Michail M. Konstantinov

Об одном интегральном неравенстве

Archivum Mathematicum, Vol. 12 (1976), No. 2, 81--85

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/106932`

ARCH. MAT. 2, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS
XII: 81—86, 1976

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

М. М. КОНСТАНТИНОВ

(Поступило в редакцию 12-го марта 1975 г.)

Инегральные неравенства находят широкое применение в теории дифференциальных уравнений. При помощи этих неравенств доказывают теоремы об единственности решений, о зависимости решений от параметров [1] а также теоремы об усреднении в дифференциальных уравнениях [2], [3] и т. д. Особено часто применяется неравенство Гронуолла-Беллмана и некоторые его обобщения.

В настоящей работе исследуется одно обобщение неравенства Гронуолла-Беллмана, которое возникает в теории дифференциальных уравнений в случае, когда решения рассматриваются в функциональном пространстве с интегральной нормой. Полученные оценки значительно улучшают некоторые результаты из [4].

Рассмотрим интегральное неравенство

$$x(t) \leqq A + B\left(\int_0^t \omega(s)\left(x(s)\right)^n \mathrm{d}s\right)^{1/n} = \tag{1}$$

$$\doteq \Pi(x)(t),\ t \in I = [0, T),\ T \leqq \infty,$$

где A, B, $n > 0$; ω — неотрицательная и интегруемая на интервале I функция, а решение x ищется в классе неотрицательных при $t \in I$ функций.

Далее будем считать, что $A = B = 1$, так как этого можно осуществить заменой переменных $x(t) = Ax'(t)$, $\omega(t) = B^{-n}\omega'(t)$.

При $n = 1$ получаем известное интегральное неравенство Гронуолла-Беллмана, которое имеет решение $x(t) \leqq \exp\left(\Omega_1(\mathrm{t})\right)$, где $\Omega_n(t) = n^{-1}\int_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s$. В работе [4] для $\omega = \mathrm{const}$ получена оценка $x(t) \leqq 1 + \exp(n^{-1}2^n\omega \mathrm{t})$, которая уже для $n = 1$ намного хуже по сравнению с решением $x(t) \leqq \exp(\omega t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мажорантным решением (м. р.) будем называть такое решение $x_n = x_n(t)$ неравенства (1), что $x(t) \leqq x_n(t)$, $t \in I$, для любого решения x этого неравенства.

Очевидно $x_n(t) \geqq 1$, $t \in I$. Из определения также следует, что если м. р. существует, то оно единствено.

Покажем, что м. р. существует. Для $n = 1$ это очевидно, так что будем рассматривать случай $n \neq 1$. Пусть $x = x(t)$ — решение неравенства (1). Тогда

$$\frac{x(t)}{\Pi(x)(t)} \leqq 1 \Rightarrow \left(\int_0^t \omega x^n \, ds\right)^{1/n} \leqq \left(\int_0^t \omega(\Pi(x))^n \, ds\right)^{1/n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi(x)(t) \leqq 1 + \left(\int_0^t \omega(s)(\Pi(x)(s))^n \, ds\right)^{1/n},$$

т. е. $\Pi(x) = \Pi(x)(t)$ тоже является решением (1). Следовательно, если м. р. существует, то $x_n(t) = \Pi(x_n)(t)$, $t \in I$.

Пусть $T < \infty$. Рассмотрим пространство C_0 непрерывных на интервале I функций, с метрикой, порожденной нормой

$$\| x \| = \sup\left\{| x(t) | \exp\left(-a \int_0^t (\omega(s))^{1/n} \, ds\right);\ t \in I\right\},\ a = 2T^{1/n-1}.$$

Пусть $C = \{x_{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset K$, $x_{(1)} \equiv 1$, $x_{(k+1)} = \Pi x_{(k)}$, где $K \subset C_0$ — конус неотрицательных на I функций. Очевидно $\Pi(C) \subset C$. Имеем $x_{(2)}(t) \geqq x_{(1)}(t)$ и так как $x - y \in K \Rightarrow \Pi(x) - \Pi(y) \in K$ то $x_{(m)} - x_{(k)} \in K$ при $m \geqq k$. Пусть для определенности $x - y = \Delta \in K$; $x, y \in C$. В силу неравенств Минковского и Гелдера получаем

$$\Pi(x)(t) - \Pi(y)(t) = \left(\int_0^t \omega x^n \, ds\right)^{1/n} - \left(\int_0^t \omega y^n \, ds\right)^{1/n} =$$

$$= \left(\int_0^t (\omega^{1/n} y + \omega^{1/n}\Delta)^n \, ds\right)^{1/n} - \left(\int_0^t \omega y^n \, ds\right)^{1/n} \leqq \left(\int_0^t \omega \Delta^n \, ds\right)^{1/n} \leqq$$

$$\leqq \left(\int_0^t ds\right)^{1/n-1} \int_0^t \omega^{1/n}\Delta \, ds \leqq T^{1/n-1} \int_0^t \omega^{1/n}\Delta \, ds. \tag{2}$$

Так как

$$\Delta(s) \leqq \| \Delta \| \exp\left(a \int_0^t (\omega(s))^{1/n} \, ds\right),$$

то из (2) следует

$$\Pi(x)(t) - \Pi(y)(t) < a^{-1} T^{1/n-1} \| \Delta \| \exp\left(a \int_0^t (\omega(s))^{1/n} \, ds\right)$$

и

$$\| \Pi(x) - \Pi(y) \| < \frac{1}{2} \| x - y \| .$$

Отсюда в силу принципа Банаха следует существование единственного м. р.

Случай бесконечного промежутка I рассматривается при помощи возрастающей последовательности интервалов $I_k = [0, T_k)$, $\bigcup\limits_k I_k = I$, для каждого из которых в силу прежных рассуждений существует единственное локально ограниченное м. р. Склеивая эти решения получаем единственное м. р. на всей полуоси.

М. р. — непрерывная функция на интервале I, дифференцируемая всюду за исключением, может быть, в точке $t = 0$. Если функция ω допускает асимптотическое представление $\omega(t) = 0(t^m)$, $t \to 0$ $(m > -1)$, производная $\mathrm{d}x_n/\mathrm{d}t|_{t=+0}$ существует при $m + 1 - n \geqq 0$.

Перейдем к построению м. р. Положим

$$X(t) \overset{\mathrm{d}f}{=} \int\limits_0^t \omega(s)(x_n(s))^n \mathrm{d}s = (x_n(t) - 1)^n.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \omega(t)(x_n(t))^n = \omega(t)(1 + (X(t))^{1/n})^n$$

и

$$\int\limits_0^{X(t)} \frac{\mathrm{d}\Theta}{(1 + \Theta^{1/n})^n} = \int\limits_0^t \omega(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Положим $\Theta = \tau^n(1 - \tau)^{-n}$, $0 \leqq \tau \leqq (X(t))^{1/n}/(1 + (X(t))^{1/n})$.
Тогда (3) принимает вид

$$\int\limits_0^{\lambda_n(t)} \frac{\tau^{n-1}}{1 - \tau} \mathrm{d}\tau = \Omega_n(t); \qquad \lambda_n(t) = (x_n(t) - 1)/x_n(t).$$

Следовательно

$$\Omega_n(t) = \int\limits_0^{\lambda_n(t)} d\left(\tau^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{n + k}\right)$$

и

$$f_n(\lambda) = \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{n + k} = \Omega_n(t), \qquad \lambda = \lambda_n(t). \tag{4}$$

Функциональное уравнение (4) определяет неизвестную функцию

$$\lambda_n : t \to \lambda_n(t) \in [0, 1),$$

откуда в силу зависимости $x_n(t) = 1/(1 - \lambda_n(t))$ находим м. р. Ясно, что при произвольном n определить $\lambda_n(t)$ (а следовательно и $x_n(t)$) в замкнутом виде невозможно. Независимо от этого из (4) можно найти оценки для м. р. Пусть например при некотором n имеют место неравенства

$$f_{n1}(\lambda) \leqq f_n(\lambda) \leqq f_{n2}(\lambda), \ \lambda \in [0, 1).$$

Тогда если $\lambda_{n1} = \lambda_{n1}(t)$ — корень уравнения $f_{n1}(\lambda_{n1}) = \Omega_n(t)$, а $\lambda_{n2} = \lambda_{n2}(t)$ — корень уравнения $f_{n2}(\lambda_{n2}) = \Omega_n(t)$, то $\lambda_{n2}(t) \leqq \lambda_n(t) \leqq \lambda_{n1}(t)$

и
$$1/(1 - \lambda_{n2}(t)) \leqq x_n(t) \leqq 1/(1 - \lambda_{n1}(t))$$

при $t \in I$.

При $0 < n \leqq 1/2$ имеем

$$f_n(\lambda) = \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{n+k} \geqq \lambda^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{1/2+k} = f_{1/2}(\lambda) = $$
$$= \ln\left(\frac{1+\lambda^{1/2}}{1-\lambda^{1/2}}\right) = f_{n1}(\lambda).$$

Отсюда

$$\lambda_{n1}(t) = \{\exp(\Omega_n(t)) - 1\}^2/\{\exp(\Omega_n(t)) + 1\}^2$$

и

(5) $$x_n(t) \leqq 4^{-1}\{\exp(\Omega_n(t)) + 1\}^2/\exp(\Omega_n(t)) = \Gamma_{1/2}(t), \ n \leqq 1/2.$$

Аналогичным образом получаем

(6) $$x_n(t) \geqq \Gamma_{1/2}(t), \ n \geqq 1/2.$$

При $1/2 \leqq n \leqq 1$ имеют место оценки

$$f_n(\lambda) = \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{n+k} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k/k = f_1(\lambda) =$$
$$= -\ln(1-\lambda) = f_{n1}(\lambda).$$

Следовательно $\lambda_{n1}(t) = 1 - \exp(\Omega_n(t))$ и

(7) $$x_n(t) \leqq \exp(\Omega_n(t)) = \Gamma_1(t), \ 1/2 \leqq n \leqq 1,$$

(8) $$x_n(t) \geqq \Gamma_1(t), \ n \geqq 1.$$

Для $1 < n \leqq 2$ можно написать

$$f_n(\lambda) = \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{n+k} > n^{-1}\lambda^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k/k =$$
$$= -n^{-1}\lambda^{n-1}\ln(1-\lambda) > -n^{-1}\lambda\ln(1-\lambda) \geqq$$
$$\geqq -n^{-1}(\lambda + \ln(1-\lambda)) > -n^{-1}(1 + \ln(1-\lambda)) = f_{n1}(\lambda).$$

Отсюда

$$x_n(t) < \exp(1 + n\Omega_n(t)), \ 1 < n \leqq 2. \tag{9}$$

При $n < 1$ имеем также

$$x_n(t) \leqq 1 + \left(\int_0^t \omega^{1/(1-n)} \, ds\right)^{1/n-1} \int_0^t x_n(s) \, ds = 1 + \tilde{\omega}(t) \int_0^t x_n(s) \, ds,$$

т. е.

$$x_n(t) \leqq 1 + \tilde{\omega}(t)\left(\exp \int_0^t \tilde{\omega}(s) \, ds\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau \tilde{\omega}(s) \, ds\right) d\tau, \ n > 1. \tag{10}$$

Зависимости (5)–(10) дают вверхные и нижные оценки м. р. Для $n = 1/2$ и $n = 1$ оценки (5)–(8) – точные.

Отметим наконец, что для рациональных значений n можно найти обратную функцию $t = t(x_n)$. При подходящих аппроксимациях этой функции для заданного n можно найти более точные двухсторонные оценки роста м. р.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Кодингтон, Н. Левинсон: *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* Физматгиз, Москва, 1958.
2. А. Н. Филатов: *Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.* „ФАН“, Ташкент, 1971.
3. Д. Д. Байнов, М. М. Константинов: *Методът на усредняването и неговото приложение в техниката.* „Наука и изкуство“, София, 1973.
4. B. D. Coleman, D. R. Owen: *On the Initial Value Problem for a Class of Functional Differential Equations.* Arch. Rational Mech. Anal., 1974, v. 55, No 4, 275—299.

М. М. Константинов
1504, София — 4, ул. Омуртаг — 10
Болгария