

Syméon Bozpalides
Les bimodules relatifs

Archivum Mathematicum, Vol. 13 (1977), No. 3, 125--134

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/106968>

Terms of use:

© Masaryk University, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

LES BIMODULES RELATIFS

par SYMÉON BOZAPALIDES
 (Received March 25, 1976)

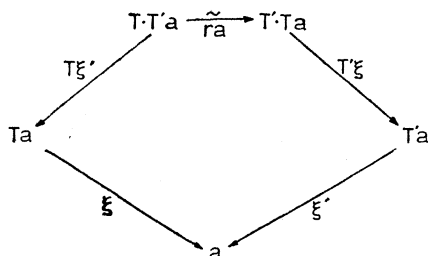
Dans ce travail on construit la bicatégorie relative $Bim(\mathbf{A})$ des bimodules d'une bicatégorie relative exacte \mathbf{A} , et on montre que $Bim(\mathbf{A})$ est aussi exacte, ce qui généralise au cas relatif un résultat analogue de Bénabou [2].

§ 1. Monades isocommutatives

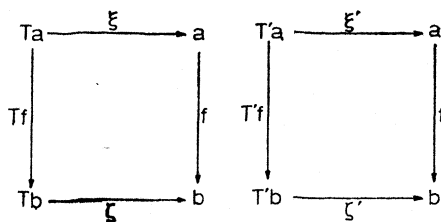
Soient A une catégorie et $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$, $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ deux monades isocommutatives sur A , c'est-à-dire telles qu'il existe une loi distributive [1] qui est un isomorphisme

$$r : T \cdot T' \xrightarrow{\sim} T' \cdot T.$$

Une $(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$ -bigèbre est un triplet (ξ, a, ξ') , où a est un objet de A , (ξ, a) une \mathbf{T} -algèbre et (ξ', a) une \mathbf{T}' -algèbre, de façon que le diagramme suivant commute



Un *homomorphisme* de (ξ, a, ξ') vers (ζ, b, ζ') , est un morphisme $f : a \rightarrow b$ de A qui commute avec les \mathbf{T} - et \mathbf{T}' -structures, i.e. tel que les diagrammes suivants commutent



On note $\mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-Big}$ la catégorie ainsi définie.
On a un foncteur d'oubli

$$U : \mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-Big} \rightarrow A$$

défini par

$$U(\xi, a, \xi') = a,$$

et deux transformations naturelles

$$\varphi : T . U \Rightarrow U,$$

$$\varphi' : T' . U \Rightarrow U,$$

dont les composantes sont données par

$$\varphi_{(\xi, a, \xi')} = \xi \quad \text{et}$$

$$\varphi'_{(\xi, a, \xi')} = \xi'$$

respectivement.

Théorème 1.1. *Le triplet (U, φ, φ') défini plus haut vérifie les équations*

$$\left. \begin{aligned} \varphi \circ \eta U &= U, & \varphi' \circ \eta' U &= U \\ \varphi \circ T\varphi &= \varphi \circ \mu U, & \varphi' \circ T'\varphi' &= \varphi' \circ \mu' U \\ \varphi \circ \varphi' T &= \varphi' \circ \varphi T' \end{aligned} \right\} \quad \text{(i)}$$

de manière que, si $F : X \rightarrow A$ est un foncteur et

$$\varepsilon : T . F \Rightarrow F,$$

$$\varepsilon' : T' . F \Rightarrow F,$$

deux transformations naturelles telles que

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \circ \eta F &= F, & \varepsilon' \circ \eta' F &= F \\ \varepsilon \circ T\varepsilon &= \varepsilon \circ \mu F, & \varepsilon' \circ T'\varepsilon' &= \varepsilon' \circ \mu' F \\ \varepsilon \circ \varepsilon' T &= \varepsilon' \circ \varepsilon T' \end{aligned} \right\} \quad \text{(ii)}$$

alors il existe un seul foncteur

$$F : X \rightarrow \mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-Big}$$

qui remplit les relations

$$\left. \begin{aligned} U . F &= F \\ \varphi . F &= \varepsilon \\ \varphi' . F &= \varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad \text{(iii)}$$

Si, de plus

$$(G : X \rightarrow A, \omega : T . G \Rightarrow G, \omega' : T' . G \Rightarrow G) \quad \text{(iv)}$$

est un autre système vérifiant des conditions analogues à (ii), alors chaque transformation naturelle $m : F \Rightarrow G$ telle que

$$\left. \begin{aligned} \omega \circ Tm &= m \circ \varphi \\ \omega' \circ T'm &= m \circ \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (\text{v})$$

induit une transformation naturelle unique

$$\bar{m} : F \Rightarrow \bar{G}$$

(où \bar{G} est induit par le système (iv)), de façon que

$$U \cdot \bar{m} = m.$$

Preuve. En évaluant les équations (ii) au point $x \in \text{Ob}X$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \cdot \eta_{Fx} &= 1_{Fx}, & \varepsilon'_x \cdot \eta_{Fx} &= 1_{Fx}, \\ \varepsilon_x \cdot T(\varepsilon_x) &= \varepsilon_x \cdot \mu_{Fx}, & \varepsilon'_x \cdot T'(\varepsilon'_x) &= \varepsilon'_x \cdot \mu_{Fx}, \\ \varepsilon_x \cdot \varepsilon'_{Tx} &= \varepsilon'_x \cdot \varepsilon_{Tx}, \end{aligned}$$

et par conséquent le triplet $(\varepsilon_x, F_x, \varepsilon'_x)$ est une $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -bigèbre. On pose

$$Fx = (\varepsilon_x, F_x, \varepsilon'_x).$$

De même pour $f : x \rightarrow x'$ dans X , on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \cdot TFf &= Ff \cdot \varepsilon_x, \\ \varepsilon'_x \cdot T'Ff &= Ff \cdot \varepsilon'_x, \end{aligned}$$

car ε et ε' sont des transformations naturelles; par conséquent Ff est un homomorphisme de $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -bigèbres.

Il est donc légitime de poser

$$Ff = Ff.$$

Le foncteur $F : X \rightarrow \mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-Big}$ que nous venons de définir vérifie les relations (iii) et il est le seul ayant cette propriété: en effet soit $R : X \rightarrow \mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-Big}$ un autre foncteur tel que

$$\left. \begin{aligned} U \cdot R &= F \\ \varphi \cdot R &= \varepsilon \\ \varphi' \cdot R &= \varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad (\text{vi})$$

et soit

$$Rx = (\xi_x, a_x, \xi'_x).$$

Alors les équations (vi), évaluées au point $x \in \text{Ob}X$, donnent

$$\left. \begin{aligned} Fx &= URx = a_x \\ \varepsilon_x &= \varphi_{Rx} = \xi_x \\ \varepsilon'_x &= \varphi'_{Rx} = \xi'_x \end{aligned} \right\}$$

et par conséquent $Rx = Fx, \forall x \in ObX$.

D'autre part pour tout morphisme $f: x \rightarrow x'$ de X , on tire de la première équation de (vi) que

$$URf = Ff = Ff,$$

d'où finalement $R = F$.

Maintenant en vertu de relations

$$\begin{aligned} \omega_x \cdot T(m_x) &= m_x \cdot \varphi_x, \\ \omega'_x \cdot T'(m_x) &= m_x \cdot \varphi'_x, \end{aligned}$$

qui résultent des (v) en évaluant à $x \in ObX$, la x -composante

$$m_x: Fx \rightarrow Gx$$

de la transformation naturelle $m: F \Rightarrow G$ est un homomorphisme de $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -bigèbres; on peut donc la prolonger d'une seule manière en une transformation naturelle $\bar{m}: F \Rightarrow \bar{G}$ avec $U \cdot \bar{m} = m$, et le théorème est établi. ■

Exemple. Soient \mathbf{A} une bicatégorie et $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$, $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ deux monades sur les objets A et A' respectivement; alors les

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{T}, A') &= (\mathbf{A}(T, A'), \mathbf{A}(\eta, A'), \mathbf{A}(\mu, A')), \\ \mathbf{A}(A, \mathbf{T}') &= (\mathbf{A}(A, T'), \mathbf{A}(A, \eta'), \mathbf{A}(A, \mu')) \end{aligned}$$

sont des monades isocommutatives sur la catégorie $\mathbf{A}(A, A')$. On peut voir immédiatement que

$$\mathbf{A}(\mathbf{T}, A') - \mathbf{A}(A, \mathbf{T}')\text{-Big} \xrightarrow{\sim} \text{Bim}(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})),$$

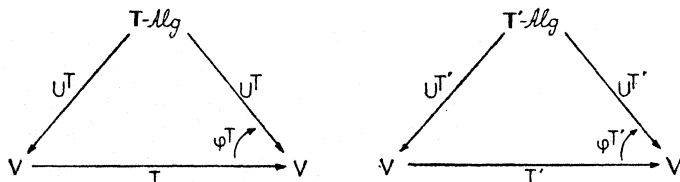
où $\text{Bim}(\mathbf{A})$ désigne la bicatégorie des bimodules de \mathbf{A} ([2], [5]).

Remarque. Le théorème précédent nous montre que le triplet (U, φ, φ') est la solution d'un problème universel dans la 2-catégorie Cat des catégories légitimes.

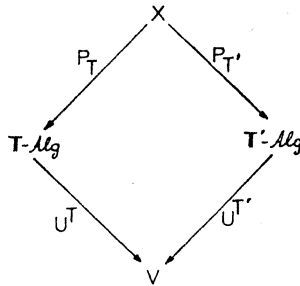
Plus généralement, soient \mathbf{V} une 2-catégorie représentable, à Cat -limites projectives finies, et \mathbf{T}, \mathbf{T}' deux monades isocommutatives sur un objet V de \mathbf{V} :

$$r: T \cdot T' \xrightarrow{\sim} T' \cdot T;$$

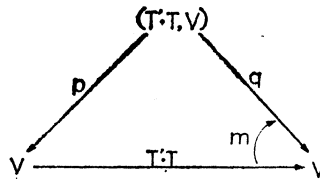
considérons de plus les objets d'Eilenberg-Moore de \mathbf{T} et \mathbf{T}' respectivement [4]



le Cat-produit fibré suivant



et finalement l'objet comma



Alors il en résulte des flèches uniques

$$f : X \rightarrow (T'. T, V)$$

$$g : X \rightarrow (T. T', V)$$

telles que

$$\begin{cases} p \cdot f = U^T \cdot p_T \\ q \cdot f = U^{T'} \cdot p_{T'} \\ m \cdot f = \varphi^{T'} \cdot p_{T'} \circ \varphi^T \cdot p_T \end{cases} \quad \begin{cases} p \cdot g = U^{T'} \cdot p_{T'} \\ q \cdot g = U^T \cdot p_T \\ m \cdot g = \varphi^T \cdot p_T \circ \varphi^{T'} \cdot p_{T'} \end{cases}$$

(on note que $(T'. T, V) \xrightarrow{\sim} (T. T', V)$),

et le Cat-produit fibré de f et g est l'objet $\mathbf{T} - \mathbf{T}'\text{-Big}$ dans la 2-catégorie \mathbf{V} .

§ 2. La \mathbf{V} -bicatégorie $\mathbf{Bim}(\mathbf{A})$

Soient \mathbf{V} une 2-catégorie multiplicative, symétrique, à Cat-limites projectives finies et \mathbf{A} une \mathbf{V} -bicatégorie exacte; alors la \mathbf{V} -bicatégorie $\mathbf{Bim}(\mathbf{A})$ est définie comme suit: Ses objets sont les couples (A, \mathbf{T}) constitués d'un objet A de \mathbf{A} et d'une monade $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ sur A dans la bicatégorie sous-jacente $|\mathbf{A}|$.

Pour $(A, \mathbf{T}), (A', \mathbf{T}') \in \text{Ob } \mathbf{Bim}(\mathbf{A})$, on pose

$$\mathbf{Bim}(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})) = \mathbf{A}(\mathbf{T}, A') - \mathbf{A}(A, \mathbf{T}')\text{-Big.} \quad (i)$$

Pour simplifier les notations on écrit $Bim(\mathbf{T}', \mathbf{T})$ au lieu de $Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))$ et on désigne par $(U_T^{T'}, \varphi^{T'}, \varphi_T)$ le triplet universel qui définit $Bim(\mathbf{T}', \mathbf{T})$ comme l'objet des $(\mathbf{A}(A, \mathbf{T}'), \mathbf{A}(\mathbf{T}, A'))$ -bigèbres des monades isocommutatives $\mathbf{A}(A, \mathbf{T}')$ et $\mathbf{A}(\mathbf{T}, A')$ respectivement.

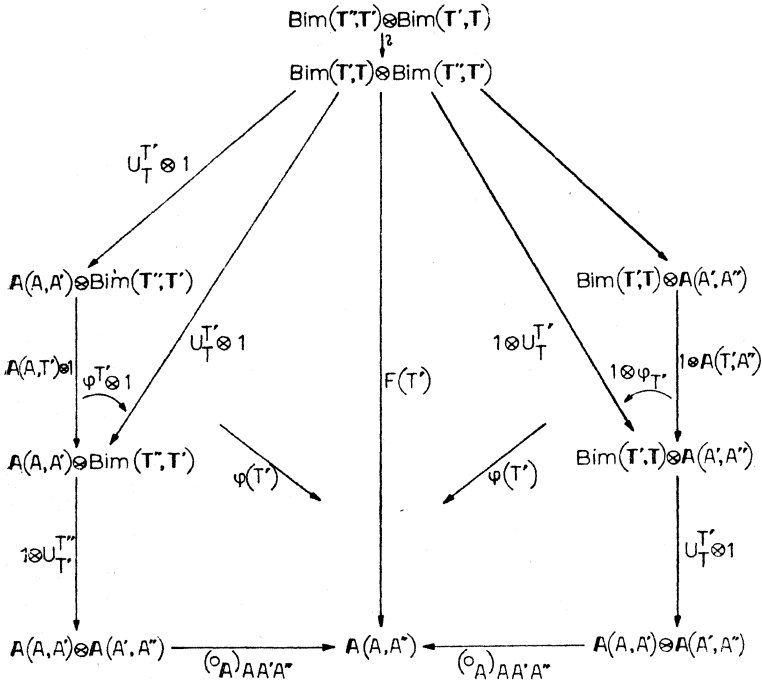
Pour tous $(A, \mathbf{T}), (A', \mathbf{T}'), (A'', \mathbf{T}'') \in Ob Bim(\mathbf{A})$, la flèche de composition

$$\cdot_{Bim(\mathbf{A})} : Bim(\mathbf{T}'', \mathbf{T}') \otimes Bim(\mathbf{T}', \mathbf{T}) \rightarrow Bim(\mathbf{T}'', \mathbf{T}) \quad (ii)$$

est définie de la manière suivante:

On considère le conoyau $\varphi(T'')$ des 2-cellules

$$\begin{aligned} & (\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot (1 \otimes U_T^{T''}) \cdot (\varphi^{T'} \otimes 1) \\ & (\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot (U_T^{T'} \otimes 1) \cdot (1 \otimes \varphi_{T'}) \end{aligned}$$



qui existe parce que l'objet $\mathbf{A}(A, A'')$ est à limites inductives finies à cause de l'exactitude de \mathbf{A} .

D'autre part la 2-cellule $\mathbf{A}(A, T'')$. $\varphi(T'')$ est le conoyau des 2-cellules

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(A, T'') \cdot (\cdot_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot \{\varphi^{T'} \otimes Bim(\mathbf{T}'', \mathbf{T}')\}, \\ & \mathbf{A}(A, T'') \cdot (\cdot_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot \{Bim(\mathbf{T}', \mathbf{T}') \otimes \varphi_{T'}\}, \end{aligned}$$

car la flèche $\mathbf{A}(A, T'')$ (qui, à cause de l'exactitude de \mathbf{A} , admet un adjoint à droite) commute avec les limites inductives (v. [3]), d'où une 2-cellule unique

$$f^{T''} : \mathbf{A}(A, T'') \cdot F(T') \rightarrow F(T'')$$

telle que

$$f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, T'') \cdot \varphi(T') = (\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot \{\mathbf{A}(A, A') \otimes \varphi^{T''}\} \cdot \{U_T^{T'} \otimes \text{Bim}(\mathbf{T}', \mathbf{T}')\}$$

Par une méthode analogue on trouve une 2-cellule unique

$$f_T : \mathbf{A}(T, A'') \cdot F(T') \rightarrow F(T')$$

telle que

$$f_T \circ \mathbf{A}(T, A'') \cdot \varphi(T') = (\circ_{\mathbf{A}})_{AA'A''} \cdot \{\varphi_T \otimes \mathbf{A}(A', A'')\} \cdot \{\text{Bim}(\mathbf{T}', \mathbf{T}) \otimes U_T^{T'}\}.$$

Le triplet ainsi défini $(F(T'), f_T, f^{T''})$ vérifie les relations suivantes

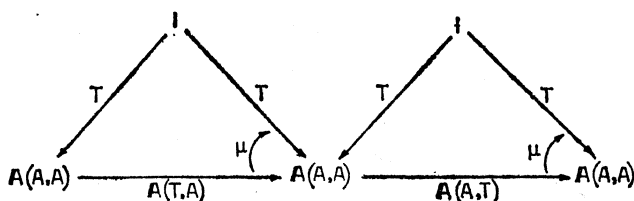
$$\left. \begin{aligned} f_T \circ \mathbf{A}(\mu, A'') \cdot F(T') &= f_T \circ \mathbf{A}(T, A'') \cdot f_T \\ F(T') &= f_T \circ \mathbf{A}(\eta, A'') \cdot F(T') \\ f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, \mu'') \cdot F(T') &= f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, T'') \cdot f^{T''} \\ F(T') &= f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, \eta'') \cdot F(T') \\ f^{T''} \circ \mathbf{A}(A, T'') \cdot f_T &= f_T \circ \mathbf{A}(T, A'') \cdot f^{T''} \end{aligned} \right\} \quad \text{(iii)}$$

d'où la flèche de composition (ii).

Pour tout $(A, \mathbf{T}) \in \text{Ob } \text{Bim}(\mathbf{A})$, la flèche unitaire

$$(\eta_{\text{Bim}(\mathbf{A})})_{(A, \mathbf{T})} : I \rightarrow \text{Bim}(\mathbf{T}, \mathbf{T})$$

est induite par le triplet (T, μ, μ) , où



Théorème 2.1. La \mathbf{V} -bicatégorie $\text{Bim}(\mathbf{A})$ a la propriété suivante

$$|\text{Bim}(\mathbf{A})| \xrightarrow{\sim} \text{Bim}(|\mathbf{A}|), \quad \text{(iv)}$$

c'est-à-dire la bicatégorie sous-jacente à $\text{Bim}(\mathbf{A})$ est isomorphe à la bicatégorie des bimodules de la bicatégorie $|\mathbf{A}|$, sous-jacente à \mathbf{A} .

Preuve. Par définition on a

$$Ob | Bim(\mathbf{A}) | = Ob Bim(|\mathbf{A}|),$$

et

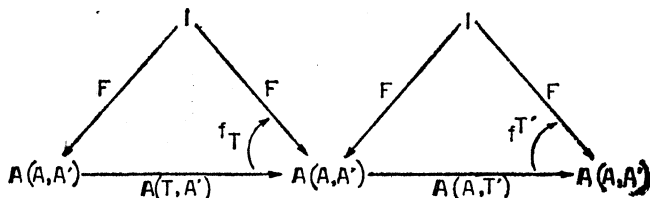
$$| Bim(\mathbf{A}) | ((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})) = \mathbf{V}(I, Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))).$$

Mais une flèche

$$f : I \rightarrow Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T})).$$

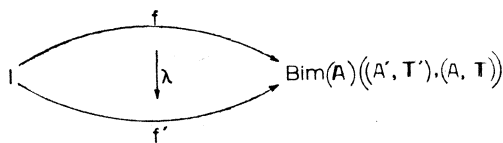
équivalent d'après le th. 1.1 à un triplet $(F, f_T, f^{T'})$

$$F : I \rightarrow \mathbf{A}(A, A')$$

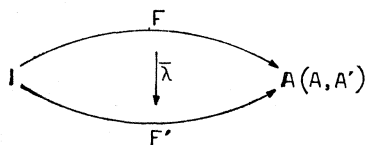


qui vérifie les conditions (iii) avec $F(T') = F$, c'est-à-dire à un $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -bimodule de $|\mathbf{A}|$.

Une 2-cellule



équivalent à une 2-cellule



telle que

$$\begin{cases} f'_T \circ \bar{\lambda} \cdot \mathbf{A}(T, A') = \bar{\lambda} \circ f_T, \\ f'^{T'} \circ \bar{\lambda} \cdot \mathbf{A}(A, T') = \bar{\lambda} \circ f^{T'}, \end{cases}$$

c'est-à-dire à un morphisme de $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -bimodules, et l'isomorphisme (iv) est établi. ■

§ 3. Théorème fondamental des bicatégories relatives exactes

Dans ce paragraphe on suppose que \mathbf{A} est une \mathbf{V} -bicatégorie exacte, ce qui nous permet de construire la \mathbf{V} -bicatégorie $Bim(\mathbf{A})$.

Proposition 3.1. *Pour tous $(A, \mathbf{T}), (A', \mathbf{T}') \in Ob Bim(\mathbf{A})$, l'objet*

$$Bim(\mathbf{A})((A', \mathbf{T}'), (A, \mathbf{T}))$$

admet toutes les limites projectives et inductives.

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant:

Lemme 3.2. *Soient $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ et $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ deux monades isocommutatives sur la catégorie A ; alors*

- i) *la catégorie $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -Big admet toutes les limites projectives qui existent dans A ,*
- ii) *la catégorie $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -Big admet toutes les limites inductives qui existent dans A et qui sont préservées simultanément par les foncteurs T et T' .*

Preuve. Soient $F : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -Big un diagramme et

$$\{a \xrightarrow{p_i} a_i\}_{i \in \mathbf{I}}$$

le cône limite projective du diagramme $U_T^{T'} \cdot F : \mathbf{I} \rightarrow A$, où

$$Fi = (\xi_i, a_i, \xi'_i).$$

Alors à cause de la propriété universelle de la limite projective on a les morphismes

$$\xi : Ta \rightarrow a, \quad \xi' : T'a \rightarrow a$$

tels que

$$\begin{cases} p_i \cdot \xi = \xi_i \cdot Tp_i, \\ p_i \cdot \xi' = \xi'_i \cdot T'p_i, \end{cases} \quad \forall i \in \mathbf{I}.$$

Il est bien connu que les couples (ξ, a) , (ξ', a) sont des \mathbf{T} - et \mathbf{T}' -algèbres respectivement.

Il reste à montrer que le diagramme (I), § 1, commute; On a

$$\begin{aligned} p_i \cdot \xi \cdot T\xi' &= \xi_i \cdot Tp_i \cdot T\xi = \\ &= \xi_i \cdot T\xi_i \cdot TT'p_i = \\ &= \xi'_i \cdot T'\xi_i \cdot r_{a_i} \cdot TT'p_i = \\ &= \xi'_i \cdot T'\xi_i \cdot T'Tp_i \cdot r_a = \\ &= \xi'_i \cdot T'p_i \cdot T'\xi \cdot r_a = \\ &= p_i \cdot \xi' \cdot T'\xi \cdot r_a, \end{aligned}$$

donc

$$\xi \cdot T\xi' = \xi' \cdot T'\xi \cdot r_a,$$

et par conséquent

$$(\xi, a, \xi') = \lim_{\leftarrow} F.$$

ii) Supposons maintenant que la $\lim_{\rightarrow} U_T^{T'} \cdot F$ existe et est préservée par T et T' , et soit

$$\{a_i \xrightarrow{e_i} a\}_{i \in I}$$

le cône limite inductive de $U_T^{T'} \cdot F$; alors il existe des morphismes uniques

$$\bar{\xi} : Ta \rightarrow a, \quad \bar{\xi}' : T'a \rightarrow a$$

tels que

$$\begin{cases} \bar{\xi} \cdot Te_i = e_i \cdot \xi_i, \\ \bar{\xi}' \cdot T'e_i = e_i \cdot \xi'_i, \end{cases} \quad \forall i \in I,$$

et le triplet $(\bar{\xi}, a, \bar{\xi}')$ est une $\mathbf{T} - \mathbf{T}'$ -bigèbre, limite inductive de F . ■

Revenons à la démonstration de la proposition; étant donné que \mathbf{A} est exacte, les objets $\mathbf{A}(A, A')$ admettent toutes les limites projectives et inductives finies et de plus les flèches $\mathbf{A}(T, A')$ et $\mathbf{A}(A, T')$ préservent les limites inductives parce qu'ils admettent des adjoints à droite.

On peut donc appliquer le lemme précédent et la proposition est démontrée. ■

Théorème fondamental des bicatégories relatives exactes. La \mathbf{V} -bicatégorie $\text{Bim}(\mathbf{A})$ des bimodules d'une \mathbf{V} -bicatégorie exacte \mathbf{A} , est aussi exacte.

Preuve. Résulte de la prop. 3.1. et d'un argument de routine, qu' on laisse au lecteur. ■

REFERENCES

- [1] J. Beck, *Distributive laws*, Springer Lecture Notes v. 80 (1969).
- [2] J. Bénabou, *Les distributeurs*, rapport n° 33, Louvain (1973).
- [3] S. Bozapalides, *Théorie formelle des bicatégories*, Thèse 3^{ème} cycle, Paris, Mars 1976.
- [4] R. Street, *Elementary cosmoi*, Springer Lecture Notes v. 420 (1974).
- [5] J. W. Gray, *Adjointness for 2-categories*, Springer Lecture Notes v. 391 (1974).

S. Bozapalides
Université de Ioannina
Ioannina
Grèce