Bedřich Půža

Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 4, 207--226

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106981`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 207—226, 1977

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БЕДРЖИХ ПУЖА, Брно

(Поступило в редакцию 3-го января 1977)

В настоящей работе исследуются задачи о существовании и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{0.1}$$

удовлетворяющих краевым условиям

$$x_i(t_i) = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \, (i = 1, \dots, n)\,, \tag{0.2}$$

где $f_i : (a, b) \times R^n \to R$ $(i = 1, \dots, n)$, а φ_i $(i = 1, \dots, n)$ — непрерывные функционалы.

Частным видом этой задачи является например, задача Коши-Николетти

$$x_i(t_i) = 0 \qquad (i = 1, \dots\, n) \tag{0.3}$$

и периодическая

$$x_i(a) = x_i(b) \qquad (i = 1, \dots, n)\,. \tag{0.4}$$

В регулярном случае, когда правые части системы (0.1) либо непрерывны, либо удовлетворяют условиям Каратеодори, задачи (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) исследовались многими авторами (см. напр., [2] и [6], где приводится подробная библиография). Общая регулярная задача (0.1), (0.2) изучалась в работе [7].

Целью настоящей статьи является исследование задачи (0.1), (0.2) в сингулярном случае, когда функции $f_i(., x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ вообще, не интегрируемы на $[a, b]$ при фиксированных $x_1, \dots, x_n$.

Сингулярная задача Коши впервые была исследована З. А. Чечиком [8], а задача (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) — И. Т. Кигурадзе [4], [5]. Отметим также работы М. А. Какабадзе [1], [2], [3], посвященные изучению задачи вида

$$x_i(t_i) = \int_a^b x_i(t)\,\mathrm{d}\varphi_i(t) + x_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Отправным пунктом для нас служат методы исследования сингулярных краевых задач, разработанные в монографии И. Т. Кигурадзе [6].

В § 1 устанавливаются достаточные условия существования так называемого обобщенного решения задачи (0.1), (0.2), в § 2 исследуется вопрос абсолютной непрерывности решений и в § 3 приводятся теоремы об единственности решений.

Во всей статье приняты следующие обозначения:

1. R – числовая прямая; R^n – n-мерное евклидово пространство, а $x = (x_i)_{i=1}^n$ – произвольная точка в нем с нормой

$$\| x \| = \sum_{j=1}^{n} | x_j |$$

$$R^n_+ = \{(x_i)_{i=1}^n \in R^n : x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \dots, n)\} ;$$

2. если $x_l = (x_{li})_{i=1}^n$ $(l = 1, 2)$, то

$$x_1 \leqq x_2 \Leftrightarrow x_{1i} \leqq x_{2i} \qquad (i = 1, \dots, n) ;$$

3. $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$ – $n \times n$ – матрица с элементами $s_{ij}(i, j = 1, \dots, n)$;

4. если $q > 1$ и $q_0 > 1$ – действительные числа, то

$$l(q, q_0) = \begin{cases} \left(\dfrac{q_0}{q} - 1\right)^{-1/q_0} \left(\dfrac{q_0}{q\pi} \sin \dfrac{q\pi}{q_0}\right)^{1/q} & \text{при } q < q_0 < +\infty \\ 1 & \text{при } q = q_0, \text{ или } q_0 = +\infty ; \end{cases}$$

5. $C_n(a, b)$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ n-мерных вектор-функций с нормой

$$\| x \|_{C_n(a, b)} = \max \{ \sum_{i=1}^{n} | x_i(t) | : a \leqq t \leqq b\};$$

$$C_n^+(a, b) = \{(x_i)_{i=1}^n \in C_n(a, b) : x_j(t) \geqq 0 \text{ при } a \leqq t \leqq b \qquad (j = 1, \dots, n)\}.$$

6. $\tilde{C}_n(a, b)$ – пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ n-мерных вектор-функций;

7. $L^p(a, b)$ – пространство суммируемых со степенью $p \geqq 1$ на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\| x \|_{L^p(a, b)} = [\int_a^b | x(t) |^p \, dt]^{1/p} \quad ^{1})$$

8. $K(a, b)$ – множество функций $f : (a, b) \times R^n \to R$, удовлетворяющих локальным условиям Каратеодори, т. е. запись $f \in K(a, b)$ означает, что $f(., x)$ измерима на (a, b) при любом $x \in R^n$, $f(t, .)$ непрерывна в R^n при почти всех $t \in (a, b)$ и $\sup \{|f(., x)| : \| x \| \leqq \varrho\} \in L(a, b)$ при любом $\varrho \in (0 + \infty)$;

---

[1]) Когда $p = +\infty$, под этим символом понимается

$$\text{vrai max} \{| x(t) | : a \leqq t \leqq b\}$$

9. T_m (m — натуральное число или 0) — подмножество составленное из m элементов; $T_0 = \emptyset$;

10. $C_n(a, b; T_m)$, $\tilde{C}_n(a, b; T_m)$, $L^p(a, b; T_m)$ и $K(a, b; T_m)$ соответственно, множества функций, принадлежащих $C_n(\alpha, \beta)$, $\tilde{C}_n(\alpha, \beta)$, $L^p(\alpha, \beta)$ и $K(\alpha, \beta)$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus T_m$; при этом будем считать $C_n(a, b; \emptyset) = C_n(a, b)$, $\tilde{C}_n(a, b; \emptyset) = \tilde{C}_n(a, b)$, $L^p(a, b; \emptyset) = L^p(a, b)$ и $K(a, b; \emptyset) = K(a, b)$;

11. $\prod_{i=1}^{n} C(a, b; T_{m_i})$ — пространство n-мерных вектор-функций, i-ая компонента которых принадлежит $C(a, b; T_{m_i})$ $(i = 1, \dots, n)$[2]; под сходимостью последовательности элементов этого пространства $\{(x_{ik})_{i=1}^{n}\}_{k=1}^{+\infty}$ понимается равномерная сходимость каждой последовательности $\{x_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ на любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus T_{m_i}$;

12. если $\varphi\colon \prod_{i=1}^{n} C(a, b; T_{m_i}) \to R$, $\alpha_l \in C_n(a, b)$ $(l = 1, 2)$ и $\alpha_1(t) \leqq \alpha_2(t)$ при $t \in [a, b]$, то

$$\nu_*(\varphi; \alpha_1, \alpha_2) =$$
$$= \inf \left\{\varphi(x_1, \dots, x_n)\colon x \in \prod_{i=1}^{n} C(a, b; T_{m_i}),\ \alpha_1(t) \leqq x(t) \leqq \alpha_2(t) \text{ при } t \in [a, b]\right\},$$
$$\nu^*(\varphi; \alpha_1, \alpha_2) =$$
$$= \sup \left\{\varphi(x_1, \dots, x_n) : x \in \prod_{i=1}^{n} C(a, b; T_{m_i}),\ \alpha_1(t) \leqq x(t) \leqq \alpha_2(t) \text{ при } t \in [a, b]\right\}.$$

Если не будет сказано противное, ниже предполагается, что $-\infty < a < b < +\infty$, $T_{m_i} \subset [a, b]$ при $m_i \neq 0$ $\quad (i = 1, \dots, n)$,

$$f_i \in K(a, b; T_{m_i}) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{0.5}$$

и

$$\varphi_i : \prod_{j=1}^{n} C(a, b; T_{m_j}) \to R \qquad (i = 1, \dots, n) \text{ — непрерывные функицоналы.} \tag{0.6}$$

Следуя М. А. Какабадзе [1], введем

Определение 1. $(x_i)_{i=1}^{n} : [a, b] \to R^n$ *называется обобщенным решением системы* (0.1); *если найдутся такие числовые последовательности* $\{a_{lk}\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{b_{lk}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, \dots, m)$ *и последовательности абсолютно непрерывных и равномерно ограниченных на* $[a, b]$ *функций* $\{x_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$ $\quad (i = 1, \dots, n)$, *что*

$$a \leqq a_{lk} \leqq a_{lk+1} \leqq b_{lk+1} \leqq b_{lk} \leqq b \qquad (l = 1, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{k \to +\infty} (b_{lk} - a_{lk}) = \lim_{k \to +\infty} \int_{a_{lk}}^{b_{lk}} |x_{ik}'(t)|\, dt = 0 \qquad (i = 1, \dots, n;\ l = 1, \dots, m),$$

---

[2]) Очевидно, если $\bigcup_{i=1}^{n} T_{m_i} = \emptyset$, то $\prod_{i=1}^{n} C(a, b; T_{m_i}) = C_n(a, b)$

$x'_{ik}(t) = f_i(t, x_{1k}(t), \ldots, x_{nk}(t))$ *при почти всех* $t \in [a, b] \setminus \bigcup_{l=1}^{m} (a_{lk}, b_{lk}) \quad (i = 1, \ldots, n)$

и

$$\lim_{k \to +\infty} x_{ik}(t) = x_i(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Замечание. Из приведенного определения легко следует, что если

$$f_i \in K(a, b; T_{m_i}) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и $(x_i)_{i=1}^n$ — обобщенное решение системы (0.1), то $x_i \in \widetilde{C}(a, b; T_{m_i})$ $(i = 1, \ldots, n)$ и почти всюду на (a, b) выполняются равенства (0.1).

Следовательно, если $\bigcup_{i=1}^{n} T_{m_i} = \emptyset$, то обобщенное решение системы (0.1) является решением в „классическом смысле".

Если же правые части системы (0.1) имеют сингулярности, то обобщенное решение может быть и разрывной функцией.

§ 1. О разрешимости задачи (0.1), (0.2)

Всюду в этом параграфе под решением задачи (0.1), (0.2) понимается обобщенное решение системы (0.1), удовлетворяющее краевым условиям (0.2).

Теорема 1.1. *Пусть существует вектор-функции* $\alpha_l = (\alpha_{li})_{i=1}^n \in \widetilde{C}_n(a, b)$ $(l = 1, 2)$ *такие, что*

(1.1) $$\alpha_1(t) \leqq \alpha_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b]$$

(1.2) $$\alpha_{1i}(t_i) \leqq v_*(\varphi_i; \alpha_1, \alpha_2) \leqq v^*(\varphi_i; \alpha_1, \alpha_2) \leqq \alpha_{2i}(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и на множестве $a \leqq t \leqq b$, $\alpha_{1j}(t) \leqq x_j \leqq \alpha_{2j}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *соблюдаются неравенства*

(1.3) $$(-1)^l [f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{li}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) - \alpha'_{li}(t)] \operatorname{sign}(t - t_i) \leqq 0$$
$$(l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n).$$

Тогда задача (0,1), (0.2) *имеет решение* $x = (x_i)_{i=1}^n$, *удовлетворяющее неравенствам*

(1.4) $$\alpha_1(t) \leqq x(t) \leqq \alpha_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b].$$

Для доказательства теоремы 1.1 понадобится следующая

Лемма 1.1. *Пусть* $T_m \subset [a, b]$. *Тогда из любой последовательности функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на каждом промежутке* $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus T_m$, *можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом промежутке* $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus T_m$.

Эта лемма легко следует из хорошо известной леммы Арцела-Асколи.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть k — произвольное натуральное число и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если $m_i = 0$, т. е. $T_{m_i} = \emptyset$, то положим

$$f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Если же $T_{m_i} = \{\tau_{i1}, \ldots, \tau_{im_i}\}$, то

$$f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \Delta_{ik} \\ \alpha'_{1i}(t) \dfrac{\alpha_{2i}(t) - x_i + \sigma_i(t)}{\alpha_{2i}(t) - \alpha_{1i}(t) + 2\sigma_i(t)} + \alpha'_{2i}(t) \dfrac{x_i - \alpha_{1i}(t) + \sigma_i(t)}{\alpha_{2i}(t) - \alpha_{1i}(t) + 2\sigma_i(t)} & \\ & \text{при } t \in \Delta_{ik}, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\Delta_{ik} = \bigcup_{j=1}^{m_i} (\tau_{ij} - 1/k, \tau_{ij} + 1/k) \cap [a, b]$, $\sigma_i(t) = 1 - \operatorname{sign}[\alpha_{2i}(t) - \alpha_{1i}(t)]$.

Ввиду (0.5) и (1.3),

$$f_{ik} \in K(a, b),$$

и на множестве $t \in \Delta_{ik}$ и $x_j \in R (j = 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n)$ соблюдаются равенства

$$f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{li}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) = \alpha'_{li}(t) \qquad (l = 1, 2).^{1})$$

Учитывая, кроме того, условия (1.3), заключим, что на множестве $a \leqq t \leqq b$, $\alpha_{1j}(t) \leqq x_j \leqq \alpha_{2j}(t)$ $(j = 1 \ldots, n)$ соблюдаются неравенства

$$(-1)^l [f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{li}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) - \alpha'_{li}(t)] \operatorname{sign}(t - t_i) \leqq 0$$
$$(l = 1, 2; i = 1, \ldots, n).$$

Согласно теореме 1.1 из [7], задача

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n); \ x_i(t_i) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

имеет решение $x_k = (x_{ik})_{i=1}^n \in \tilde{C}_n(a\ b)$, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha_1(t) \leqq x_k(t) \leqq \alpha_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b]. \tag{1.7}$$

Ввиду (1.5) и (1.7),

$$|x'_{ik}(t)| \leqq f_i^*(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \ (i = 1, \ldots, n), \tag{1.8}$$

где

$$f_i^*(t) = |\alpha'_{1i}(t)| + |\alpha'_{2i}(t)| +$$
$$+ \sup \{|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : \alpha_{1j}(t) \leqq x_j \leqq \alpha_{2j}(t) \ (j = 1, \ldots, n)$$
$$\text{при } t \in [a, b]\} \in L(a, b; T_{m_i}).$$

---

[1]) Эти равенства, конечно, теряют смысл в тех точках $t \in \Delta_{ik}$, где не существует хотя бы одной из производных α_{li} $(l = 1, 2)$, номера множества таких точек равна нулю.

Из условий (1.7) и (1.8) следует, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ последовательность функций $\{x_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus T_{m_i}$. Поэтому, согласно лемме 1.1, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{x_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно сходится на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus T_{m_i}$. Числовые последовательности $\{x_{ik}(\tau_{ij})\}_{k=1}^{+\infty}$ $(j = 1, \dots, m_i)$ также будем считать сходящимися.

Положим

$$x_i(t) = \lim_{k \to +\infty} x_{ik} \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Если $T_{m_i} = \emptyset$, то, согласно (1.5) и (1.7),

$$\int_{\Delta_{ik}} | x'_{ik}(t) | \, \mathrm{d}t = \int_{\Delta_{ik}} [| \alpha'_{1i}(t) | + | \alpha'_{2i}(t) |] \, \mathrm{d}t \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty .$$

Поэтому, ввиду определения 1, становится ясным, что x является обобщенным решением системы (0.1).

С другой стороны, перейдя к пределу, когда $k \to +\infty$, в равенствах

$$x_{ik}(t_i) = \varphi_i(x_{1k}, \dots, x_{nk}) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

согласно (0.6), заключим, что $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяют краевым условиям (0.2). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему (0.1) с краевыми условиями вида

$$x_i(t_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} x(t_{ij}) + \mu_i \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1.9}$$

где $a \leqq t, \ t_{ij} \leqq b, \ \lambda_{ij} \in R, \ \mu_i \in R$.

Частным случаем этой задачи является, например, задача Коши-Николетти, периодическая и антипериодическая задачи.

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. *Для разрешимости задачи* (0.1), (1.9) *достаточно существование удовлетворяющих условию* (1.1) *вектор-функций* $\alpha_l = (\alpha_{li})_{i=1}^n \in \tilde{C}_n(a, b)$ $(l = 1,2)$ *таких, чтобы на множестве* $a \leqq t \leqq b$, $\alpha_{1j}(t) \leqq x_j \leqq \alpha_{2j}(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ *соблюдались неравенства* (1.3) *и для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имели бы либо*

$$\lambda_{ij} \geqq 0 \quad (j = 1, \dots, m), \qquad \alpha_{1i}(t_i) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}\alpha_{1j}(t_{ij}) \leqq \mu_i \leqq \alpha_{2i}(t_i) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}\alpha_{2j}(t_{ij}),$$

либо

$$\lambda_{ij} \leqq 0 \quad (j = 1, \dots, m), \qquad \alpha_{1i}(t_i) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}\alpha_{2j}(t_{ij}) \leqq \mu_i \leqq \alpha_{2i}(t_i) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}\alpha_{1j}(t_{ij}).$$

Введем следующее

Определение 2. *Пусть D — некоторое множество функций $x : [a, b] \to R^n$. Функционал $\varphi : D \to R$ называется неубывающим, если*

$$x, y \in D,\ x(t) \leqq y(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y).$$

Следствие 2. *Пусть в $(a, b) \times R^n$ соблюдаются неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [(t - t_i) x_i] \leqq g_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.10}$$

а в $C_n(a, b)$ — неравенства

$$| \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) | \leqq \psi_i(| x_1 |, \ldots, | x_n |) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.11}$$

где $\psi_i : C_n^+(a, b) \to R_+ (i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные, неубывающие функционалы, $g_i(t, x_1, \ldots, x_n) = g_{1i}(t, x_1, \ldots x_n) x_i + g_{2i}(t, x_1, \ldots, x_n)$, а функции $g_{1i} : [a, b] \times R^n_+ \to R$ и $g_{2i} : [a, b] \times R^n_+ \to R_+ (i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют локальным условиям Каратеодори; при этом, каждая $g_{li}(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(l = 1, 2)$ не убывает по $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Тогда для разрешимости задачи (0.1), (0.2) *достаточна разрешимость задачи*

$$\frac{dy_i}{dt} = [g_{1i}(t, | y_1 |, \ldots, | y_n |) y_i + g_{2i}(t, | y_1 |, \ldots, | y_n |)] \operatorname{sign} (t - t_i);$$
$$y_i(t_i) = \psi_i(| y_1 |, \ldots, | y_n |) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.12}$$

Доказательство. Пусть $y = (y_i)_{i=1}^n \in \tilde{C}_n(a, b)$ — решение задачи (1.12). Тогда

$$y_i(t) = y_i(t_i) \exp [\int_{ti}^{t} \tilde{g}_{1i}(\tau) d\tau] + \int_{t_i}^{t} \tilde{g}_{2i}(\tau) \exp [\int_{\tau}^{t} \tilde{g}_{1i}(s) ds] \operatorname{sign} (\tau - t_i) d\tau$$
$$(i = 1, \ldots, n), \tag{1.13}$$

где

$$\tilde{g}_{1i}(t) = g_{1i}(t, | y_1(t) |, \ldots, | y_n(t) |) \operatorname{sign} (t - t_i),$$
$$\tilde{g}_{2i}(t) = g_{2i}(t, | y_1(t) |, \ldots, | y_n(t) |).$$

Поскольку $y_i(t_i) \geqq 0$, $\tilde{g}_{2i}(t) \geqq 0$ при $a \leqq t \leqq b (i = 1, \ldots, n)$, из (1.13) ясно, что

$$y_i(t) \geqq 0 \quad \text{при} \quad a \leqq t \leqq b \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Положим $\alpha_l(t) = (-1)^l y(t)$ $(l = 1, 2)$. Тогда

$$\alpha_1(t) \leqq 0 \leqq \alpha_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b]$$

и, в силу (1.10) и (1.11), для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$\alpha_{1i}(t_i) = - \psi_i(| y_1 |, \ldots, | y_n |) \leqq \nu_*(\varphi_i ; \alpha_1, \alpha_2) \leqq$$
$$\leqq \nu^*(\varphi_i; \alpha_1, \alpha_2) \leqq \psi_i(| y_1 |, \ldots, | y_n |) = \alpha_{2i}(t_i)$$

и на множестве $a \leqq t \leqq b$, $\alpha_{1j}(t) \leqq x_j \leqq \alpha_{2j}(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$

$$(-1)^l[f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{li}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) - \alpha'_{li}(t)] \operatorname{sign}(t - t_i) =$$
$$= f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_{li}(t), x_{i+1}, \ldots, x_n) \operatorname{sign}[(t - t_i)\alpha_{li}(t)] -$$
$$- [g_{1i}(t, |\alpha_{l1}(t)|, \ldots, |\alpha_{ln}(t)|)\alpha_{li}(t) + g_{2i}(t, |\alpha_{l1}(t)|, \ldots, |\alpha_{ln}(t)|)] \leqq 0,$$

т. е. соблюдаются предположения теоремы 1.1. Следствие доказано.

Определение 3. *Пусть* $\psi_i : C_n(a, b) \to R_+ (i = 1, \ldots, n)$ — *непрерывные, неубывающие функционалы. Скажем, что вектор-функция* $(g_i)_{i=1}^n : [a, b] \times R_+^n \to R^n$ *принадлежит классу* $N(a, b; t_1, \ldots, t_n; \psi_1, \ldots, \psi_n)$, *если:*

а) $g_i(t, x_1, \ldots, x_n) = - g_i(t, x_1, \ldots, x_n) x_i + g_{2i}(t, x_1, \ldots, x_n)$, *где* $g_{li} : [a, b] \times R_+^n \to R_+$ $(l = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют локальным условиям Каратеодори; при этом каждая* $(-1)^l g_{li}(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(l = 1, 2)$ *не убывает по* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$;

б) *существует положительная постоянная* c_0 *такая, что*

(1.14) $$|x_i(t)| \leqq c_0 \text{ при } a \leqq t \leqq b \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

какова бы ни была $(x_i)_{i=1}^n \in \tilde{C}_n(a, b)$, *удовлетворяющая неравенствам*

(1.15) $$x'_i(t) \operatorname{sign}[(t - t_i)x_i(t)] \leqq g_i(t, |x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|)$$
$$\text{при } a < t < b;\ |x_i(t_i)| \leqq \psi_i(|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Теорема 1.2. *Пусть в* $(a, b) \times R^n$ *соблюдаются неравенства* (1.10), *а в* $C_n(a, b)$ *неравенства* (1.11), *где* $\psi_i : C_n(a, b) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ — *непрерывные, неубывающие функционалы и*

(1.16) $$(g_i)_{i=1}^n \in N(a, b; t_1, \ldots, t_n; \psi_1, \ldots, \psi_n).$$

Тогда задача (0.1), (0.2) *разрешима.*

Доказательство. Согласно следствию 2 теоремы 1.1, для доказательства теоремы 1.2 достаточно доказать разрешимость задачи (1.12).

Пусть c_0 — положительная постоянная, выбранная согласно определению 2. Положим

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s \leqq c_0 \\ 2 - \dfrac{s}{nc_0} & \text{при} \quad nc_0 < s \leqq 2nc_0, \\ 0 & \text{при} \quad s > 2nc_0, \end{cases}$$

$$\tilde{g}_{2i}(t, x_1, \ldots, x_n) = \chi(\|x\|)\, g_{2i}(t, x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$\tilde{\psi}_i(x_1, \ldots, x_n) = \chi\Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_{C(a,b)}\Big)\psi_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда очевидно существование функции $g_0 \in L(a, b)$ и положительной постоянной r_0 таких, что

$$|\tilde{g}_{2i}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq g_0(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, b],\ (x_j)_{j=1}^n \in R^n \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.17}$$

и

$$|\tilde{\psi}_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqq r_0 \quad \text{при} \quad (x_j)_{j=1}^n \in C_n(a, b) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.18}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} \frac{dx_i}{dt} = [-g_{1i}(t, x_1, \ldots, x_n)\, x_i + \tilde{g}_{2i}(t, x_1, \ldots, x_n)] \operatorname{sign}(t - t_i); \\ x_i(t_i) = \tilde{\psi}_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \end{gathered} \tag{1.19}$$

которая эквивалентна системе функциональных уравнений

$$\begin{aligned} x_i(t) = {} & \tilde{\psi}_i(x_1, \ldots, x_n) \exp\left[-\int_{t_i}^{t} g_{1i}(s, x_1(s), \ldots, x_n(s)) \operatorname{sign}(s - t_i)\, ds\right] + \\ & + \int_{t_i}^{t} \tilde{g}_{2i}(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)) [\operatorname{sign}(\tau - t_i)] \times \\ & \times \exp\left[-\int_{\tau}^{t} g_{1i}(s, x_1(s), \ldots, x_n(s)) \operatorname{sign}(s - \tau)\, ds\right] d\tau \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Принимая во внимание неравенства (1.17) и (1.18), а также неотрицательность функций g_{1i} $(i = 1, \ldots, n)$, с помощью принципа Шаудера легко покажем, что система функциональных уравнений (1.20) разрешима.

Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ – решение системы (1.20), т. е. задачи (1.19). Согласно определению $\tilde{g}_{2i}$ и $\tilde{\psi}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, видно, что соблюдаются неравенства (1.15). Из этих неравенств, ввиду (1.16), вытекают оценки (1.14). Поэтому

$$\tilde{g}_{2i}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = g_{2i}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad \text{при} \quad t \in [a, b],$$

т. е. $(x_i)_{i=1}^n$ является решением задачи (1.12). Теорема доказана.

Из теоремы 1.2 ниже мы выводим эффективные условия разрешимости задачи (0.1), (0.2). Для этого нам понадобится привести несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1.2. *Пусть*

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \| x_j \|_{L^\infty(a;b)} + r_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.21}$$

и

$$(1.22)\qquad g_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\, x_j + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

при этом:

а) $r_{ij},\ r_i \in R_+,\ h_{ij} \in L^{p_{ij}}(a, b),\ \dfrac{1}{p_{ij}} + \dfrac{1}{q_{ij}} = 1,\ 1 \leqq q_{ij} \leqq q_0\ (i, j = 1, \dots, n)$;

б) *функция* $\omega_i : [a, b] \times R_+ \to R_+$ $(i = 1, \dots, n)$ *не убывает по второму аргументу* $\omega_i(., \varrho) \in L(a, b)$ *для любого* $\varrho \in (0, +\infty)$ *и*

$$\lim_{\varrho \to +\infty} \frac{1}{\varrho} \int_a^b \omega_i(t, \varrho)\, dt = 0;$$

в) *собственные числа матрицы* $S = (s_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *с элементами*

$$(1.23)\quad s_{ij} = (b - a)^{1/q_0} r_{ij} + (b - a)^{1/q_{ij}}\, l(q_{ij}, q_0)\, \| h_{ij} \|_{L^{p_{ij}}(a, b)} \qquad (i, j = 1, \dots, n),$$

по модулю меньше единицы. Тогда соблюдается условие (1.16).

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i=1}^{n} \in \tilde{C}_n(a, b)$ удовлетворяет неравенствам (1.15), т. е.

$$(1.24)\qquad x_i'(t)\, \text{sign}\, [(t - t_i)\, x_i(t)] \leqq \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\, |x_j(t)| + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j(t)|)$$
$$\text{при}\quad a < t < b \qquad (i = 1, \dots, n),$$

$$(1.25)\qquad |x_i(t_i)| \leqq \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, \| x_j \|_{L^{q_0}(a, b)} + r_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Согласно лемме 1.2 работы [7], в условиях доказываемой леммы из (1.24) и (1.25) вытекает оценка

$$(1.26)\qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqq \varrho_0 \sum_{j=1}^{n} \left[r_j + \int_a^b \omega_j(\tau, \sum_{i=1}^{n} |x_i(\tau)|)\, d\tau \right] \qquad \text{при}\ a \leqq t \leqq b,$$

где ϱ_0 — положительная постоянная, не зависящая от x_i, r_i и ω_i $(i = 1, \dots, n)$. Возьмем $c_0 > 0$ настолько большим, что

$$\varrho_0 \sum_{j=1}^{n} \left[r_j + \int_a^b \omega_j(\tau, \varrho)\, d\tau \right] < \varrho \qquad \text{при}\ \varrho > c_0.$$

Тогда из (1.26) вытекает оценка (1.14).

Поскольку c_0 не зависит от x_i, этим справедливость леммы доказана.

Замечание 1. По сути дела, мы доказали, что в условиях леммы 1.2 из неравенств (1.15) вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leqq \varrho_0 \sum_{j=1}^{n} \left[r_j + \int_a^b \omega_j(t, c_0)\,\mathrm{d}t \right] \tag{1.27}$$

где ϱ_0 и c_0 — положительные постоянные, не зависящие от $(x_i)_{i=1}^n$.

Замечание 2. Как известно (см. [9]), если $\mathrm{S} = (s_{ij})_{i,j=1}^n$ — неотрицательная матрица, то:

а) все собственные числа S по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда все главные последовательные миноры матрицы $E - \mathrm{S}$ положительны;

б) условие

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} < 1 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

достаточно для того, чтобы все собственные числа матрицы S были по модулю меньше единицы.

Лемма 1.3. *Пусть*

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{0i}(|x_i|) + r_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.28}$$

и

$$g_i(t, x_1, \ldots, x_n) = -h_i(t)\,x_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\,x_j + \omega_i\Big(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|\Big) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.29}$$

где r_{ij}, h_{ij} *и* ω_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* а) *и* б), *леммы* 1.2, $\psi_{0i} : C^+(a, b) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ — *линейные непрерывные функционалы,* $h_i : [a, b] \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *суммируемы и*

$$\alpha_i = \psi_{0i}\left(\exp\left[-\int_{t_i}^{t} h_i(s)\,\mathrm{sign}\,(s - t_i)\,\mathrm{d}s\right]\right) < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.30}$$

Пусть, далее, собственные числа матрицы $\mathrm{S} = (s_{ij})_{i,j=1}^n$,

$$s_{ij} = \frac{\psi_{0i}(1)}{1 - \alpha_i}(b - a)^{1/q_0} \| h_{ij} \|_{L^{p_0}(a,b)} + (b - a)^{1/q_{ij}}\, l(q_{ij}, q_0) \| h_{ij} \|_{L^{p_{ij}}(a,b)}$$
$$(i, j = 1, \ldots, n) \tag{1.31}$$

по модулю меньше единицы. Тогда соблюдается условие (1.16).

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i=1}^n \in C_n(a, b)$ удовлетворяет неравенствам

$$x_i'(t)\,\mathrm{sign}\,[(t - t_i)\,x_i(t)] \leqq -h_i(t)\,|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\,|x_j(t)| + \omega_i\Big(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j(t)|\Big)$$
$$(i = 1, \ldots, n) \tag{1.32}$$

и

(1.33) $$| x_i(t_i) | \leqq \psi_{0i}(| x_i(t) |) + r_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ввиду (1.32),

$$| x_i(t) | \leqq | x_i(t_i) | \exp\left[-\int_{t_i}^{t} h_i(s) \operatorname{sign}(s - t_i) \, ds \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_i}^{t} h_{ij}(\tau) \, | x_j(\tau) | \exp\left[-\int_{\tau}^{t} h_i(s) \operatorname{sign}(s - \tau) \, ds \right] d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_{t_i}^{t} \omega_i(\tau, \sum_{j=1}^{n} | x_j(\tau) |) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} h_i(s) \operatorname{sign}(s - \tau) \, ds \right] d\tau \right| \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

т. е.

$$| x_i(t) | \leqq | x_i(t_i) | \exp\left[-\int_{t_i}^{t} h_i(s) \operatorname{sign}(s - t_i) \, ds \right] + \| \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} | x_j(t) |) \|_{L(a, b)} +$$

(1.34) $$+ \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_i}^{t} | h_{ij}(\tau) | \, | x_j(\tau) | \, d\tau \right| \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Подставляя эти оценки в (1.33), ввиду (1.30) получим

$$| x_i(t_i) | \leqq \tilde{r}_i + \frac{1}{1 - \alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \psi_{0i}\left(\left| \int_{t_i}^{t} h_{ij}(\tau) \, | x_j(\tau) | \, d\tau \right| \right) \leqq$$

$$\leqq \tilde{r}_i + \frac{\psi_{0i}(1)}{1 - \alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{b} h_{ij}(\tau) \, | x_j(\tau) | \, d\tau \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где

(1.35) $$\tilde{r}_i = \frac{r_i}{1 - \alpha_i} + \frac{\psi_{0i}(1)}{1 - \alpha_i} \| \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} | x_j(t) |) \|_{L(a, b)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно неравенству Гельдера,

$$\int_{a}^{b} h_{ij}(\tau) \, | x_j(\tau) | \, d\tau \leqq \| h_{ij} \|_{L^{p_0}(a, b)} \| x_j \|_{L^{q_0}(a, b)}$$

и, следовательно,

(1.36) $$| x_i(t_i) | \leqq \tilde{r}_i + \frac{\psi_{0i}(1)}{1 - \alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \| h_{ij} \|_{L^{p_0}(a, b)} \| x_j \|_{L^{q_0}(a, b)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно лемме 1.2, из (1.24), (1.25) и (1.36) вытекают оценки (1.26), где ϱ_0 – положительная постоянная, не зависящая от x_i, r_i, ω_i и ψ_{0i} $(i = 1, \ldots, n)$.

Если подберем $c_0 > 0$ таким же образом, как и при доказательстве леммы 1.2, то справедливость оценки (1.14) становится очевидной. Лемма доказана.

Опираясь на леммы 1.2 и 1.3, из теоремы 1.2 непосредственно получим следующие предложения.

Теорема 1.3. *Пусть в области* $(a, b) \times R^n$ *выполнены неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [(t - t_i) x_i] \leqq \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) | x_j | + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} | x_j |) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.37}$$

и в $C_n(a, b)$ – *неравенства*

$$| \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) | \leqq \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \| x_j \|_{L^{q_0}(a,b)} + r_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.38}$$

где r_{ij}, r_i, h_{ij} и ω_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* а), б) *и* в) *леммы* 1.2. *Тогда задача* (0,1), (0.2) *разрешима.*

Теорема 1.4. *Пусть в области* $(a, b) \times R^n$ *выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [(t - t_i) x_i] \leqq -h_i(t) | x_i | + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) | x_j | + \\ + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} | x_j |) \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.39}$$

и в $C_n(a, b)$ – *неравенства*

$$| \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) | \leqq \psi_{0i}(| x_i |) + r_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.40}$$

где $h_i : [a, b] \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *суммируемы,* r_i, h_{ij} *и* ω_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют предположениям* а) *и* б) *леммы* 1.2, $\psi_{0i} : C^+(a, b) \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ – *линейные непрерывные функционалы, а собственные числа матрицы* $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$, *элементы которой определены равенствами* (1.31), *по модулю меньше единицы. Тогда задача* (0.1), (0.2) *разрешима.*

Замечание. Если мы откажемся от предположения неотрицательности функций h_i $(i = 1, \ldots, n)$, то элементы матрицы S следует определить равенствами

$$s_{ij} = \beta_i \left[\frac{\beta_i \psi_{0i}(1)}{1 - \alpha_i} (b - a)^{1/q_0} \| h_{ij} \|_{L^{p_0}(a,b)} + (b - a)^{1/q_{ij}} l(q_{ij}, q_0) \| h_{ij} \|_{L^{p_{ij}}(a,b)} \right]$$
$$(i, j = 1, \ldots, n),$$

где

$$\beta_i = \max\left\{\exp\left[-\int\limits_{\tau}^{t} h_i(s)\operatorname{sign}(s-\tau)\,\mathrm{d}s\right];\ (t-\tau)\times\right.$$
$$\left.\times(t-t_i)\geqq 0,\ (\tau-t_i)(t-t_i)\geqq 0,\ a\leqq\tau,\ t\leqq b\right\}$$

и α_i $(i = 1, \ldots, n)$ определены равенствами (1.30).

При такой формулировке теоремы 1.4 из нее получим резултаты М. А. Какабадзе [2].

В заключение этого параграфа рассмотрим систему (0.1) с краевыми условиями (0.4), т. е.

$$x_i(a) = x_i(b) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Из теоремы 1.4 непосредственно получается следующая

Теорема 1.5. *Пусть в области* $(a, b)\times R^n$ *соблюдаются неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\operatorname{sign}[\sigma_i x_i] \leqq -h_i(t)\,|x_i| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t)\,|x_j| + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n}|x_j|)$$
$$(1.41) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, h_{ij} *и* ω_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям* а) *и* б) *леммы* 1.2, $h_i : [a, b] \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ *суммируемы и собственные числа матриы* S $\mathcal{Y}= (s_{ij})_{i,j=1}^{n}$,

$$s_{ij} = (b-a)^{1/q_0}\left[1-\exp\left(-\int\limits_{a}^{b} h_i(s)\,\mathrm{d}s\right)\right]^{-1}\|h_{ij}\|_{L^{p_0}(a,b)} +$$
$$(1.42) \qquad + (b-a)^{1/q_{ij}}\,l(q_{ij}, q_0)\,\|h_{ij}\|_{L^{p_{ij}}(a,b)} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

по модулю меньше единицы. Тогда задача (0.1), (0.4) *разрешима.*

Из предыдущей теоремы, в частности, вытекает теорема 1 М. А. Какабадзе. [3].

§ 2. Об абсолютно непрерывных решениях задачи (0.1, (0.2)

В дальнейшем понадобится следующая

Лемма 2.1. *Если* $x \in L^{+\infty}(\alpha, \beta) \cap \tilde{C}(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$ $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ *и найдется такая функция* $h \in L(\alpha, \beta)$, *что*

$$x'(t) \geqq h(t) \ \ [\text{либо } x'(t) \leqq h(t)] \ \ \text{при} \ \ \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

то $x \in \tilde{C}(\alpha, \beta)$.

Доказательство см. в [6], стр. 58.

Теорема 2.1. *Пусть для любых* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *и* $\varrho \in (0, +\infty)$ *соблюдаются условия:*

$$\text{(2.1)} \qquad \textit{либо} \quad t_i \notin T_{m_i}, \textit{ либо } t_i \in T_{m_i} \textit{ и } \qquad \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

и

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [(t - t_i)\, x_i] \leqq -a_i(t, \varrho)\, |x_i| + g_i(t, \varrho)$$

$$\text{(2.2)} \qquad \textit{при} \quad t \in [a, b], |x_j| \leqq \varrho \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где $g_i(., \varrho) \in L(a, b)$, $a_i(., \varrho) \in L(a, b; T_{m_i})$ *неотрицательны и*

$$\left| \int_{t_0 - \delta \operatorname{sign}(t_0 - t_i)}^{t_0} a_i(t, \varrho)\, \mathrm{d}t \right| = +\infty \qquad \textit{при} \quad t_0 \in T_{m_i} \setminus \{a, b, t_i\}$$

$$\text{(2.3)} \qquad (\delta > 0 - \textit{сколь угодно мало}).$$

Тогда любое решение задачи (0,1), (0.2) *(если такое существует) абсолютно непрерывно в* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — произвольное решение задачи (0.1), (0.2). Тогда найдутся числовые последовательности $\{a_{lk}\}_{k=1}^{+\infty}$, $\{b_{lk}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(l = 1, \ldots, m)$ и последовательности абсолютно непрерывных функций $\{x_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие условиям определения 1. Будем считать, что

$$\text{(2.4)} \qquad |x_{ik}(t)| \leqq \varrho \quad \text{при} \quad a \leqq t \leqq b \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$$

где ϱ — положительная постоянная. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $l \in \{1, \ldots, m\}$ — произвольно фиксированные числа. Положим

$$\lim_{k \to +\infty} a_{lk} = \lim_{k \to +\infty} b_{lk} = t_0 .$$

Если $t_0 \in [a, b] \setminus T_{m_i}$, то, ввиду определения 1, очевидно, что x_i будем абсолютно непрерывной в некоторой окрестности точки t_0.

Предположим, что

$$t_0 \in T_{m_i} \setminus \{a, b\},$$

и подберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы промежуток $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ не содержал других сигнулярных точек, кроме t_0; при этом

$$\text{(2.5)} \quad a < t_0 - \delta < a_{lk} \leqq t_0 \leqq b_{lk} < t_0 + \delta < b \qquad (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots).$$

Легко видеть, что $x_i \in \tilde{C}(t_0 - \delta, t_0 + \delta; t_0)$. Покажем, что x_i непрерывна в точке t_0.

Если $t_0 = t_i$, то ввиду (2.1),

$$x_{ik}(t_0) = x_i(t_0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$|x_{ik}(a_{lk})| \leqq |x_{ik}(t_0)| + \int_{a_{lk}}^{t_0} |x'_{ik}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqq \int_{a_{lk}}^{b_{lk}} x'_{ik}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } k \to +\infty \tag{2.6}$$

и

$$|x_{ik}(b_{lk})| \leqq \int_{a_{lk}}^{b_{lk}} |x'_{ik}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \to 0 \qquad \text{при } k \to +\infty.$$

С другой стороны, ввиду (2.4) и (2.2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)|\operatorname{sign}(t-t_0) \leqq g_i(t,\varrho) \qquad \text{при } t \in [t_0-\delta, a_{lk}] \cup [b_{lk}, t_0+\delta],$$

откуда следует

$$|x_{ik}(t)| \leqq |x_{ik}(a_{lk})| + \int_t^{a_{lk}} g_i(\tau,\varrho)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{при } t \in [t_0-\delta, a_{lk}]$$

и

$$|x_{ik}(t)| \leqq |x_{ik}(b_{lk})| + \int_{b_{lk}}^{t} g_i(\tau,\varrho)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{при } t \in [b_{lk}, t_0+\delta]$$

Перейдя к пределу в этих неравенствах при $k \to +\infty$, ввиду (2.6), получим

$$|x_i(t)| \leqq \left|\int_{t_0}^{t} g_i(\tau,\varrho)\,\mathrm{d}\tau\right| \qquad \text{при } t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]\setminus t_0.$$

Следовательно, если $t_0 = t_i$, то x_i непрерывна в точек t_0.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $t_0 \neq t_i$. Для определенности будем считать, что

$$t_i < t_0 - \delta.$$

Тогда, ввиду (2.2), (2.4) и (2.5), получим

$$|x_{ik}(t)| \leqq \begin{cases} \eta(t) \quad \text{при} \quad t_0-\delta \leqq t \leqq a_{lk} \\ \eta(a_{lk}) + \varepsilon_k \quad \text{при} \quad a_{lk} \leqq t \leqq b_{lk} \\ \eta(a_{lk}) + \varepsilon_k + \displaystyle\int_{b_{lk}}^{t} g_i(\tau,\varrho)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{при } b_{lk} \leqq t \leqq t_0+\delta, \end{cases} \tag{2.7}$$

где

$$\eta(t) = \left[\varrho + \int_{t_0-\delta}^{t} g_i(\tau,\varrho)\exp\left(\int_{t_0-\delta}^{\tau} a_i(s,\varrho)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right]\exp\left(-\int_{t_0-\delta}^{t} a_i(\tau,\varrho)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

и

$$\varepsilon_k = \int\limits_{a_{ik}}^{b_{ik}} | x'_{ik}(t) | \, \mathrm{d}t \to 0 \qquad \text{при } k \to +\infty$$

Ввиду (2.3),

$$\lim_{t \to t_0} \eta(t) = 0.$$

Поэтому из (2.7) ясно, что

$$x_i(t_0) = 0, \qquad \lim_{t \to t_0} x_i(t) = 0.$$

Следовательно, и в случае $t_0 \neq t_i$ функция x_i непрерывна в точке t_0.

Ввиду произвольности i и l, из вышедоказанного ясно, что

$$x_i(t) \in L^{+\infty}(a, b) \cap \tilde{C}(a, b; T_{m_i}) \cap C(a, b; a, b) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.8}$$

С другой стороны, согласно (2.4) и (2.2),

$$\frac{\mathrm{d}\,| x_i(t) |}{\mathrm{d}t} \operatorname{sign}(t - t_i) \leqq g_i(t, \varrho) \qquad \text{при } a \leqq t \leqq b \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.9}$$

Применяя лемму 2.1, из (2.8) и (2.9) заключим, что

$$x_i \in \tilde{C}(a, b) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Теорема доказана.

Замечание. Все теоремы § 1 касаются случая, когда функционалы φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (0.6). Предположим теперь, что

$$\varphi_i : C_n(a, b) \to R \qquad (i = 1, \ldots, n) \text{ непрерывны} \tag{2.10}$$

(условие (0.4) может и не соблюдаться). Тогда можно показать, что задача (0.1), (0.2) разрешима и любое её решение абсолютно непрерывно, если наряду с условиями какой-нибудь из теорем § 1 соблюдаются условия (2.1)–(2.3). Чтобы убедиться в этом, достаточно отметить, что условия (2.1)–(2.3) гарантируют равномерную сходимость последовательности решений задачи (1.5), фигурирующей в доказательстве теоремы 1.1.

В частности, справедливы следующие теоремы:

Теорема 2.2. *Пусть соблюдаются условия* (2.1) *и* (2.10). *Далее, в* $(a, b) \times R^n$ *выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign}[(t - t_i)\, x_i] \leqq \\ &\leqq -a_i\Big(t, \sum_{j=1}^{n} | x_j |\Big) + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) | x_j | + \omega_i\Big(t, \sum_{j=1}^{n} | x_j |\Big) \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2.11}$$

а в $C_n(a, b)$ *— неравенства* (1.38), *где* r_{ij}, r_i, h_{ij} *и* ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.3, *а функции* $a_i(., \varrho) \in L(a, b; T_{m_i})$ $(i = 1, \ldots, n)$ *неотрицательны и при любом* $\varrho \in (0, +\infty)$ *удовлетворяют условию* (2.3). *Тогда задача* (0.1), (0.2) *разрешима, и любое её решение абсолютно непрерывно на* $[a, b]$.

Теорема 2.3. *Пусть соблюдаются условия* (1.2) *и* (2.10). *Далее, в* $(a, b) \times R^n$ *выполняются неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [(t - t_i) x_i] \leqq$$
$$\leqq -[a_i(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|) + h_i(t)] |x_i| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) |x_j| + \omega_i(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.12}$$

а в $C_n(a, b)$ *— неравенства* (1.40), *где* r_i, ψ_{0i}, h_i, h_{ij} *и* ω_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.4, *а функции* $a_i(., \varrho) \in L(a, b; T_{m_i})$ $(i = 1, \ldots, n)$ *неотрицательны и при любом* $\varrho \in (0, +\infty)$ *удовлетворяют условию* (2.3). *Тогда задача* (0.1), (0.2) *разрешима, и любое её решение абсолютно непрерывно на* $[a, b]$.

Теорема 2.4. *Пусть*

$$\sigma_i \in \{-1, 1\}, \qquad \frac{a + b + (a - b)\sigma_i}{2} \notin T_{m_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

и в области $(a, b) \times R^n$ *соблюдаются неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} [\sigma_i, x_i] \leqq$$
$$\leqq -[a_i(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|) + h_i(t)] |x_i| + \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) |x_j| + \omega_j(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.14}$$

где $a_i(., \varrho) \in L(a, b; T_{m_i})$ $(i = 1, \ldots, n)$ *неотрицательны и при любом* $\varrho \in (0, +\infty)$ *удовлетворяют условию* (2.3), *а* h_i, h_{ij} *и* ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.5. *Тогда задача* (0.1), (0.4) *разрешима, и любое её решение абсолютно непрерывно в* $[a, b]$.

§ 3. Теоремы единственности решений задачи (0.1), (0.2)

Теорема 3.1. *Пусть в области* $(a, b) \times R^n$ *выполняются неравенства*

$$[f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})] \operatorname{sign} [(t - t_i)(x_{1i} - x_{2i})] \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(t) |x_{1i} - x_{2i}| \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

а в $C_n(a, b)$ *— неравенства*

$$|\varphi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}) - \varphi_i(x_{21}, \ldots, x_{2n})| \leqq \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \| x_{1i} - x_{2i} \|_{L^{q_0}(a, b)} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.2}$$

где r_{ij} *и* h_{ij} *удовлетворяют предположениям теоремы* 1.3. *Тогда задача* (0.1), (0.2) *имеет не более одного абсоллютно непрерывного на* $[a, b]$ *решения.*

Доказательство. Пусть $x_l = (x_{li})_{i=1}^n \in \tilde{C}_n(a, b)$ $(l = 1, 2)$ — решения задачи (0,1), (0.2). Положим

$$x_i(t) = x_{1i}(t) - x_{2i}(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Тогда, в силу (3.1) и (3.2), имеем

$$x_i'(t) \operatorname{sign}[(t - t_i) x_i(t)] \leqq \sum_{j=1}^n h_{ij}(t) \mid x_j(t) \mid \qquad \text{при } a \leqq t \leqq b \ (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$\mid x_i(t_i) \mid \leqq \sum_{j=1}^n r_{ij} \parallel x_j \parallel_{L^{q_0}(a, b)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, $(x_i)_{i=1}^n$ удовлетворяет предположениям леммы 1.2 и поэтому из (1.27) получим

$$x_i(t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказываются и следующие теоремы:

Теорема 3.2. *Пусть в области* $(a, b) \times R^n$ *соблюдаются неравенства*

$$\begin{aligned} &[f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})] \operatorname{sign}[(t - t_i)(x_{1i} - x_{2i})] \leqq \\ (3.3) \qquad &\leqq -h_i(t) \mid x_{1i} - x_{2i} \mid + \sum_{j=1}^n h_{ij}(t) \mid x_{1j} - x_{2j} \mid \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

и в $C_n(a, b)$ — *неравенства*

$$(3.4) \qquad \mid \varphi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}) - \varphi_i(x_{21}, \ldots, x_{2n}) \mid \leqq \psi_{0i}(\mid x_{1i} - x_{2i} \mid) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где h_i, h_{ij} *и* ψ_{0i} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют предположениям теоремы* 1.4. *Тогда задача* (0.1), (0.2) *имеем не более одного абсолютно непрерывного на* $[a, b]$ *решения.*

Теорема 3.3. *Пусть в области* $(a, b) \times R^n$ *соблюдаются неравенства*

$$\begin{aligned} &[f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})] \operatorname{sign}[\sigma_i(x_{1i} - x_{2i})] \leqq \\ (3.5) \qquad &\leqq h_i(t) \mid x_{1i} - x_{2i} \mid + \sum_{j=1}^n h_{ij}(t) \mid x_{1j} - x_{2j} \mid \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{aligned}$$

где $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, *а* h_i *и* h_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.4. *Тогда задача* (0.1), (0.4) *имеет не более одного абсолютно непрерывного на* $[a, b]$ *решения.*

Из теорем 2.4 и 3.3, в частности, вытекают теоремы М. А. Какабадзе [3] и И. Т. Кигурадзе [5] о существовании и единственности абсолютно непрерывных на $[a, b]$ решений задачи (0.1), (1.41).

В заключение автор выражает благодарность И. Т. Кигурадзе за ценные указания и за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Какабадзе М. А.: *Об одной сингулярной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальгых уравнений*, ДАН СССР, 1974, т. 214, № 6, 1259—1262.

[2] Какабадзе М. А.: *Об одной задаче с интегральными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.* Mat. čas. 24, 1974, № 3, 225—238.

[3] Какабадзе М. А.: *О периодических решениях сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* Конференция молодых ученых и аспирантов, Тезисы докладов. Тбилиси 1974, 71—72.

[4] Кигурадзе И. Т.: *О сингулярной эадаче Николетти.* ДАН СССР, 1969, 186, № 4, 769—772.

[5] Кигурадзе И. Т.: *О периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями.* ДАН СССР, 1971, 198, № 2, 286—289.

[6] Кигурадзе И. Т.: *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Изд. ТГУ, Тбилиси, 1975.

[7] Кигурадзе И. Т., Пужа Б.: *О некоторых краевых задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* Дифференциальные уравнения 1976, том XII, № 12, 2139 до 2148.

[8] Чечик В. А.: *Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью.* Труды Московского матем. об-ва, 1959, 8, 155—197.

[9] Гантмахер Ф. Р.: *Теория матриц*, Москва, Гостехиздат, 1953.

B. Půža
662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a
Чехословакия