 2)$, где $u = u(t)$ — решение задачи (f, φ).

Пусть существуют функции $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ удовлетворяющие предположениям Теоремы. Пологая $x_i \equiv \Delta_i u^{(i-1)}$ на $[a, b]$, $\Delta_i \in \{-1, +1\}$ $(i = 1, \dots, n)$, получим систему

$$(5)\qquad x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n)\ (i = 1, \dots, n)$$

при $f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \Delta_{i+1}\Delta_i x_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $f_n(t, x_1, \dots, x_n) = \Delta_n f(t, \Delta_1 x_1, \dots, \Delta_n x_n)$ соответствующую уравнению (f). Обозначим далее

$$\varphi_i^*(x_1, \dots, x_n) = \Delta_i\varphi_i(\Delta_1 x_1, \Delta_2 x_2, \dots, \Delta_n x_n)\quad (i = 1, \dots, n).$$

Тогда, так как f удовлетворяет условиям Каратеодори и φ_i — непрерывные функционалы, то и f_i $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют условиям Каратеодори и φ_i^* $(i = 1, \dots, n)$ также непрерывные функционалы. Пологая

$$\alpha_{li}(t) = \prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j\alpha_l^{(i-1)}(t), \qquad t\in[a, b] \qquad \text{и} \qquad \Delta_i = \prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j \qquad (i = 1, \dots, n;\ l = 1, 2)$$

получим из предложений (1)—(3), что

$$(6)\qquad \alpha_{1i}(t) \leqq \alpha_{2i}(t),\quad t\in[a, b]\quad (i = 1, \dots, n)$$

$$(7)\qquad \alpha_{1i}(t_i) \leqq$$
$$\leqq \inf\{\varphi_i^*(x_1, \dots, x_n)\colon x_j\in C[a, b],\ \alpha_{1j}(t) \leqq x_j(t) \leqq \alpha_{2j}(t),\ t\in[a, b],\ j = 1, \dots, n\} \leqq$$
$$\leqq \sup\{\varphi_i^*(x_1, \dots, x_n)\colon x_j\in C[a, b],\ \alpha_{1i}(t) \leqq x_j(t) \leqq \alpha_2{}^j(t),\ t\in[a, b],\ j = 1, \dots, n\} \leqq$$
$$\leqq \alpha_{2i}(t_i)\ (i = 1, \dots, n)$$

и что для почти всех $t\in[a, b]$ и $x_j\in R$, $\alpha_{1j}(t) \leqq x_j \leqq \alpha_{2j}(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ соблюдаются неравенства

$$(8)\qquad (-1)^l[f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_{li}(t), x_{i+1}, \dots, x_n) - \alpha_{li}'(t)]\operatorname{sign}(t - t_i) \leqq 0$$
$$(l = 1, 2;\ i = 1, \dots, n).$$

Поскольку существование абсолютно непрерывных на $[a, b]$ вектор функций $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ удовлетворяющих условиям (6)—(8) эквивалентно существованию решения $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ задачи (5, 9), где

$$(9)\qquad x_i(t_i) = \varphi_i^*(x_1, \dots, x_n)\quad (i = 1, \dots, n)$$

(см. [5], Теорема 1.1), то и существование функций $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ в смысле Теоремы эквивалентно существованию решения $u(t)$ задачи (f, φ).

Так как одновременно решение задачи (5, 9) удовлетворяет неравенствам

$\alpha_{1i}(t) \leqq x_i(t) \leqq \alpha_{2i}(t), \ t \in [a, b] \ (i = 1, \ldots, n),$

(см. [5], неравенсва (1, 4)), то справедливы и неравенсва (4). Теорема доказана.

Заметка 1. Условия (1)–(3) Теоремы можно также выразить в следующей форме:

(1′)
$$\alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)}{2}}(t) \leqq \alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)}{2}}(t), \qquad t \in [a, b] \, (i = 1, \ldots, n),$$

(2′)
$$\Delta\alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)}{2}}(t_i) \leqq$$
$$\leqq \inf \{\varphi_i(y_1, \ldots, y_n) : y_j \in C[a, b], \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3-\Delta(j)}{2}}(t) \leqq y_j(t) \leqq \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3+\Delta(j)}{2}}(t),$$
$$t \in [a, b], j = 1, \ldots, n\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{\varphi_i(y_1, \ldots, y_n) : y_j \in C[a, b], \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3-\Delta(j)}{2}}(t) \leqq y_j(t) \leqq \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3+\Delta(j)}{2}}(t),$$
$$t \in [a, b], j = 1, \ldots, n\} \leqq \Delta\alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)}{2}}(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и почти для всех $t \in [a, b]$ и $y_j \in R$, $\Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3-\Delta(j)}{2}}(t) \leqq y_j \leqq \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3+\Delta(j)}{2}}(t)$ $(j = 1, \ldots, n-1)$

соблюдаются неравенства

(3′)
$$(-1)^l \Delta(n) [f(t, y_1, \ldots, y_{n-1}, \Delta\alpha_l^{(n-1)}(t)) - \Delta\alpha_l^{(n)}(t)] \operatorname{sign}(t - t_n) \leqq 0$$
$$(l = 1, 2),$$

где $\Delta(i) = \Delta \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ и Δ, σ_i $(i = 1, \ldots, n)$ – того же самого характера как в Теореме.

Тогда неравенство (4) принимает вид

(4′)
$$\Delta\alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)}{2}}(t) \leqq u^{(i-1)}(t) \leqq \Delta\alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)}{2}}(t), \qquad t \in [a, b] \, (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть теперь краевые условия (φ) принимают вид (φ_1). Тогда $t_i = a$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sigma_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\operatorname{sign}(t - t_n) = 1$, $v_1^i(\varphi_i) = \Delta c_i$ $(l = 1, 2;$ $i = 1, \ldots, n)$ и из Теоремы прямо вытекает следующее

Следствие 1. Для разрешимости задачи (f, φ_1) необходимо и достаточно существование функций $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ абсолютно непрерывных на сегменте $[a, b]$ в месте с их производными до порядка $n - 1$ включительно и таких, чтобы

$$\alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t \in [a, b] \, (i = 1, \ldots, n),$$
$$\alpha_1^{(i-1)}(a) \leqq \Delta c_i \leqq \alpha_2^{(i-1)}(a) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и чтобы для почти всех $t \in [a, b]$ и $y_j \in R$, $\alpha_1^{(j-1)}(t) \leqq y_j \leqq \alpha_2^{(j-1)}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ соблюдались неравенства

$$(-1)^l [\Delta f(t, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_{n-1}, \Delta \alpha_l^{(n-1)}(t)) - \alpha_l^{(n)}(t)] \leqq 0 \qquad (l = 1, 2).$$

В случае выполнения выше проведенных условий задача (f, φ_1) имеет решение $u(t)$, и это решение удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \Delta u^{(i-1)}(t) \leqq \alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t \in [a, b]\, (i = 1, \ldots, n).$$

При $\Delta = 1$ совпадает Следствие 1. с критерием §15.Гл.2. [13], близкие результаты также находятся в [4] (Т.3.1., 4.1., 4.2.), [9] (Т.3.1., С.3.2.–3.4.) и [3].

Пологая $\varphi_i \equiv u^{(i-1)}(b)$ при $t_i = a$ $(i = 1, \ldots, n)$ либо $\varphi_i \equiv u^{(i-1)}(a)$ при $t_i = b$ $(i = 1, \ldots, n)$, из Теоремы получается результат о разрешимости периодической задачи (f, φ_2). Ниже приведенное Следствие 2. при $n = 2$ или совпадает или близко результатам Т.4.12.3 [1], [6], С.3.1, [7], Т.2. [11], Т.4.2. и Т.4.4.–4.5. [10].

Следствие 2. Для разрешимости задачи (f, φ_2) необходимо и достаточно существование функций $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ абсолютно непрерывных на $[a, b]$ в месте с их производными до порядка $n - 1$ включительно и таких, чтобы соблюдались условия либо

а)
$$\alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t \in [a, b]\, (i = 1, \ldots, n),$$
$$\alpha_1^{(i-1)}(a) \leqq \alpha_1^{(i-1)}(b), \alpha_2^{(i-1)}(b) \leqq \alpha_2^{(i-1)}(a) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и чтобы для всех $t \in [a, b]$ и $y_j \in R$, $\alpha_1^{(j-1)}(t) \leqq y_j \leqq \alpha_2^{(j-1)}(t)$ $(j = 1, \ldots, n - 1)$ соблюдалось неравенство

$$(-1)^l [\Delta f(t, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_{n-1}, \Delta \alpha_l^{(n-1)}(t)) - \alpha_l^{(n)}(t)] \leqq 0 \qquad (l = 1, 2),$$

либо

б)
$$(-1)^{i-1} \alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq (-1)^{i-1} \alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t \in [a, b]\, (i = 1, \ldots, n),$$
$$(-1)^{i-1} \alpha_1^{(i-1)}(b) \leqq (-1)^{i-1} \alpha_1^{(i-1)}(a), (-1)^{i-1} \alpha_2^{(i-1)}(a) \leqq (-1)^{i-1} \alpha_2^{(i-1)}(b)$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

и для почти всех $t \in [a, b]$ и $y_j \in R$, $(-1)^{j-1}\alpha_1^{(j-1)}(t) \leqq y_j \leqq (-1)^{j-1}\alpha_2^{(j-1)}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ соблюдалось неравенство

$$(-1)^{l+n} [\Delta f(t, \Delta y_1, -\Delta y_2, \ldots, \Delta(-1)^{n-2} y_{n-1}, \Delta \alpha_1^{(n-1)}(t)) - \alpha_l^{(n)}(t)] \leqq 0$$
$$(l = 1, 2).$$

В случае выполнения условий а) (б)) решение $u(t)$ периодической задачи (f, φ_2) удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \Delta u^{(i-1)}(t) \leqq \alpha_2^{(i-1)}(t), \qquad t \in [a, b]\, (i = 1, \ldots, n),$$
$$((-1)^{i-1} \alpha_1^{(i-1)}(t) \leqq \Delta(-1)^{i-1} u^{(i-1)}(t) \leqq (-1)^{i-1} \alpha_2^{(i-1)}(t), t \in [a, b]$$
$$(i = 1, \ldots, n)).$$

Заметка 2. Характер Теоремы позволяет также изучать разрешимость периодической задачи с какими либо комбинациями условий типа а) и б) для $i \in \{1, \ldots, n\}$. Совершенно аналогично можно формулировать необходимые и достаточные условия существования решений задачи антипериодической, т. е. задачи (f)

$$u^{(i-1)}(a) = -u^{(i-1)}(b) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Следующее следствие охватывает одновременно выше приведенные результаты о разрешимости задач Коши (φ_1), периодической (φ_2) и антипериодической.

Следствие 3. Задача (f, φ_3) разрешима тогда и только тогда, когда существуют функции $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ абсолютно непрерывные на сегменте $[a, b]$ в месте с их производными до порядка $n - 1$ включительно и такие, что

$$\alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)}{2}}(t) \leqq \alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)}{2}}(t), \qquad t \in [a, b], (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \Delta\left[\lambda_i \alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)\nabla(\lambda_i)}{2}}(a) + \mu_i \alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)\nabla(\mu_i)}{2}}(b)\right] \leqq c_i \leqq \\ \leqq \Delta\left[\lambda_i \alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)\nabla(\lambda_i)}{2}}(a) + \mu_i \alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)\nabla(\mu_i)}{2}}(b)\right] \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Delta(i) = \Delta \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$, $\sigma_i = \nabla_i \operatorname{sign}|\lambda_i \mu_i| + \operatorname{sign}|\lambda_i| - \operatorname{sign}|\mu_i|$, $\nabla_i \in \{-1, +1\}$, $\Delta \in \{-1, +1\}$, $\nabla(\lambda_i) = \operatorname{sign} \lambda_i$, $\nabla(\mu_i) = \operatorname{sign} \mu_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и почти для всех $t \in [a, b]$, $y_j \in R$, $\Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3-\Delta(j)}{2}}(t) \leqq y_j \leqq \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3+\Delta(j)}{2}}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$

соблюдаются неравенства

$$(-1)^l \Delta(n + 1)\left[f(t, y_1, \ldots, y_{n-1}, \Delta\alpha_l^{(n-1)}(t)) - \Delta\alpha_l^{(n)}(t)\right] \leqq 0 \qquad (l = 1, 2). \tag{12}$$

Если выше приведенные условия выполнены, то решение $u(t)$ задачи (f, φ_3) удовлетворяет неравенствам (4′).

Доказательство: Заметим прежде всего, что в краевых условиях (φ_3) можно без ограничения общности предполагать, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ либо $\lambda_i > 0$, либо $\mu_i > 0$.

Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим

$$\begin{aligned} &t_i = a, \quad t_i^* = b, \quad \gamma_i = -\frac{\mu_i}{\lambda_i}, \quad d_i = \frac{c_i}{\lambda_i} \quad \text{если } \lambda_i > 0, \\ &t_i = b, \quad t_i^* = a, \quad \gamma_i = -\frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad d_i = \frac{c_i}{\mu_i} \quad \text{если } \mu_i > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда условия (φ_3) совпадают с условиями

$$u^{(i-1)}(t_i) = \gamma_i u^{(i-1)}(t_i^*) + d_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

В силу Теоремы и Заметки 1. для разрешимости задачи $(f, 14)$ необходимо и достаточно существование функций $\alpha_l(t)$ $(l = 1, 2)$ абсолютно непрерывных на $[a, b]$ в месте с их производными до порядка $n - 1$ включительно и таких, чтобы соблюдались неравенства (10) и

(15)
$$\Delta\left[\alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)}{2}}(t_i) - \gamma_i\alpha^{(i-1)}_{\frac{3-\Delta(i)\nabla(i)}{2}}(t_i^*)\right] \leqq d_i \leqq$$
$$\leqq \Delta\left[\alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)}{2}}(t_i) - \gamma_i\alpha^{(i-1)}_{\frac{3+\Delta(i)\nabla(i)}{2}}(t_i^*)\right] \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\Delta \in \{-1, +1\}$, $\Delta(i) = \Delta\prod_{j=1}^{i-1}\sigma_j$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$, $\sigma_i = \operatorname{sign}(t - t_i)$, $\nabla(i) = \operatorname{sign}\gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и чтобы почти для всех $t \in [a, b]$ и $y_j \in R$, $\Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3-\Delta(j)}{2}}(t) \leqq y_j \leqq$ $\leqq \Delta\alpha^{(j-1)}_{\frac{3+\Delta(j)}{2}}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ соблюдались неравенства (12).

Из (15) с помощю (13) прямо получаются условия (11) с доплонительными условиями положительности либо λ_i, либо μ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Но, нетрудно показать, что неравенства (11) инвариантны к умножению краевых условий (φ_3) постоянной -1, и σ_i соответсвуют выбору $t_i \in \{a, b\}$ в зависимости от значений λ_i, μ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Следствие доказано.

Для $n = 2$ аналогичные результаты находятся в [12] (Т.3.1.2. и Т.3.3.8.), [2] (§§3.–4.Гл.1.) и [8] (Т.4.4).

Надо также подчеркнуть, что в работах [1], [8] и [10] и частично [9], [13] результаты получены при допольнительном условии о монотонности f.

Заметка 3. При ограничениях позволяющих выразить систему краевых условий в форме (φ), можно из Теоремы вывести необходимые и достаточные условия существования решений и задач более общего вида чем $(f, \varphi_1)-(f, \varphi_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. R. Bernfeld and V. Lakshmikantham, *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, Academic Press, Inc. London, 1974.

[2] В. В. Гудков, Ю. А. Клоков, А. Я. Ленин и В. Д. Пономарев, *Двухточечные краевы задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Рига, Зинатне, 1973.

[3] F. A. Howes, *Differential inequalities of higher order and the asymptotic solutions of nonlinear boundary value problems*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 13, No 1, 1982, 61–80.

[4] W. G. Kelley, *Some Existence Theorems for n-th — Order Boundary Value Problems*, J. Differential Equations 18, 1975, 158–169.

[5] И. Т. Кигурадзе и Б. Пужа, *О некоторых краевых задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дифференциальные Уравнения X, № 12 (1976), 2139—2148.

[6] H. W. Knobloch, *Eine neue Methode zur Approximation periodischer Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z. 82, 1963, 177–197.

[7] J. Mawhin, *Recent results on periodic solutions of differential equations*, Inter. Conf. Diff. Eq. California 1974, Academic Press, New York 1975, 537–556.
[8] K. Schmitt, *Applications of Variational Equations to Ordinary and Partial Differential Equations — Multiple Solutions of Boundary Value Problems*, J. Differential Equations 17, 1975, 154–186.
[9] K. Schmitt, *Boundary value problems and comparison theorems for ordinary differential equations*, SIAM J. Appl. Math. 26, 1974, 670–678.
[10] K. Schmitt, *Periodic solutions of systems of second order differential equations*, J. Differential Equations 11, 1972, 180–192.
[11] K. Schmitt, *Periodic solutions of nonlinear second order differential equations*, Math. Z. 98, 1967, 200–207.
[12] Н. И. Василев, Ю. А. Клоков, *Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*, Рига, Зинатне, 1978.
[13] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.

B. Půža
Department of Mathematics,
Faculty of Science, J. E. Purkyně University,
Janáčkovo nám. 2a,
662 95 Brno
Czechoslovakia