Jaromír Suchomel

Разложение линейных однородных дифференциальных операторов на сомножители 1-го порядка

Archivum Mathematicum, Vol. 12 (1976), No. 4, 191--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106943`

ARCH. MATH. 4, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XII: 191—198, 1976

РАЗЛОЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА СОМНОЖИТЕЛИ I-ГО ПОРЯДКА

Й. СУХОМЕЛ (J. SUCHOMEL), Brno

(Поступило в редакцию 15го января 1976)

Пусть I любой непустой интервал на действительной прямой R. Множество всех действительных функций, имеющих k непрерывных производных на I, обозначается через $C^k(I)$. Обозначения $Df, f', \frac{d}{dx}f(x)$, где $f \in C^1(I)$, совпадают. Через $\| y \|$ обозначим любую норму вектора $y \in R^m$. Так как в индексы входят только буквы и сумма или разность буквы и числа, запятая между индексами пропускается.

Определение 1. *Пусть задано линейное дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)} = 0, \qquad a_i \in C^0(I),\ i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Пусть существуют функции $\eta_i \in C^{n-i}(I)$, $i = 1, \dots, n$ *такие, что на* I *имеет место*

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)} = (D - \eta_n) \dots (D - \eta_1)\, y \tag{2}$$

для каждого $y \in C^n(I)$. *Тогда скажем, что уравнение* (1) *разложимо.*

Определение 2. *Положительное число* h, *зависящие от выбора коэффициентов* a_i *уравнения* (1) *называется границей разложимости уравнения* (1), *если из неравенства либо* $\beta - \alpha \leqq h$ *для* $I = (\alpha, \beta)$ *либо* $\beta - \alpha < h$ *для* $I = [\alpha, \beta]$ *или* $I = (\alpha, \beta)$ *или* $I = [\alpha, \beta)$, *где* $\alpha, \beta \in R$, *вытекает, что уравнение* (1) *разложимо.*

Разрешимость всех n-точечных задач Валле Пуссена, см. [1] с. 154, равносильна тому, что (1) является неосцилляционным (disconjugate), см. (2) с. 307, [3] с. 43, 46. Неосцилляция уравнения (1) в случае компактного или открытого интервала равносильна тому, что (1) разложимо, см. [2] с. 313, [4] или [3] с. 62, что в случае полуоткрытого интервала неверно, см. на пр. $y'' + y = 0$ на $[0, \pi)$. Но когда (1) разложимо, то всегда является неосцилляционным, см. [4]. См. тоже [5], с. 219.

В работе дается необходимое и достаточное условие для разложимости (1) и несколько признаков разложимости (1), которые по выше сказанному можно сравнивать с признаками неосцилляции.

Лемма 1. *Пусть дана матрица* $A = (a_{ij})$ *порядка* $n \times n$ *с элементами* $a_{ij} \in C^\circ(I)$, $n > 2$. *Через* A_{ij} *или* A_{ijrs} *обозначим алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} *или минора* $\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} 1 \leqq i < r \leqq n, \\ 1 \leqq j < s \leqq n. \end{matrix}$

Для $1 \leqq i < j < k \leqq n$ *имеет место*

$$A_{kk}A_{ijjk} - A_{jk}A_{ijkk} + A_{ik}A_{jjkk} = 0 \tag{3}$$

Доказательство. По образцу доказательства в работе [6] с. 402 или [2] с. 310, 311 можно доказать

$$A_{nn}A_{n-2n-1n-1n} - A_{n-1n}A_{n-2n-1nn} + A_{n-2n}A_{n-1n-1nn} = 0,$$

откуда переставкой строк и столбов вытекает (3).

Лемма 2. *Пусть дана* m*-мерная система дифференциальных уравнений* $y' = f(x, y)$, *где* f — *непрерывная на множестве* $I \times R^m$ *функция и пусть существует строго возрастающая функция* $g \in C^\circ([0, \infty))$ *такая, что* $\|f(x, y)\| \leqq g(\|y\|)$ *для всех* $x \in I$ *и* $y \in R^m$. *Тогда для каждого* $x_0 \in I$, *существует на интервале* $(x_0 - h, x_0 + h) \cap I$ *решение* y *уравнения* $y' = f(x, y)$ *удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$, *где*

$$h = \int_\beta^\infty \frac{dx}{g(x)} \leqq \infty, \qquad \beta = \|y_0\|, \qquad y_0 \in R^m.$$

Доказательство. Применяя бесконечное число раз теорему существования Коши—Пеано, получаем, что решение задачи Коши существует на интервале $(x_0 - h_r, x_0 + h_r) \cap I$, где $h_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{g(nr + \beta)}$. Пользуясь интегральной оценкой, получаем

$$h_r \geqq \int_1^\infty \frac{r}{g(tr + \beta)}\, dt = \int_{r+\beta}^\infty \frac{dx}{g(x)} \quad \text{и} \quad h = \lim_{r \to 0+} h_r = \int_\beta^\infty \frac{dx}{g(x)}.$$

Лемма 3. *Пусть задана система интегральных уравнений*

$$y_i = \beta_i + \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, \ldots, y_m)\, dx, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где f_i — непрерывные на $I \times R^m$ и строго возрастающие по $y_1, \ldots, y_m$ на $I \times (0, \infty)^m$ функции и $\beta_i \in [0, \infty)$ для $i = 1, \ldots, m$, $x_0 \in I$. Пусть существуют функции $u_1, \ldots, u_m \in C^\circ(I)$ удовлетворящие на I неравенствам

$$(5) \qquad u_i \leqq \beta_i + \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^{x} f_i(x, u_1, \ldots, u_m)\,\mathrm{d}x, \; u_i \geqq 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда имеет место $u_i \leqq y_i$ для всех $x \in I$ и $i = 1 \ldots, m$, где $y_1, \ldots, y_m \in C^0(I)$ — решения системы (4).

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ функции $y_{1\varepsilon}, \ldots, y_{m\varepsilon} \in C^0(I)$ являются решением системы

$$(4\varepsilon) \qquad y_{i\varepsilon} = \beta_i + \varepsilon + \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1\varepsilon}, \ldots, y_{m\varepsilon})\,\mathrm{d}x, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Обозначая $\delta_{i\varepsilon} = y_{i\varepsilon} - u_i$, получим из (5), (4ε)

$$\delta_{i\varepsilon} \geqq \varepsilon + \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^{x} [f_i(x, u_1 + \delta_{1\varepsilon}, \ldots, u_m + \delta_{m\varepsilon}) - f_i(x, u_1, \ldots, u_m)]\,\mathrm{d}x,$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Так как $\delta_{i\varepsilon}(x_0) \geqq \varepsilon$ и $\delta_{i\varepsilon} \in C^\circ(I)$, существеут окрестность точки x_0, на которой $\delta_{i\varepsilon} > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Докажется от противного, что на I $\delta_{i\varepsilon} > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Потому что $\delta_{i\varepsilon}$ стремятся к $\delta_i = y_i - u_i$ при $\varepsilon \to 0_+$, имеет место $y_i - u_i \geqq 0$ для всех $x \in I$ и $i = 1, \ldots, m$.

Лемма 4. *Пусть даны функции $a_i \in C^\circ(I)$ и $\eta_i \in C^{n-i}(I)$, $i = 1, \ldots, n$. Для того чтобы имело место равенство* (2) *для каждого $y \in C^n(I)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $p_{ij} \in C^{n-i+1}(I)$, $i = 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, i - 1$, удовлетворяющие на I системе дифференциальных уравнений*

$$(6) \qquad \begin{aligned} p'_{ij} &= p_{ij}\eta_i - p_{ij-1} + p_{i+1j}, \qquad & i = 2, \ldots, n - 1; j = 1, \ldots, i - 1 \\ p'_{nj} &= p_{nj}\eta_n - p_{nj-1} + a_j, & j = 1, \ldots, n - 1 \end{aligned}$$

и системе уравнений

$$(7) \qquad \eta_i = p_{ii-1} - p_{i+1i}, \; i = 1, \ldots, n - 1, \; \eta_n = p_{nn-1} - a_n,$$

где $p_{i0} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Необходимость. По теореме Г. Маммана [4] существует фундаментальная система решений (1) такая, что $v_i = W(y_1, \ldots, y_i) \neq 0$

и $\eta_i = \left(\ln \frac{v_i}{v_{i-1}}\right)'$ на I для $i = 1, \ldots, n$, где $v_0 = 1$. Через Y_{ji} или Y_{ji-1ki} обозначим алгебраическое дополнение элемента $y_i^{(j-1)}$ или минора $\begin{vmatrix} y_{i-1}^{(j-1)} & y_i^{(j-1)} \\ y_{i-1}^{(k-1)} & y_i^{(k-1)} \end{vmatrix}$ в матрице $\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_i \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(i-1)} & \ldots & y_i^{(i-1)} \end{pmatrix}$, $i = 2, \ldots, n + 1$, $j = 1, \ldots, i$ или $i = 3, \ldots, n + 1$, $1 \leqq j < k \leqq i$, где $y_{n+1} \in C^n(I)$ любая функция. Положим

$$P_{ij} = \frac{1}{v_{i-1}} Y_{ji}, \qquad i = 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, i - 1. \tag{8}$$

Тогда

$$\eta_i = \left(\ln \frac{v_i}{v_{i-1}}\right)' = -\frac{v'_{i-1}}{v_{i-1}} + \frac{v'_i}{v_i} = \frac{1}{v_{i-1}} Y_{i-1i} - \frac{1}{v_i} Y_{ii+1} = p_{ii-1} - p_{ii+1},$$

что вместе с $\dfrac{v'_n}{v_n} = - a_n$ дает (7).

Подставляя (8) в (6) используя (7) и $a_j = \dfrac{1}{v_n} Y_{jn+1}$, получаем

$$\frac{1}{v_{i-1}}(-Y_{j-1i} - Y_{jiii+1}) - \frac{v'_{i-1}}{v_{i-1}^2} Y_{ji} = \frac{1}{v_{i-1}} Y_{ji}\left(\frac{v'_i}{v_i} - \frac{v'_{i-1}}{v_{i-1}}\right) - \frac{1}{v_{i-1}} Y_{j-1i} + \frac{1}{v_i} Y_{ji+1}$$

и далее

$v_i Y_{jiii+1} + v'_i Y_{ji} + v_{i-1} Y_{ji+1} = 0$, что в силу (3) справедливо для всех $i = 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, i - 1$.

Достаточность. В силу (6), (7) имеет место

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_j y^{(j-1)} = y^{(n)} + (p_{nn-1} - \eta_n) y^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} (p'_{nj} - p_{nj}\eta_n + p_{nj-1}) y^{(j-1)} =$$

$$= (D - \eta_n)\Big(y^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} y^{(j-1)}\Big) = \ldots = (D - \eta_n) \ldots (D - \eta_{i+1}) \times$$

$$\times \Big(y^{(i)} + \sum_{j=1}^{i} p_{i+1j} y^{(j-1)}\Big) = (D - \eta_n) \ldots (D - \eta_{i+1}) \times$$

$$\times \Big(y^{(i)} + \sum_{j=1}^{i} (p'_{ij} - p_{ij}\eta_i + p_{ij-1}) y^{(j-1)}\Big) =$$

$$= (D - \eta_n) \ldots (D - \eta_i)\Big(y^{(i-1)} + \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} y^{(j-1)}\Big) = \ldots$$

$$\ldots = (D - \eta_n) \ldots (D - \eta_2)(y' + p_{21} y) = (D - \eta_n) \ldots (D - \eta_1) y,$$

где $p_{ii} = 1, i = 2, \ldots, n - 1$.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *было разложимо, необходимо и достаточно, чтобы была на I разрешима система дифференциальных уравнений*

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&p'_{ij} = p_{ij}(p_{ii-1} - p_{i+1i}) - p_{ij-1} + p_{i+1j}, && i = 2, \ldots, n-1,\\
& && j = 1, \ldots, i-1,\\
&p'_{nj} = p_{nj}(p_{nn-1} - a_n) - p_{nj-1} + a_j, && j = 1, \ldots, n-1,
\end{aligned}
$$

где $p_{i0} = 0$, $i = 2, \ldots, n$. См. [5] с. 217–219.

Доказательство вытекает из леммы 4, подставляя (7) в (6).

Критерий 1. *Пусть* $\alpha = \sup\limits_I |a_n| < \infty$, $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq n-1} \sup\limits_I |a_i| < \infty$.

Тогда

$$
h_1 = \ln \frac{\alpha + \delta + 1}{\alpha + \delta - 1} + \begin{cases}
\dfrac{2}{\gamma} \ln \left(\dfrac{2\alpha + \delta - \gamma}{2\alpha + \delta + \gamma} \, \dfrac{\alpha + \gamma + 1}{\alpha - \gamma + 1} \right) & \text{для } 4\beta < (\alpha + 1)^2 \\[2ex]
\dfrac{4}{\alpha + 1} - \dfrac{4}{\alpha + \delta + 1} & \text{для } 4\beta = (\alpha + 1)^2 \\[2ex]
\dfrac{4}{\gamma} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{2\alpha + \delta}{\gamma} - \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha + 1}{\gamma} \right) & \text{для } 4\beta > (\alpha + 1)^2,
\end{cases}
$$

где $\gamma = \sqrt{|(\alpha + 1)^2 - 4\beta|}$, $\delta = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta}$, *явдяется границей разложимости уравнения* (1).

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 2 при $\| y \| = \max |y_i|$, $g_1(x) = \max \{2x^2 + 2x;\ x^2 + (\alpha + 1) x + \beta\}$, $y_0 = 0$ получается

$$
h_1 = 2 \int\limits_0^{x_0} \frac{dx}{x^2 + (\alpha + 1) x + \beta} + \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x},
$$

где $x_0 = \dfrac{1}{2}(\alpha + \delta - 1)$.

Критерий 2. *Пусть* $\alpha = \sup\limits_I |a_n| < \infty$, $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq n-1} \sup\limits_I |a_i| < \infty$.

Тогда

$$
h_2 = \begin{cases}
\dfrac{1}{\gamma} \ln \dfrac{\alpha + 2\gamma + 2}{\alpha - 2\gamma + 2} & \text{для} \quad 2\beta < \left(\dfrac{\alpha}{2} + 1 \right)^2, \\[2ex]
\dfrac{4}{\alpha + 2} & \text{для} \quad 2\beta = \left(\dfrac{\alpha}{2} + 1 \right)^2, \\[2ex]
\dfrac{2}{\gamma} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha + 2}{2\gamma} \right) & \text{для} \quad 2\beta > \left(\dfrac{\alpha}{2} + 1 \right)^2,
\end{cases}
$$

где $\gamma = \sqrt{\left| \left(\dfrac{\alpha}{2} + 1 \right)^2 - 2\beta \right|}$, *является границей разложимости* (1).

Доказательство вытекает из теоремы 1 и леммы 2 при $\| y \| = \max | y_i |$, $g_2(x) = 2x^2 + (\alpha + 2) x + \beta$, $y_0 = 0$.

Замечание 1. Из $g_1 < g_2$ вытекает $h_1 > h_2$, но h_2 немножко проще.

Критерий 3. *Пусть* $\alpha = \sup\limits_I | a_n | < \infty$, $\beta = \sup\limits_I \sum\limits_{i=1}^{n-1} | a_i | < \infty$.

Тогда

$$h_3 = \begin{cases} \dfrac{2}{\gamma} \ln \dfrac{\alpha + 2 + \gamma}{\alpha + 2 - \gamma} & \text{для} \quad 4\beta < (\alpha + 2)^2, \\ \dfrac{4}{\alpha + 2} & \text{для} \quad 4\beta = (\alpha + 2)^2, \\ \dfrac{4}{\gamma}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha + 2}{\gamma}\right) & \text{для} \quad 4\beta > (\alpha + 2)^2, \end{cases}$$

где $\gamma = \sqrt{| (\alpha + 2)^2 - 4\beta |}$, *явдяется границей разложимости* (1).

Доказательство. Из неравенства $\sum\limits_{i=2}^{n-1} \sum\limits_{j=1}^{i-1} | p_{ij}(p_{ii-1} - p_{i+1i}) - p_{ij-1} + p_{i+1j} | + \sum\limits_{j=1}^{n-1} | p_{nj}(p_{nn-1} - a_n) - p_{nj-1} + a_j | \leqq (\sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i-1} | p_{ij} |)^2 + (2 + | a_n |) \sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i-1} | p_{ij} | + \sum\limits_{j=1}^{n-1} | a_j |$, леммы 2 при $\| y \| = \Sigma | y_i |$, $g_3(x) = x^2 + (2 + \alpha) x + \beta$, $y_0 = 0$ и теоремы 1 вытекает $h_3 = 2 \int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^2 + (2 + \alpha) x + \beta}$.

Критерий 4. *Пусть* $\alpha = \sup\limits_I | a_n | < \infty$, $\beta = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n-1} \sup\limits_{x \in I} | \int\limits_{x_0}^{x} a_i(t)\, dt | < \infty$, *где* x_0 *— центр интервала* I. *Тогда*

$$h_4 = \begin{cases} \ln \dfrac{\beta + 1}{\beta} & \text{для} \quad \alpha \leqq \beta + 1 \\ \dfrac{2}{\alpha + 1} \ln\left(\dfrac{\alpha - 1}{2\alpha} \dfrac{\alpha + \beta + 1}{\beta}\right) + \ln \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} & \text{для} \quad \alpha > \beta + 1 \end{cases}$$

является границей разложимости уравнения (1).

Доказательство. Пусть $\beta_j = \sup\limits_{x \in I} | \int\limits_{x_0}^{x} a_j(t)\, dt |$, $p_{ij} \in C^1(I)$ — решения уравнения (9) удовлетворяющие начальным условиям $p_{ij}(x_0) \leqslant 0$, $i = 2, \ldots, n$: $j = 1, \ldots, i - 1$, и $u_{ij} = | p_{ij} |$. Тогда на I справедливо

$$u_{ij} \leqq \operatorname{sgn}(x - x_0) \int\limits_{x_0}^{x} [u_{ij}(u_{ii-1} + u_{ii+1}) + u_{i+1j} + u_{ij-1}]\, dx,$$

$$i = 2, \ldots, n-1, j = 1, \ldots, i-1,$$

$$u_{nj} \leqq \beta_j + \operatorname{sgn}(x - x_0) \int_{x_0}^{x} [u_{nj}(u_{nn-1} + \alpha) + u_{nj-1}] \, dx, \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

Соответствующая система интегральных уравнений равносильна задачи Коши

$$y'_{ij} = \operatorname{sgn}(x - x_0) [y_{ij}(y_{ii-1} + y_{ii+1}) + y_{i+1j} + y_{ij-1}], \; y_{ij}(x_0) = 0,$$

$$i = 2, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, i-1,$$

$$y'_{nj} = \operatorname{sgn}(x - x_0) [y_{nj}(y_{nn-1} + \alpha) + y_{nj-1}], \; y_{nj}(x_0) = \beta_j, j = 1, \ldots, n-1.$$

Применяя лемму 2, где $\| y \| = \sup | y_{ij} |$, $g_4(x) = \max \{2x^2 + 2x, x^2 + (\alpha + 1) x\}$ и $\| y_0 \| = \beta$, лемму 3 и теорему 1 получим $h_4 = 2 \int_{\beta}^{\infty} \frac{dx}{g_4(x)}$.

Критерий 5. *Пусть* $\alpha = \sup_I | a_n | < \infty$, $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{x \in I} | \int_{x_0}^{x} a_i(t) \, dt | < \infty$, *где* x_0 — *центр интервала* I. *Тогда*

$$h_5 = \frac{2}{\sqrt{2 + \alpha}} \ln \frac{\alpha + \beta + 2}{\beta}$$

является границей разложимости (1).

Доказательство точно такое же, как у критерия 4, только $\| y \| = \Sigma \, | y_{ij} |$.

Замечание 2. Критерии 1—5 являются валлепуссеновского типа, см. [3] с. 51 но h получается в явном виде. Критерий 2 или 1 или 3 дает в некоторых случаях лучшие результаты чем признак А. Ю. Левина [7] или Г. С. Зайцевой [8] или Г. С. Зайцевой [9]. Критерии 4, 5 в некоторых случаях дают лучшие результаты чем признак Z. Nehari [10] обобщенный в [8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Сансоне: *Обыкновенные дифференциальные уравнения* т. *I*, Москва 1953.

[2] P. Hartman: *Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations*, Amer. J. of Math., v. XCI, №2, (1969), 306—362.

[3] А. Ю Левин: *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)} + p_1(t) x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t) x = 0$ УМН, т. 24, в. 2, 1969, 43—96.

[4] G. Mammana: *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazioni relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*, Math. Z., 33, (1931), 186—231.

[5] В. Я. Скоробогатько: *Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители* 1, УМЖ, № 2, 1963, 217—223.
[6] E. Barvínek: *Über zwei Eigenschaften der Wronskischen Determinanten,* Publ. Fac. Sci. UJEP Brno, № 456, (1964), 401—407.
[7] А. Ю. Левин: *Некоторые оценки дифференцируемой функции,* ДАН СССР, 138, № 1, 1961, 37—38.
[8] Г. С. Зайцева: *О многоточечной краевой задаче,* ДАН СССР, т. 176, № 4, 1967, 763—765.
[9] Г. С. Зайцева: *О некоторых критериях неосцилляции линейных дифференциальных операторов,* ДАН СССР, т. 177, № 6, 1967, 1263—1264.
[10] Z. Nehari: *On an inequality of Lyapunov,* Studies in Math. Anal. and Rel. Top., (1962), 251—256.

J. Suchomel
602 00 Brno, nám. 28. října 26
ЧССР