Norbert Brunner

Folgenkompaktheit und Auswahlaxiom

Archivum Mathematicum, Vol. 19 (1983), No. 3, 143--144

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/107167`

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIX: 143—144, 1983

FOLGENKOMPAKTHEIT UND AUSWAHLAXIOM

NORBERT BRUNNER
(Eingegangen am 10. Dezember 1980)

Eine Dedekind-Menge ist eine unendliche Menge reeller Zahlen ohne abzählbar-unendliche Teilmenge. Wie P. J. Cohen gezeigt hat, ist die Existenz von Dedekind-Mengen mit den ZF-Axiomen konsistent. T. J. Jech hat in [1] bewiesen, daß Dedekind-Mengen mit der euklidischen Topologie folgenkompakte metrische Räume mit einer abzählbaren Basis sind, die nicht abzählbar kompakt sind. Wir untersuchen in dieser Note, welchen Einfluß die Separabilität auf die Gültigkeit in ZF des Satzes ,,folgenkompakt impliziert abzählbar kompakt,, hat (,,abzählbar kompakt" im Überdeckungssinn). Wir beweisen zuerst ein Standard-Lemma:

Lemma In ZF gilt:

(1) *Abzählbar kompakte Räume mit einer abzählbaren Basis sind kompakt.*

(2) *Separable folgenkompakte metrische Räume sind kompakt.*

(3) *Abgeschlossene Teilräume von abzählbar kompakten Räumen sind abzählbar kompakt.*

Beweis X sei der Raum, $\mathscr{X}$ die Topologie.

(1) Ist $\mathscr{B}$ eine abzählbare Basis von X und $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{X}$ eine offene Überdeckung, so ist $\mathscr{Q} = \{Q \in \mathscr{B} : \exists\, O \in \mathscr{O} : Q \subseteq O\}$ eine abzählbare Verfeinerung von $\mathscr{O}$. Weil X abzählbar kompakt ist, hat $\mathscr{Q}$ eine endliche Teilüberdeckung $\mathscr{P}$, die eine endliche Teilüberdeckung von $\mathscr{O}$ induziert.

(2) $D = \{d_n : n \in \omega\}$ sei eine abzählbare, dichte Teilmenge von X. Die Bälle um $x \in D$ vom Radius $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, bilden eine abzählbare Basis von X, weswegen es nach (1) genügt, die abzählbare Kompaktheit herzuleiten. Sei $(A_n)_{n \in \omega}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $\varphi \neq A_{n+1} \subseteq A_n$. Wir konstruieren ein $x \in \bigcap_{u \in \omega} A_n$. Da D dicht ist, gibt es $d_k \in D$ mit dist $(d_k, A_n) < \frac{1}{n+1}$; $k(n)$ sei das kleinste derartige k. Weil X folgenkompakt ist, hat $(d_{k(n)n \in \omega}$ eine konvergente Teilfolge $(d_{k(n(i))})_{i \in \omega}$ mit $\lim d_{k(n(i))} = x$. Ist $n \in \omega$ fix und $\varepsilon > O$ beliebig, so gibt es $m \in \omega$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$ und $i \in \omega$ mit $kn(i) > m$. Ist $j > i$, so ist dist $(d_{kn(j)}, A_n) \leqq$ $\leqq$ dist $(d_{kn(j)}, A_{kn(j)}) < \varepsilon$ und daher $x \in A_n^- = A_n$.

(3) ist klar. QUED.

Die Bedingung der Separabilität ist jedoch zu schwach, um das Auswahlaxiom aus den Beweisen über allgemeine topologische Räume zu eliminieren.

Satz. *Wenn es eine Dedekind-Menge gibt, so gibt es einen separablen, zusammenhängenden Hausdorffraum mit einer abzählbaren Basis, der folgenkompakt aber nicht abzählbar kompakt ist.*

Beweis. Mit der arctg-Funktion erhält man eine Dedekind-Menge $A \subsetneqq I$, dem Einheitsintervall. $\mathcal{T}$ sei die euklidische Topologie auf I und die Topologie $\mathcal{S}$ werde von der Subbasis $\mathcal{T} \cup \{A^c\}$ erzeugt ($A^c = I \setminus A$). $(I, \mathcal{S}$ ist der gesuchte Raum.

Wegen $\mathcal{S} \supset \mathcal{T}$ ist $\mathcal{S}$ Hausdorff'sch und weil $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat, hat auch $\mathcal{S}$ eine. A^c ist dicht in $(I, \mathcal{S})$ und die Spurtopologie auf A^c ist die euklidische. Weil A keine abzählbare Menge enthält, ist $Q \cap A$ endlich und daher sind die rationalen Zahlen dicht in A^c und somit auch in $(I, \mathcal{S})$: $(I, \mathcal{S})$ ist separabel.

In $(I, \mathcal{S})$ ist A abgeschlossen und die Spurtopologie ist die euklidische. Wegen [1] ist A in dieser Topologie nicht abzählbar kompakt (vgl. das Lemma) und daher ist $(I, \mathcal{S})$ nicht abzählbar kompakt. $(I, \mathcal{S})$ ist jedoch folgenkompakt. Weil nämlich nach Bolzano – Weierstraß $(I, \mathcal{T})$ folgenkompakt ist, enthält jede Folge in A^c eine $\mathcal{T}$-konvergente Teilfolge, die nach der Definition von $\mathcal{S}$ auch $\mathcal{S}$-konvergiert. Und weil A eine Dedekind-Menge ist, ist jede Folge in A endlichwertig und hat daher eine konstante Teilfolge.

$(I, \mathcal{S})$ ist zusammenhängend. Sei O offen und abgeschlossen. O ist im $\mathcal{T}$-Abschluß O^- von O $\mathcal{S}$-dicht und daher $\mathcal{S}$-abgeschlossen. Denn ist $x \in O^-$ und $x \in A$, so sind die $\mathcal{S}$-Umgebungen von x die $\mathcal{T}$-Umgebungen und $x \in cl_{\mathcal{S}} O$.

Ist $x \in A^c$, so haben die $\mathcal{S}$-Umgebungen von x die Form $V \cap A^c$, $V \in \mathcal{T}$. Weil wegen $x \in O^- \, V \cap O \neq \varphi$ ist und A^c $\mathcal{S}$-dicht ist, ist $V \cap O \cap A^c \neq \varphi$ und daher $x \in cl_{\mathcal{S}} O$. Da auch O^c offen-abgeschlossen ist folgt: O^c ist ebenfalls $\mathcal{S}$-abgeschlossen und insgesamt ergibt sich – weil $\mathcal{T}$ zusammenhängend ist: $O = \varphi$ oder $O = I$.

QUED.

LITERATUR

[1] Jech, T. J.: *Eine Bemerkung zum Auswahlaxiom*, Časopis pěst. mat. 93 (1968), 30—31.

N. Brunner
Kaiser Franz Ring 22
A-2500 Baden
Österreich