Archivum Mathematicum

Syméon Bozapalides

Les bimodules rélatifs

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 3, 125--134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106968

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XIII: 125—134, 1977

LES BIMODULES RELATIFS

par SYMÉON BOZAPALIDES
(Received March 25, 1976)

Dans ce travail on construit la bicatégorie relative *Bim* (**A**) des bimodules d'une bicatégorie relative exacte **A**, et on montre que *Bim* (**A**) est aussi exacte, ce qui généralise au cas relatif un résultat analogue de Bénabou [2].

§ 1. Monades isocommutatives

Soient A une catégorie et $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$, $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ deux monades isocommutatives sur A, c'est-à-dire telles qu'il existe une loi distributive [1] qui est un isomorphisme

$$r : T . T' \overset{\sim}{\rightarrow} T' . T.$$

Une $(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$-*bigèbre* est un triplet (ξ, a, ξ'), où α est un objet de A, (ξ, a) une $\mathbf{T}$-algèbre et (ξ', a) une $\mathbf{T}'$-algèbre, de façon que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & T\cdot T'a \arrow[rr, "\sim", "ra"'] \arrow[dl, "T\xi'"'] & & T'\cdot Ta \arrow[dr, "T'\xi"] & \\
Ta \arrow[drr, "\xi"'] & & & & T'a \arrow[dll, "\xi'"] \\
 & & a & &
\end{tikzcd}$$

Un *homomorphisme* de (ξ, a, ξ') vers (ζ, b, ζ'), est un morphisme $f : a \to b$ de A qui commute avec les **T**- et **T**'-structures, i.e. tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
Ta \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "Tf"'] & a \arrow[d, "f"] \\
Tb \arrow[r, "\zeta"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T'a \arrow[r, "\xi'"] \arrow[d, "T'f"'] & a \arrow[d, "f"] \\
T'b \arrow[r, "\zeta'"'] & b
\end{tikzcd}$$

On note $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-*Big* la catégorie ainsi définie.
On a un foncteur d'oubli

$$U : \mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-}Big \to A$$

défini par

$$U(\xi, a, \xi') = a,$$

et deux transformations naturelles

$$\varphi : T \,.\, U \Rightarrow U,$$
$$\varphi' : T' \,.\, U \Rightarrow U,$$

dont les composantes sont données par

$$\varphi_{(\xi, a, \xi')} = \xi \qquad \text{et}$$
$$\varphi'_{(\xi, a, \xi')} = \xi'$$

respectivement.

Théorème 1.1. *Le triplet* (U, φ, φ') *défini plus haut vérifie les équations*

$$\left.\begin{array}{c} \varphi \circ \eta U = U, \qquad \varphi' \circ \eta' U = U \\ \varphi \circ T\varphi = \varphi \circ \mu U, \qquad \varphi' \circ T'\varphi' = \varphi' \circ \mu' U \\ \varphi \circ \varphi' T = \varphi' \circ \varphi T' \end{array}\right\} \tag{i}$$

de manière que, si $F : X \to A$ *est un foncteur et*

$$\varepsilon : T \,.\, F \Rightarrow F,$$
$$\varepsilon' : T' \,.\, F \Rightarrow F,$$

deux transformations naturelles telles que

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon \circ \eta F = F, \qquad \varepsilon' \circ \eta' F = F \\ \varepsilon \circ T\varepsilon = \varepsilon \circ \mu F, \qquad \varepsilon' \circ T'\varepsilon' = \varepsilon' \circ \mu' F \\ \varepsilon \circ \varepsilon' T = \varepsilon' \circ \varepsilon T' \end{array}\right\} \tag{ii}$$

alors il existe un seul foncteur

$$\bar{F} : X \to \mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-}Big$$

qui remplit les relations

$$\left.\begin{array}{l} U \,.\, \bar{F} = F \\ \varphi \,.\, \bar{F} = \varepsilon \\ \varphi' \,.\, \bar{F} = \varepsilon' \end{array}\right\} \tag{iii}$$

Si, de plus

$$(G : X \to A, \omega : T \,.\, G \Rightarrow G, \omega' : T' \,.\, G \Rightarrow G) \tag{iv}$$

est un autre système vérifiant des conditions analogues à (ii), *alors chaque transformation naturelle* $m : F \Rightarrow G$ *telle que*

$$\left.\begin{aligned} \omega \circ Tm &= m \circ \varphi \\ \omega' \circ T'm &= m \circ \varphi' \end{aligned}\right\} \qquad \text{(v)}$$

induit une transformation naturelle unique

$$\bar{m} : \bar{F} \Rightarrow \bar{G}$$

(*où* $\bar{G}$ *est induit par le système* (iv)), *de façon que*

$$U \,.\, \bar{m} = m.$$

Preuve. En évaluant les équations (ii) au point $x \in ObX$, on obtient

$$\varepsilon_x \,.\, \eta_{Fx} = 1_{Fx}, \qquad \varepsilon'_x \,.\, \eta_{Fx} = 1_{Fx},$$
$$\varepsilon_x \,.\, T(\varepsilon_x) = \varepsilon_x \,.\, \mu_{Fx}, \qquad \varepsilon'_x \,.\, T'(\varepsilon'_x) = \varepsilon'_x \,.\, \mu_{Fx},$$
$$\varepsilon_x \,.\, \varepsilon'_{Tx} = \varepsilon'_x \,.\, \varepsilon_{Tx},$$

et par conséquent le triplet $(\varepsilon_x, F_x, \varepsilon'_x)$ est une $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-bigèbre. On pose

$$\bar{F}x = (\varepsilon_x, Fx, \varepsilon'_x).$$

De même pour $f : x \to x'$ dans X, on a

$$\varepsilon_x \,.\, TFf = Ff \,.\, \varepsilon_x,$$
$$\varepsilon'_x \,.\, T'Ff = Ff \,.\, \varepsilon'_x,$$

car ε et ε' sont des transformations naturelles; par conséquent Ff est un homomorphisme de $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-bigèbres.
Il est donc légitime de poser

$$\bar{F}f = Ff.$$

Le foncteur $\bar{F} : X \to \mathbf{T} - \mathbf{T}'$-*Big* que nous venons de définir vérifie les relations (iii) et il est le seul ayant cette propriété: en effet soit $R : X \to \mathbf{T} - \mathbf{T}'$-*Big* un autre foncteur tel que

$$\left.\begin{aligned} U \,.\, R &= F \\ \varphi \,.\, R &= \varepsilon \\ \varphi' \,.\, R &= \varepsilon' \end{aligned}\right\} \qquad \text{(vi)}$$

et soit

$$Rx = (\xi_x, a_x, \xi_x).$$

Alors les équations (vi), évaluées au point $x \in ObX$, donnent

$$\left.\begin{aligned} Fx &= URx = a_x \\ \varepsilon_x &= \varphi_{Rx} = \xi_x \\ \varepsilon'_x &= \varphi'_{Rx} = \xi'_x \end{aligned}\right\}.$$

et par conséquent $Rx = \bar{F}x$, $\forall x \in ObX$.
D'autre part pour tout morphisme $f : x \to x'$ de X, on tire de la première équation de (vi) que

$$URf = Ff = \bar{F}f,$$

d'où finalement $R = \bar{F}$.

Maintenant en vertu de relations

$$\omega_x \,.\, T(m_x) = m_x \,.\, \varphi_x,$$
$$\omega'_x \,.\, T'(m_x) = m_x \,.\, \varphi'_x,$$

qui résultent des (v) en évaluant à $x \in ObX$, la x-composante

$$m_x : Fx \to Gx$$

de la transformation naturelle $m : F \Rightarrow G$ est un homomorphisme de $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-bigèbres; on peut donc la prolonger d'une seule manière en une transformation naturelle $\bar{m} : \bar{F} \Rightarrow \bar{G}$ avec $U \,.\, \bar{m} = m$, et le théorème est établi. ∎

Exemple. Soient $\mathbf{A}$ une bicatégorie et $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$, $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ deux monades sur les objets A et A' respectivement; alors les

$$\mathbf{A}(\mathbf{T}, A') = (\mathbf{A}(T, A'), \mathbf{A}(\eta, A'), \mathbf{A}(\mu, A')),$$
$$\mathbf{A}(A, \mathbf{T}') = (\mathbf{A}(A, T'), \mathbf{A}(A, \eta'), \mathbf{A}(A, \mu'))$$

sont des monades isocommutatives sur la catégorie $\mathbf{A}(A, A')$. On peut voir immédiatement que

$$\mathbf{A}(\mathbf{T}, A') - \mathbf{A}(A, \mathbf{T}')\text{-}Big \xrightarrow{\sim} Bim\,(\mathbf{A})\,((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})),$$

où Bim ($\mathbf{A}$) désigne la bicatégorie des bimodules de $\mathbf{A}$ ([2], [5]).

Remarque. Le théorème précédent nous montre que le triplet (U, φ, φ') est la solution d'un problème universel dans la 2-catégorie **Cat** des catégories légitimes.

Plus généralement, soient $\mathbf{V}$ une 2-catégorie représentable, à Cat-limites projectives finies, et $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ deux monades isocommutatives sur un objet V de $\mathbf{V}$:

$$r : T \,.\, T' \xrightarrow{\sim} T' \,.\, T;$$

considérons de plus les objets d'Eilenberg-Moore de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ respectivement [4]

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}\text{-}\mathcal{A}lg \arrow[dl, "U^{\mathbf{T}}"'] \arrow[dr, "U^{\mathbf{T}}"] \arrow[d, phantom, "\varphi^{\mathbf{T}}"] & \\ V \arrow[rr, "T"'] & & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{T}'\text{-}\mathcal{A}lg \arrow[dl, "U^{\mathbf{T}'}"'] \arrow[dr, "U^{\mathbf{T}'}"] \arrow[d, phantom, "\varphi^{\mathbf{T}'}"] & \\ V \arrow[rr, "T'"'] & & V \end{tikzcd}$$

le Cat-produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "p_T"'] \arrow[dr, "p_{T'}"] & \\
\mathbf{T}\text{-}\mathcal{Alg} \arrow[dr, "U^T"'] & & \mathbf{T}'\text{-}\mathcal{Alg} \arrow[dl, "U^{T'}"] \\
 & V &
\end{tikzcd}$$

et finalement l'objet comma

$$\begin{tikzcd}
 & (T' \cdot T, V) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
V \arrow[rr, "T' \cdot T"'] & \arrow[ur, phantom, "m"] & V
\end{tikzcd}$$

Alors il en résulte des flèches uniques

$$f : X \to (T' \,.\, T, V)$$
$$g : X \to (T \,.\, T', V)$$

telles que

$$\begin{cases} p \,.\, f = U^T \,.\, p_T \\ q \,.\, f = U^{T'} \,.\, p_{T'} \\ m \,.\, f = \varphi^{T'} \,.\, p_{T'} \circ \varphi^T \,.\, p_T \end{cases} \qquad \begin{cases} p \cdot g = U^{T'} \,.\, p_{T'} \\ q \cdot g = U^T \,.\, p_T \\ m \,.\, g = \varphi^T \,.\, p_T \circ \varphi^{T'} \,.\, p_{T'} \end{cases}$$

(on note que $(T' \,.\, T, V) \xrightarrow{\sim} (T \,.\, T', V)$),
et le Cat-produit fibré de f et g est l'objet $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-*Big* dans la 2-catégorie $\mathbf{V}$.

§ 2. La V-bicatégorie Bim (A)

Soient $\mathbf{V}$ une 2-catégorie multiplicative, symétrique, à Cat-limites projectives finies et $\mathbf{A}$ une $\mathbf{V}$-bicatégorie exacte; alors la $\mathbf{V}$-bicatégorie *Bim* ($\mathbf{A}$) est définie comme suit: Ses objets sont les couples $(A, \mathbf{T})$ constitués d'un objet A de $\mathbf{A}$ et d'une monade $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ sur A dans la bicatégorie sous-jacente $|\mathbf{A}|$.

Pour $(A, \mathbf{T})$, $(A', \mathbf{T}') \in Ob\ Bim\ (\mathbf{A})$, on pose

$$Bim\ (\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})) = \mathbf{A}(\mathbf{T}, A') - \mathbf{A}(A, \mathbf{T}')\text{-}Big. \tag{i}$$

Pour simplifier les notations on écrit *Bim* $(\mathbf{T}', \mathbf{T})$ au lieu de *Bim* $(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))$ et on désigne par $(U_T^{T'}, \varphi^{T'}, \varphi_T)$ le triplet universel qui définit *Bim* $(\mathbf{T}', \mathbf{T})$ comme l'objet des $(\mathbf{A}(A, \mathbf{T}'), \mathbf{A}(\mathbf{T}, A'))$-bigèbres des monades isocommutatives $\mathbf{A}(A, \mathbf{T}')$ et $\mathbf{A}(\mathbf{T}, A')$ respectivement.

Pour tous $(A, \mathbf{T})$, $(A', \mathbf{T}')$, $(A'', \mathbf{T}'') \in Ob\ Bim\ (\mathbf{A})$, la flèche de composition

$$\cdot_{Bim(\mathbf{A})} : Bim\ (\mathbf{T}'', \mathbf{T}') \otimes Bim\ (\mathbf{T}', \mathbf{T}) \to Bim\ (\mathbf{T}'', \mathbf{T}) \tag{ii}$$

est définie de la manière suivante:
On considère le conoyau $\varphi(T')$ des 2-cellules

$$(\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot (1 \otimes U_{T'}^{T''}) \cdot (\varphi^{T'} \otimes 1)$$
$$(\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot (U_T^{T'} \otimes 1) \cdot (1 \otimes \varphi_{T'})$$

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{Bim}(\mathbf{T}'',\mathbf{T}')\otimes\mathrm{Bim}(\mathbf{T}',\mathbf{T}) \arrow[d, "\wr"] & & \\
& & \mathrm{Bim}(\mathbf{T}',\mathbf{T})\otimes\mathrm{Bim}(\mathbf{T}'',\mathbf{T}') \arrow[dll, "U_T^{T'}\otimes 1"'] \arrow[ddll, "U_T^{T'}\otimes 1"] \arrow[ddd, "F(T')"] \arrow[ddrr, "1\otimes U_T^{T'}"'] \arrow[drr] & & \\
\mathbf{A}(A,A')\otimes\mathrm{Bim}(\mathbf{T}'',\mathbf{T}') \arrow[d, "\mathbf{A}(A,T')\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow \varphi^{T'}\otimes 1"] & & & & \mathrm{Bim}(\mathbf{T}',\mathbf{T})\otimes\mathbf{A}(A',A'') \arrow[d, "1\otimes\mathbf{A}(T',A'')"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow 1\otimes\varphi_{T'}"] \\
\mathbf{A}(A,A')\otimes\mathrm{Bim}(\mathbf{T}'',\mathbf{T}') \arrow[d, "1\otimes U_{T'}^{T''}"'] & \arrow[r, phantom, "\Rightarrow\varphi(T')"] & & \arrow[l, phantom, "\Leftarrow\varphi(T')"'] & \mathrm{Bim}(\mathbf{T}',\mathbf{T})\otimes\mathbf{A}(A',A'') \arrow[d, "U_T^{T'}\otimes 1"] \\
\mathbf{A}(A,A')\otimes\mathbf{A}(A',A'') \arrow[rr, "(\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''}"'] & & \mathbf{A}(A,A'') & & \mathbf{A}(A,A')\otimes\mathbf{A}(A',A'') \arrow[ll, "(\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''}"]
\end{tikzcd}$$

qui existe parce que l'objet $\mathbf{A}(A, A'')$ est à limites inductives finies à cause de l'exactitude de $\mathbf{A}$.

D'autre part la 2-cellule $\mathbf{A}(A, T'') \cdot \varphi(T')$ est le conoyau des 2-cellules

$$\mathbf{A}(A, T'') \cdot (\cdot_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot \{\varphi^{T'} \otimes Bim\ (\mathbf{T}'', \mathbf{T}')\},$$
$$\mathbf{A}(A, T'') \cdot (\cdot_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot \{Bim\ (\mathbf{T}, \mathbf{T}') \otimes \varphi_{T'}\},$$

car la flèche $\mathbf{A}(A, T'')$ (qui, à cause de l'exactitude de $\mathbf{A}$, admet un adjoint à droite) commute avec les limites inductives (v. [3]), d'où une 2-cellule unique

$$f^{T''} : \mathbf{A}(A, T'') \,.\, F(T') \to F(T')$$

telle que

$$f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, T'') \,.\, \varphi(T') = (\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \,.\, \{\mathbf{A}(A, A') \otimes \varphi^{T''}\} \,.\, \{U_T^{T'} \otimes Bim\,(\mathbf{T}'', \mathbf{T}')\}$$

Par une méthode analogue on trouve une 2-cellule unique

$$f_T : \mathbf{A}(T, A'') \,.\, F(T') \to F(T')$$

telle que

$$f_T \circ \mathbf{A}(T, A'') \,.\, \varphi(T') = (\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \,.\, \{\varphi_T \otimes \mathbf{A}(A', A'')\} \,.\, \{Bim\,(\mathbf{T}', \mathbf{T}) \otimes U_T^{T'}\}.$$

Le triplet ainsi défini $(F(T'), f_T, f^{T''})$ vérifie les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} f_T \circ \mathbf{A}(\mu, A'') \,.\, F(T') &= f_T \circ \mathbf{A}(T, A'') \,.\, f_T \\ F(T') &= f_T \circ \mathbf{A}(\eta, A'') \,.\, F(T') \\ f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, \mu'') \,.\, F(T') &= f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, T'') \,.\, f^{T''} \\ F(T') &= f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, \eta'') \,.\, F(T') \\ f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, T'') \,.\, f_T &= f_T \circ \mathbf{A}(T, A'') \,.\, f^{T''} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(iii)}$$

d'où la flèche de composition (ii).

Pour tout $(A, \mathbf{T}) \in Ob\; Bim\,(\mathbf{A})$, la flèche unitaire

$$(\eta_{Bim(\mathbf{A})})_{(A,\mathbf{T})} : I \to Bim\,(\mathbf{T}, \mathbf{T})$$

est induite par le triplet (T, μ, μ), où

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "T"'] \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\mu"] & \\ \mathbf{A}(A,A) \arrow[rr, "\mathbf{A}(T,A)"'] & \ & \mathbf{A}(A,A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "T"'] \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\mu"] & \\ \mathbf{A}(A,A) \arrow[rr, "\mathbf{A}(A,T)"'] & \ & \mathbf{A}(A,A) \end{tikzcd}$$

Théorème 2.1. *La* $\mathbf{V}$*-bicatégorie Bim* $(\mathbf{A})$ *a la propriété suivante*

$$|\, Bim\,(\mathbf{A}) \,| \xrightarrow{\sim} Bim\,(|\, \mathbf{A} \,|), \qquad \text{(iv)}$$

c'est-à-dire la bicatégorie sous-jacente à Bim $(\mathbf{A})$ *est isomorphe à la bicatégorie des bimodules de la bicatégorie* $|\,\mathbf{A}\,|$*, sous-jacente à* $\mathbf{A}$.

Preuve. Par définition on a

$$Ob \mid Bim(\mathbf{A}) \mid \; = Ob\, Bim(\mid \mathbf{A} \mid),$$

et

$$\mid Bim(\mathbf{A}) \mid ((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})) = \mathbf{V}(I, Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))).$$

Mais une flèche

$$f : I \to Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))$$

équivaut d'après le th. 1.1 à un triplet $(F, f_T, f^{T'})$

$$F : I \to \mathbf{A}(A, A')$$

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "f_T"] & & I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "f^{T'}"] & \\ \mathbf{A}(A,A') \arrow[rr, "\mathbf{A}(T,A')"'] & & \mathbf{A}(A,A') \arrow[rr, "\mathbf{A}(A,T')"'] & & \mathbf{A}(A,A') \end{tikzcd}$$

qui vérifie les conditions (iii) avec $F(T') = F$, c'est-à-dire à un $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-bimodule de $\mid \mathbf{A} \mid$.

Une 2-cellule

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] & Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})) \end{tikzcd}$$

équivaut à une 2-cellule

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\bar\lambda"] & \mathbf{A}(A, A') \end{tikzcd}$$

telle que

$$\begin{cases} f'_T \circ \bar\lambda \,.\, \mathbf{A}(T, A') = \bar\lambda \circ f_T, \\ f'^{T'} \circ \bar\lambda \,.\, \mathbf{A}(A, T') = \bar\lambda \circ f^{T'}, \end{cases}$$

c'est-à-dire à un morphisme de $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-bimodules, et l'isomorphisme (iv) est établi. ∎

§ 3. Théorème fondamental des bicatégories relatives exactes

Dans ce paragraphe on suppose que $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{V}$-bicatégorie exacte, ce qui nous permet de construire la $\mathbf{V}$-bicatégorie *Bim* ($\mathbf{A}$).

Proposition 3.1. *Pour tous* $(A, \mathbf{T})$, $(A', \mathbf{T}') \in Ob\ Bim\ (\mathbf{A})$, *l'objet*

$$Bim\ (\mathbf{A})\ ((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))$$

admet toutes les limites projectives et inductives.

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant:

Lemme 3.2. *Soient* $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ *et* $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ *deux monades isocommutatives sur la catégorie* A*; alors*

i) *la catégorie* $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$*-Big admet toutes les limites projectives qui existent dans* A,

ii) *la catégorie* $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$*-Big admet toutes les limites inductives qui existent dans* A *et qui sont préservées simultanement par les foncteurs* T *et* T'.

Preuve. Soient $F : \mathbf{I} \to \mathbf{T} - \mathbf{T}'$-*Big* un diagramme et

$$\{a \xrightarrow[p_i]{} a_i\}_{i \in \mathbf{I}}$$

le cône limite projective du diagramme $U_{\mathbf{T}}^{\mathbf{T}'} . F : \mathbf{I} \to A$, où

$$Fi = (\xi_i, a_i, \xi_i').$$

Alors à cause de la propriété universelle de la limite projective on a les morphismes

$$\xi : Ta \to a, \qquad \xi' : T'a \to a$$

tels que

$$\begin{cases} p_i . \xi = \xi_i . Tp_i, \\ p_i . \xi' = \xi_i' . T'p_i, \end{cases} \qquad \forall i \in \mathbf{I}.$$

Il est bien connu que les couples (ξ, a), (ξ', a) sont des $\mathbf{T}$- et $\mathbf{T}'$-algèbres respectivement.

Il reste à montrer que le diagramme (I), § 1, commute; On a

$$\begin{aligned} p_i . \xi . T\xi' &= \xi_i . Tp_i . T\xi = \\ &= \xi_i . T\xi_i . TT'p_i = \\ &= \xi_i' . T'\xi_i . r_{a_i} . TT'p_i = \\ &= \xi_i' . T'\xi_i . T'Tp_i . r_a = \\ &= \xi_i' . T'p_i . T'\xi . r_a = \\ &= p_i . \xi' . T'\xi . r_a, \end{aligned}$$

donc

$$\xi \,.\, T\xi' = \xi' \,.\, T'\xi \,.\, r_a,$$

et par conséquent

$$(\xi, a, \xi') = \varprojlim F.$$

ii) Supposons maintenant que la $\varinjlim U_T^{T'} \,.\, F$ existe et est préservée par T et T', et soit

$$\{a_i \xrightarrow[e_i]{} a\}_{i \in \mathbf{I}}$$

le cône limite inductive de $U_T^{T'} \,.\, F$; alors il existe des morphismes uniques

$$\bar{\xi} : Ta \to a, \qquad \bar{\xi}' : T'a \to a$$

tels que

$$\begin{cases} \bar{\xi} \,.\, Te_i = e_i \,.\, \xi_i, \\ \bar{\xi}' \,.\, T'e_i = e_i \,.\, \xi_i', \end{cases} \qquad \forall i \in \mathbf{I},$$

et le triplet $(\bar{\xi}, a, \bar{\xi}')$ est une $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$-bigèbre, limite inductive de F. ∎

Revenons à la démonstration de la proposition; étant donné que $\mathbf{A}$ est exacte, les objets $\mathbf{A}(A, A')$ admettent toutes les limites projectives et inductives finies et de plus les flèches $\mathbf{A}(T, A')$ et $\mathbf{A}(A, T')$ préservent les limites inductives parce qu'ils admettent des adjoints à droite.

On peut donc appliquer le lemme précédent et la proposition est démontrée. ∎

Théorème fondamental des bicatégories relatives exactes. *La* $\mathbf{V}$*-bicatégorie* *Bim*$(\mathbf{A})$ *des bimodules d'une* $\mathbf{V}$*-bicatégorie exacte* $\mathbf{A}$*, est aussi exacte.*

Preuve. Résulte de la prop. 3.1. et d'un argument de routine, qu' on laisse au lecteur. ∎

REFERENCES

[1] J. Beck, *Distributive laws*, Springer Lecture Notes v. 80 (1969).
[2] J. Bénabou, *Les distributeurs*, rapport n° 33, Louvain (1973).
[3] S. Bozapalides, *Théorie formelle des bicatégories*, Thèse 3ème cycle, Paris, Mars 1976.
[4] R. Street, *Elementary cosmoi*, Springer Lecture Notes v. 420 (1974).
[5] J. W. Gray, *Adjointness for 2-categories*, Springer Lecture Notes v. 391 (1974).

S. Bozapalides
Université de Ioannina
Ioannina
Grèce