N. N. Yakovlev

Свойства подпространста Σ-произведений, определяемые с помощью покрытий

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 25 (1984), No. 1, 29--53

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

25,1 (1984)

СВОЙСТВА ПОДПРОСТРАНСТВ Σ-ПРОИЗВЕДЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПОКРЫТИЙ

Н.Н. ЯКОВЛЕВ

Резюме: В данной работе предлагается общая конструкция получения наследственных свойств, определяемых с помощью покрытий у подпространств Σ-произведений. Кроме того доказывается, что счетное тихоновское произведение σ-произведений пространств со счетной базой является линделефовым пространством.

Ключевые слова: Σ-произведение, линделефовость, слабая паракомпактность, металинделефовость.

Классификация: 54D30.

Введение. Σ-произведение топологических пространств является классическим объектом изучения как в общей топологии, так и в функциональном анализе. В общей топологии Σ-произведения рассматриваются в топологиях, индуцированных из соответствующих тихоновских произведений, а именно, если Γ -множество индексов, $\alpha \in \Gamma$ и X_α- топологическое пространство, точка $\xi_\alpha \in X_\alpha$ то подпространство $\Sigma(X_\alpha,\xi_\alpha,\Gamma)=\{\bar{x}=(x_\alpha)\in \Pi X_\alpha : |\{\alpha\in\Gamma: \xi_\alpha \neq x_\alpha\}| \le \aleph_0\}$ наделенное топологией из $\Pi\{X_\alpha : \alpha\in\Gamma\}$ и называется Σ-произведением пространств X_α (с выделенной точкой ξ_α).

σ-произведением топологических пространств называется пространство

$$\sigma(X_\alpha,\xi_\alpha,\Gamma) =$$

$$=\{\bar{x}=(x_\alpha)\in \Pi\{X_\alpha : \alpha\in\Gamma\} : |\{\alpha\in\Gamma: \xi_\alpha \neq x_\alpha\}| < \aleph_0\},$$

$$\sigma(X_\alpha,\xi_\alpha,\Gamma) \subseteq \Sigma(X_\alpha,\xi_\alpha,\Gamma).$$

В последнее время широкому изучению подверглись также Σ^*-произведения метрических пространств ([1],[2]), определяемые следующим образом:

$$\Sigma^*(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma) =$$
$$= \{\bar{x} = (x_\alpha) \in \Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\} : \forall \varepsilon > 0 |\{\alpha \in \Gamma : \rho(x_\alpha, \xi_\alpha) > \varepsilon\}| < \aleph_0\}.$$

Самым известным из Σ^*-произведений является Σ^*-произведение прямых - $\Sigma^*(R_\alpha, 0, \Gamma)$. Это пространство гомеоморфно пространству всех счетных, сходящихся к нулю последовательностей в топологии поиндексной сходимости на Γ и будет обозначаться $c_0(\Gamma)$. Хорошо известно [3], что X является эберлейновским бикомпактом тогда и только тогда, когда X гомеоморфно вкладывается в $c_0(\Gamma)$.

Здесь мы предлагаем распространить понятие Σ^*-произведения на классы пространства более общие, чем метрические.

Пусть для всякого $\alpha \in \Gamma$ X_α непустое множество, $\xi_\alpha \in X_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha = \{F_n(\xi_\alpha) : n \in N\}$ - некоторая счетная база фильтра и $F_n(\xi_\alpha) \ni \xi_\alpha$. Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$.

<u>Определение 1.</u> Σ^*-произведением множеств X_α по выделенному базису $\mathcal{B}$ называется множество

$$\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma) = \{\bar{x} = (x_\alpha) \in \Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\} : \forall n \in N |\{\alpha \in \Gamma : x_\alpha \notin F_n(\xi_\alpha)\}| < \aleph_0\}.$$

Ясно, что если для всякого $\alpha \in \Gamma$ и для всякого $n \in N$ $F_n(\xi_\alpha) = \{\xi_\alpha\}$, то такое Σ^*-произведение множеств X_α совпадает с σ-произведением множеств X_α и вообще всегда $\sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma) \subseteq \Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$. Если же $\mathcal{B}_\alpha$ есть база T_1-фильтра, т.е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(\xi_\alpha) = \{\xi_\alpha\}$, то всегда $\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma) \subseteq \Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$.

Если X_α-топологическое пространство, ξ_α - точка с первой аксиомой счетности в X_α и $\mathcal{B}_\alpha = \{O_n(\xi_\alpha) : n \in N\}$ - некоторый счетный базис в точке ξ_α, а $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, то можно определить Σ^*-произведение пространств X_α:

Определение 2. Σ^*-произведением пространств $X_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ по выделенному базису $\mathcal{B}$ называется множество $\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ с топологией, индуцированной из тихоновского произведения $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$.

Определение Σ^*-произведения зависит от выбора базиса $\mathcal{B}_\alpha$ точки ξ_α и поэтому определяется неоднозначно. Даже в случае счетного Γ и простейшего X_α-нетривиально сходящейся последовательности к ξ_α не все Σ^*-произведения гомеоморфны между собой (одно из них можно сделать гомеоморфным произведением $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ и, значит, бикомпактным, а другое - всюду плотным в таком произведении, но не совпадающим с ним . Однако, многие топологические свойства таких Σ^*-произведений могут быть изучены одним и тем же способом.

Можно ввести Σ^*-произведение топологических пространств $\Sigma^*(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ и в том случае, если каждое $X_\alpha - T_1$ и обладает счетной сетью.

Действительно, если для $\alpha \in \Gamma$ X_α есть T_1-пространство и $nw(X_\alpha) \leq \aleph_0$, то существует регулярное пространство со счетной базой Y_α и уплотнение $f_\alpha : Y_\alpha \xrightarrow{\text{на}} X_\alpha$. Поэтому, если $f = \Pi\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, то в $\Pi = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ можно рассматривать образ любого Σ^*-произведения пространств Y_α как подпространство Π.

Пусть $f = \Pi\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$.

Определение 3. Σ^*-произведением X_α - T_1 -пространств со счетной сетью - называется подпространство $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, являющееся непрерывным взаимооднозначным образом некоторого $\Sigma^*_{\mathcal{B}}$-произведения пространств Y_α при отображении f.

Заметим, что так определенное Σ^*-произведение пространств со счетной сетью как множество совпадает с $\Sigma^*_{\mathcal{B}_0}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ из определения 1, где $\mathcal{B}_0 = f(\mathcal{B})$.

Замечание 1. Отметим, что Σ^*-произведение множеств $\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ всегда можно топологизировать, задавая топологию τ_α на X_α следующим образом: все точки X_α, кроме ξ_α, - изолированы, а базу окрестностей точки ξ_α составляет семейство $\{F_n(\xi_\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ и наделяя $\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ топологией, индуцированной из произведения $\prod_{\alpha\in\Gamma}\{X_\alpha, \tau_\alpha\}$. Такое Σ^*-произведение пространств (X_α, τ_α) очевидно, удовлетворяет определению 2.

Подмножество $Z \subseteq \Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ называется счетно инвариантным [4], если для любого $\bar{x} \in Z$ и любого счетного $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ точка $\bar{x}/_{\Gamma_0} \in Z$, где $\bar{x}/_{\Gamma_0}(\alpha) = \bar{x}(\alpha)$, если $\alpha \in \Gamma_0$ и $\bar{x}/_{\Gamma_0}(\alpha) = \xi_\alpha$, если $\alpha \in \Gamma \setminus \Gamma_0$. Всякое $\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$, очевидно, счетно инвариантно.

Предложение 1. Если для всякого $n \in N$ X_α есть Σ^*-произведение T_1-пространств с первой аксиомой счетности, то $X = \prod\{X_n : n \in N\}$ также гомеоморфно некоторому Σ^*-произведению пространств с первой аксиомой счетности и счетно инвариантно в Σ-произведении этих пространств.

Действительно, если $X_n = \Sigma^*_{\mathcal{B}}(X^n_\alpha, \xi^n_\alpha, \Gamma^n)$, где $\mathcal{B}_n = \cup\{\mathcal{B}^n_\alpha, \alpha \in \Gamma_n\}$, а $\mathcal{B}^n_\alpha = \{O_k(\xi^n_\alpha) : k = 1, 2, \ldots\}$, то пусть $\tilde{\mathcal{B}}^n_\alpha = \{\tilde{O}_k(\xi^n_\alpha); k = 1, 2, \ldots\}$ и $\tilde{O}_1(\xi^n_\alpha) = \ldots = \tilde{O}_n(\xi^n_\alpha) = X^n_\alpha$, а $\tilde{O}_{n+k}(\xi^n_\alpha) = O_k(\xi^n_\alpha)$. Тогда если $\tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in\Gamma_n}\{\tilde{\mathcal{B}}^n_\alpha : \alpha \in \Gamma_n\}$ и $\Gamma = \cup\{\Gamma_n : n \in N\}$, то $\Sigma^*_{\tilde{\mathcal{B}}}(X^n_\alpha, \xi^n_\alpha, \Gamma) = \prod\{X_n : n \in N\}$.

Докажем это. Пусть $\bar{x} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, $k \in N$ и $A_k = \{\alpha \in \Gamma : x_\alpha \notin \tilde{O}_k(\xi_\alpha)\}$. Тогда если $n \geq k$, то для всякого $\alpha \in \Gamma_n$ $\tilde{O}_k(\xi^n_\alpha) = X^n_\alpha$ и поэтому для всех $\alpha \in \cup\{\Gamma_n : n \geq k\}$ $\tilde{O}_k(\xi^n_\alpha) \ni x_\alpha$, значит $A_k \subseteq \cup\{\Gamma_n : n < k\}$. Но если $\alpha \in A_k \cap \Gamma_{n_0}(n_0 < k)$, то $x_\alpha \notin \tilde{O}_k(\xi^{n_0}_\alpha) = O_{k-n_0}(\xi^{n_0}_\alpha)$.

Но по условию $\bar{x}/_{\Gamma_{m_0}} \subseteq \Sigma^*_{\mathcal{B}_{m_0}}$, значит для всякого m_0 множество $A_k \cap \Gamma_{m_0}$ конечно, поэтому $A_k = \bigcup_{m_0<k} (A_k \cap \Gamma_{m_0})$ также конечно. Итак $\bar{x} \in \Sigma^*_{\mathcal{B}}$.

Обратно, если $\bar{x} \notin \Pi\{X_m : m \in N\}$, то найдется $m_0 : (\bar{x})_{m_0} \notin \dot{X}_{m_0}$, а это значит, что существует такое $k_0 \in N$ и $\Gamma' \subseteq \Gamma_{m_0} : |\Gamma'| = \aleph_0$, что $\bar{x}(\alpha) \notin O_{k_0}(\xi^{m_0}_{\alpha})$, если $\alpha \in \Gamma'$, но тогда $\bar{x}(\alpha) \notin \tilde{O}_{m_0+k_0}(\xi^{m_0}_{\alpha})$, если $\alpha \in \Gamma' \subseteq \Gamma$, т.е. $\bar{x} \notin \Sigma^*_{\mathcal{B}}$. Итак, $\Sigma^*_{\mathcal{B}} = \Pi\{X_m : m \in N\}$.

Счетная инвариантность $\Sigma^*_{\mathcal{B}}$ в Σ-произведении очевидна.

<u>Следствие</u>. Если для всякого $m \in N$ X_m – σ-произведение T_1-пространств с первой аксиомой счетности, то $\prod_{m=1}^{\infty} X_m$ гомеоморфно подмножеству некоторого Σ^*-произведения пространств с первой аксиомой счетности и счетно инвариантно в Σ-произведении этих пространств.

<u>Предложение 2</u>. Если для всякого $m \in N$ X_m есть Σ^*-произведение T_1-пространств со счетной сетью, то $X = \prod_{m=1}^{\infty} X_m$ вновь гомеоморфно Σ^*-произведению таких пространств.

Предложение 2 вытекает из предложения 1 и определения 3.

Если X пространство со счетной базой, $\xi \in X$, то базис $\{O_n(\xi)\}$ назовем полным, если для любой окрестности $O(\xi)$ найдется $\mathcal{K} \subseteq N$ такое, что $O(\xi) = \cup\{O_m(\xi),\ m \in \mathcal{K}\}$.

Если для всякого $\alpha \in \Gamma$ пространство X_α обладает счетной базой, $\xi_\alpha \in X_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha$ -полный базис точки ξ_α, то $\Sigma^*_{\mathcal{B}}$-произведение пространств X_α по базису $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ будем называть полным Σ^*-произведением.

<u>Предложение 3</u>. Всякое Σ^*-произведение пространств со счетной базой является полным Σ^*-произведением.

Доказательство. Пусть $\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ - некоторое Σ^*-произведение пространств X_α и $w(X_\alpha) \le \aleph_0$. Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha\}$ и $\mathcal{B}_\alpha = \{O_m(\xi_\alpha) : m \in N\}$. Пусть $\mathcal{V}_\alpha = \{V_n(\alpha)\}_{n \in N}$ счетная база X_α такая, что $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha$. Пусть $\psi : N \times N \xrightarrow{\text{на}} N$ - биективное отображение.

Положим для всякого $\alpha \in \Gamma$ и для всякого $k \in N$ $U_k(\xi_\alpha) = O_m(\xi_\alpha) \cup V_n(\alpha)$, где $(m, n) = \psi^{-1}(k)$. Ясно, что $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha = \{U_k(\xi_\alpha) : k \in N\}$ - полный счетный базис X_α. Положим $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathcal{B}}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$. Тогда

$$\Sigma^*_{\mathcal{B}}(X_\alpha) = \Sigma^*_{\tilde{\mathcal{B}}}(X_\alpha).$$

Действительно, $\Sigma^*_{\tilde{\mathcal{B}}} \subseteq \Sigma^*_{\mathcal{B}}$, т.к. для всякого $m \in N$ найдется $n \in N$ такое, что $U_k(\xi_\alpha) = O_m(\xi_\alpha)$ для $k = \psi(m, n)$. Если же $\bar{x} \notin \Sigma^*_{\tilde{\mathcal{B}}}$, то существует натуральное k и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma : |\Gamma_0| = \aleph_0$ такие, что для всех $\alpha \in \Gamma_0$ $x_\alpha \notin U_k(\xi_\alpha)$, но если $\psi^{-1}(k) = (m, n)$, то $U_k(\xi_\alpha) = O_m(\xi_\alpha) \cup V_n(\alpha)$ и, значит, $x_\alpha \notin O_m(\xi_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Gamma_0$, поэтому $\bar{x} \notin \Sigma^*_{\mathcal{B}}$.

Следствие. Всякое Σ^*-произведение пространств со счетной сетью есть образ при уплотнении некоторого полного Σ^*-произведения пространств со счетной базой.

Отметим также, что для T_1-пространств со счетной сетью всегда $\sigma \subseteq \Sigma^* \subseteq \Sigma$.

Существуют способы обобщения понятия Σ^*-произведения по фильтрам, не обязательно обладающим счетными базисами. Например, если для всех $\alpha \in \Gamma$ $X_\alpha = X$, $\xi_\alpha = \xi$, то есть определение пространства $C_\xi(\Gamma, X)$ [4]: $C_\xi(\Gamma, X) = \{f : \Gamma \to X$, таких, что $\forall O(\xi)\ |\{\alpha : f(\alpha) \notin O(\xi)\}| < \aleph_0\}$. Ясно, что если $X_\alpha = R$, $\xi = 0$, то $C_0(\Gamma, R)$ - это просто $c_0(\Gamma)$. Мы будем рассматривать $C_\xi(\Gamma, X)$ в топологии поточенной сходимости на Γ. $C_\xi(\Gamma, X)$ не всегда лежит в Σ-произведении $\Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$, где $X_\alpha = X$, $\xi_\alpha = \xi$, хотя оно заведомо есть подпространство этого Σ-произведения в случае, если ξ - точка счетного псевдохарактера. Это обстоятельство будет использовано в этой работе, так как здесь мы будем рассматривать случаи, когда X регулярно и со счетной сетью.

Если X и Y топологические пространства, то $C_p(X, Y)$ будет обозначать пространство всех непрерывных функций из X в Y в топологии поточечной сходимости. Если $Y = R$, то $C_p(X, R)$ будем обозначать $C_p(X)$.

Пусть X топологическое пространство, а $L \subseteq C_0(\Gamma)$, тогда $C_p(X, L)$ гомеоморфно вкладывается в $C_0(\Gamma, C_p(X))$ [4]. Гомеоморфизм осуществляется отображением ψ:

$\psi: C_p(X, L) \longrightarrow C_0(\Gamma, C_p(X))$, где

$(\psi(f)(\alpha))(x) = (f(x))(\alpha)$, $f \in C_p(X, L)$, $\alpha \in L$, $x \in X$.

Если же X со счетной сетью, то $C_p(X)$ также со счетной сетью [5], значит

$C_0(\Gamma, C_p(X)) \subseteq \Sigma(Y_\alpha, 0, \Gamma)$, где $Y_\alpha = C_p(X)$ для всех $\alpha \in \Gamma$. Наконец, $\pi_\alpha: \Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \longrightarrow X_\alpha$ будет обозначать α-ю проекцию, т.е. $\pi_\alpha(\bar{x}) = \bar{x}(\alpha)$.

Основные теоремы. Поскольку в определении $\Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ (как, впрочем, и в определении $C_\xi(\Gamma, X)$) особо выделяется точка $\bar{\xi} = (\xi_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$, не удивительно, что топология в этой точке играет определяющую роль в топологических свойствах подмножеств Σ-произведения.

Пусть $\mathcal{B} = \{O(\bar{\xi})\}$ - некоторый базис точки $\bar{\xi}$ замкнутый относительно конечных пересечений и содержащий Σ. Тогда $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии на Σ-произведении. Мы будем называть ее $\tau_1(\mathcal{B})$.

Обозначим через τ_2 такую топологию на Σ, предбазу которой образуют множества вида $\pi_\alpha^{-1}(U) \cap \Sigma$ (где U открыто в X_α, $U \not\ni \xi_\alpha$ и $\alpha \in \Gamma$), а также множество Σ.

Тогда справедливо следующее

<u>Предложение 4</u>. Топология τ на Σ-произведении пространств X_α (и, значит, на любом $X \subseteq \Sigma$) есть верхняя грань двух топологий $\tau_1(\mathcal{B})$ и τ_2, т.е. $\tau = \sup\{\tau_1(\mathcal{B}), \tau_2\}$.

Такое специальное разложение топологии Σ-произведения мы будем обозначать $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$.

<u>Замечание 2</u>. В отличие от τ_1, топология τ_2 определяется однозначно.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $Z = X \times Y$, X наследственно финально-компактно, тогда, если (а) Y с точечно-счетной базой, то Z наследственно металинделефово;

(в) Y с σ-точечно-конечной базой, то Z наследственно σ-метакомпактно;

(с) Y с σ-локально-конечной базой, то Z наследственно паракомпактно.

Доказательство проведем для случая σ-точечно-конечной базы.

Пусть $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ - σ-точечно-конечная база Y, множества вида $u \times v$, где u открыто в X, а $v \in \mathcal{B}$ образуют базу Z, поэтому достаточно доказать, что из любого семейства $\gamma = \{u \times v\}$ можно выделить σ-точечно-конечное семейство с тем же телом. Пусть $V = \{v \in \mathcal{B} : \exists u \subseteq X$ и $u \times v \in \gamma\}$. Для всякого v, пусть $\mathcal{U}(v) = \{u : u \times v \in \gamma\}$. По условию на X, существует счетное семейство $\widetilde{\mathcal{U}}(v) \subseteq \mathcal{U}(v)$ с тем же телом, что и $\mathcal{U}(v)$. Тогда семейство $\gamma_v = \{u \times v : u \in \widetilde{\mathcal{U}}(v)\}$ счетно и имеет то же тело, что $\{u \times v : u \in \mathcal{U}(v)\}$. Поэтому

$\cup\{\cup\{\gamma_v : v \in \mathcal{V}\}\} = \cup\gamma$. Перенумеруем произвольным образом элементы $\tilde{\mathcal{U}}(v) = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда семейство
$\gamma_{km} = \{u_m \times v : v \in \mathcal{B}_k \cap \mathcal{V},\ u_m \in \tilde{\mathcal{U}}(v)\}$
точечно-конечно и $\bigcup_{k,m} \gamma_{km} = \cup\gamma$.

Если τ_1 и τ_2 две топологии на X и $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$, то пространство (X, τ) гомеоморфно диагонали в произведении $(X,\tau_1) \times (X,\tau_2)$, поэтому Теорема 1 эквивалентна следующей:

Теорема 1'. Пусть топология τ на X такова, что $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ и τ_1-наследственно линделефова, тогда если:
(а) τ_2 обладает точечно-счетной базой, то X наследственно металинделефово;

(б) τ_2 обладает σ-точечно-конечной базой, то X наследственно σ-метакомпактно;

(с) τ_2 обладает σ-локально-конечной базой, то X наследственно паракомпактно.

Замечание 3. Если τ_2 обладает базой, являющейся σ-локально-конечным семейством в топологии τ на X, то (X, τ) также наследственно паракомпактно.

Из Предложения 4 и Теоремы 1 следует, что для того, чтобы подмножество X из Σ-произведения обладало нужным наследственным свойством по покрытию, достаточно, чтобы в разложении топологии τ на X $(\tau = \tau_1 \otimes \tau_2)$ топология τ_1 была наследственно линделефовой, а τ_2 обладала базой с аналогичной характеристикой. Здесь мы имеем

Теорема 2. Пусть (X, τ) одно из следующих пространств:
(а) X -финально-компактно в Σ-произведении пространств с первой аксиомой счетности,
(в) X - Σ^*-произведение пространства с первой аксиомой

счетности,

(c) X - Σ^*-произведение пространств со счетной сетью,

(d) $X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где каждое X_n есть пространство из (в) или (c),

(e) $X = C_0(\Gamma, C_p(Z))$, где Z -полное сепарабельное метрическое пространство.

Тогда существует такая наследственно линделефова топология τ_1 на X, что $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$.

Доказательство. Мы будем использовать следующую лемму ([6]).

Лемма. Пусть $\mathcal{B} = \{B\}$ несчетное семейство конечных подмножеств Γ, тогда существует $C \subseteq \Gamma$, и несчетное подсемейство $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ такие, что если $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$ и $B_1 \neq B_2$, то $B_1 \cap B_2 = C$, а $|B_1| = |B_2|$.

Пусть $\Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ - Σ-произведение пространств с первой аксиомой счетности. $\mathcal{B}_\alpha = \{O_n(\xi_\alpha)\}$ - некоторая счетная база в точке ξ_α, замкнутая относительно конечных пересечений. $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$.

Пусть для всякого конечного упорядоченного набора $P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \Gamma$ и для всякого вектора $\bar{n} = (n_1, \dots, n_k)$ множество $\langle P, \bar{n} \rangle = (\bigcap_{\alpha_i \in P} \pi^{-1}_{\alpha_i}(O_{n_i}(\xi_{\alpha_i}))) \cap \Sigma$, где

$O_{n_i}(\xi_{\alpha_i}) \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ Пункты (а) и (в) будем доказывать одновременно. Если X финально компактно в Σ, то докажем, что для любого $\mathcal{B}$ топология $\tau_1 = \tau_1(\mathcal{B})$ -наследственно линделефова на X. Если же $X = \Sigma^*_{\mathcal{B}_0}$ -произведение пространств с первой аксиомой счетности, то докажем, что $\tau_1 = \tau_1(\mathcal{B}_0)$ - наследственно линделефово на X.

Пусть $\mathcal{U}$-семейство открытых в τ_1 множеств. Можно считать, что $\mathcal{U}$ состоит из базисных в τ_1 множеств вида $\langle P, \overline{m} \rangle$. Пусть $\mathcal{K}$ -счетное множество различных упорядоченных наборов целых чисел, тогда $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{U}(\overline{m}_0) : \overline{m}_0 \in \mathcal{K}\}$, где $\mathcal{U}(\overline{m}_0) = \{u \in \mathcal{U} : u = \langle P, \overline{m}_0 \rangle\}$. Достаточно доказать, что для всякого $\overline{m}_0 \in \mathcal{K}$ из семейства $\mathcal{U}(\overline{m}_0)$ можно выделить счетное с тем же телом на X.

Предположим противное, т.е. существует $\overline{m}_0 \in \mathcal{K}$ такое,что семейство $\mathcal{U}(\overline{m}_0)$ не содержит счетного подтела на X.

По индукции для всякого $\gamma < \omega_1$ выберем $x_\gamma \in (\mathcal{U}_\gamma \setminus \bigcup_{\gamma' < \gamma} \mathcal{U}_{\gamma'}) \cap X$, где каждое $\mathcal{U}_\gamma \in \mathcal{U}(\overline{m}_0)$. Пусть $\mathcal{U}_\gamma = \langle P_\gamma, \overline{m}_0 \rangle$. По лемме, существует несчетное подмножество $\Omega \subseteq \omega_1$ такое, что для всех $\gamma, \gamma' \in \Omega$ $P_\gamma \cap P_{\gamma'} = C$. Поскольку же Ω вновь несчетно, а различных комбинаций из координат вектора $\overline{m}_0$ конечно, то существует несчетное $\Omega' \subseteq \Omega$ такое, что для всех γ, $\gamma' \in \Omega'$ и для всякого $\alpha \in C$ существует $m(\alpha) \in \overline{m}_0$ такое, что

$$\pi_\alpha(\mathcal{U}_\gamma) = \pi_\alpha(\mathcal{U}_{\gamma'}) = \mathcal{O}_{m(\alpha)}(\xi_\alpha).$$

Упорядочим C как $\widetilde{C} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ и пусть $\overline{m}_1 = \{m(\alpha_1), \ldots, m(\alpha_k)\}$. Тогда для всех $\gamma \in \Omega'$ $\mathcal{U}_\gamma = \langle \overline{P}_\gamma, m_2(\gamma) \rangle \cap \langle \widetilde{C}, \overline{m}_1 \rangle$, где $\overline{P}_\gamma = P_\gamma \setminus C$. Рассмотрим теперь случай (a). Поскольку X финально-компактно, а множество $\{x_\gamma : \gamma \in \Omega'\}$ несчетно, то существует $\overline{y} \in X$ - точка полного накопления для множества $\{x_\gamma : \gamma \in \Omega'\}$. Множество координат $\overline{y}$, отличных от $\overline{\xi}$ не более чем счетно, а система $\{\overline{P}_\gamma : \gamma \in \Omega'\}$ состоит из непересекающихся множеств, поэтому существует $\gamma_0 \in \Omega'$ такое, что $\overline{y} \in \langle P_{\gamma_0}, m_2(\gamma_0) \rangle$.

Если $\gamma \in \Omega'$ и $\gamma > \gamma_0$, то по выбору $x_\gamma \notin \mathcal{U}_{\gamma_0} = \langle \overline{P}_{\gamma_0}, m_2(\gamma_0) \rangle \cap \langle \widetilde{C}, \overline{m}_1 \rangle$, но

$x_\gamma \in \mathcal{U}_\gamma = \langle \overline{P}_\gamma, m_2(\gamma)\rangle \cap \langle \widetilde{C}, \overline{m}_1 \rangle$, значит

$x_\gamma \notin \langle \overline{P}_{\gamma_0}, m_2(\gamma_0)\rangle$, таким образом

$\langle \overline{P}_{\gamma_0}, m_2(\gamma)\rangle \cap \{U\{x_\gamma : \gamma > \gamma_0\}\} = \emptyset$.

Это противоречит тому, что $\overline{y}$ точка полного накопленоя для $\{x_\gamma ;\ \gamma \in \Omega'\}$. Рассмотрим случай (в). Выберем счетное бесконечное $T \subseteq \Omega'$ и пусть $\gamma_0 > \sup T$. $x_{\gamma_0} \in (\mathcal{U}_{\gamma_0} \setminus U\{\mathcal{U}_\gamma : \gamma < \gamma_0\}) \cap X$.

Тогда $x_{\gamma_0} \in \langle \widetilde{C}, \overline{m}_1\rangle$, но $x_{\gamma_0} \notin U\{\mathcal{U}_\gamma :\ \gamma < \gamma_0\}$, следовательно

$x_{\gamma_0} \in \langle \overline{P}_\gamma, m_2(\gamma)\rangle$ для всех $\gamma \in T$. Поэтому для любого $\gamma \in T$ найдется $\alpha(\gamma) \in \overline{P}_\gamma$ и $m_\gamma \in m_2(\gamma)$ такие, что $x_{\gamma_0}(\alpha(\gamma)) \notin$

$\notin \sigma_{n(\gamma)}(\xi_{\alpha(\gamma)})$, а поскольку различных $n(\gamma)$ конечное число (т.к. $n(\gamma) \in \overline{m}_0$), то найдется бесконечное $T_1 \subseteq T$ такое, что $\forall \gamma \in T_1 \quad n(\gamma) = n_0$ и тогда $x_{\gamma_0}(\alpha(\gamma)) \notin \sigma_{n_0}(\xi_{\alpha(\gamma)})$ для любого $\gamma \in T_1$, но тогда $x_{\gamma_0} \notin X = \Sigma^*_{\mathcal{B}_0}$ - произведению.

Противоречие.

Замечание 4. На самом деле, в случае (в) не только $\tau_1(\mathcal{B}_0)$, но и любая другая $\tau_1(\mathcal{B})$ на $X = \Sigma^*_{\mathcal{B}_0}$-произведении также наследственно линделефова. Это будет следовать из Теоремы 5 данной работы, поскольку по этой теореме X будет финально-компактным подпространством Σ-произведения пространств с первой аксиомой счетности и все сведется к случаю (а). Однако воспользоваться Теоремой 5 можно только доказав наследственную линделефовость $\tau_1(\mathcal{B}_0)$.

Случай (с). Пусть $X = \Sigma^*(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$, где $nw(X_\alpha) \leq \aleph_0$. По определению, это означает, что $X = f(Y)$, где Y есть Σ^* - произведение пространств со счетной базой Y_α , т.е. $Y =$

$= \Sigma^*_{\mathcal{D}}(Y_\alpha, \eta_\alpha, \Gamma)$, причем $f = \prod_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha$, $f_\alpha = Y_\alpha \xrightarrow{\text{на}} X_\alpha$ -

уплотнение и $f_\alpha(\eta_\alpha) = \xi_\alpha$. В силу Следствия из Предложения 3 базис $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_\alpha\}$ можно считать полным.

Пусть $\mathcal{B}_\alpha = \{O(\xi_\alpha)\}$ – произвольный базис точки ξ_α в X_α, τ_1 -топология на X, предбазу которой образуют множества вида $\pi_\alpha^{-1}(O(\xi_\alpha)) \cap X$, где $O(\xi_\alpha) \in \mathcal{B}_\alpha$ и $\alpha \in \Gamma$. Докажем, что топология τ_1 наследственно линделефова.

Пусть V -произвольный элемент предбазы этой топологии, тогда $V = \pi_\alpha^{-1}(O(\xi_\alpha)) \cap X$.

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(O(\xi_\alpha)) \cap X) = \pi_\alpha^{-1}(f_\alpha^{-1}(O(\xi_\alpha))) \cap Y.$$

Но $f_\alpha^{-1}(O(\xi_\alpha))$ есть окрестность точки $\eta_\alpha = f^{-1}(\xi_\alpha)$ в Y_α, а поскольку $\mathcal{D}_\alpha$ - полный базис точки η_α, то $\pi_\alpha^{-1}(f_\alpha^{-1} O(\xi_\alpha)) \cap Y \in \tau_1(\mathcal{D})$. Отсюда следует, что f непрерывно отображает $(Y, \tau_1(\mathcal{D}))$ на (X, τ_1). Но поскольку $\tau_1(\mathcal{D})$ есть наследственно линделефова топология на Y (пункт (в) Теоремы 2), то τ_1 есть тоже наследственно линделефовая топология, как образ $\tau_1(\mathcal{D})$ при уплотнении f. Кроме того, $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$.

(d) Если $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, где каждое X_n есть Σ^*-произведение пространств с первой аксиомой счетности (или пространств со счетной сетью), то X само гомеоморфно Σ^*-произведению таких пространств в силу Предложения 1 (Предложения 2) и поэтому топология $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ в силу (в) (в силу (с)) данной теоремы.

Пункт (е) вытекает из рассуждений Корсона и Линденштрауса (Лемма 4.4) в работе [4].

Теорема 3. (а) если для каждого $\alpha \in \Gamma$ X_α обладает точечно-счетной базой, то топология τ_2 на $\Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ также обладает точечно-счетной базой;

(в) если для каждого $\alpha \in \Gamma$ X_α регулярно и обладает σ-точечно-конечной базой, то топология τ_2 на всяком

$\Sigma^*(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ также обладает σ-точечно-конечной базой;

(c) если для каждого $\alpha \in \Gamma$ $X_\alpha = R$, $\xi_\alpha = 0$, а для $p > 0$ $S_p = \{\bar{x} = (x_\alpha) \in \Sigma^*(X_\alpha, 0, \Gamma) = c_0(\Gamma) : \sum_{\alpha \in \Gamma} |x_\alpha|^p = 1\}$,

то топологии τ_2 на S_p обладает σ-локально-конечной базой;

(d) Пусть $X \subseteq c_0(\Gamma)$ и X строго равномерно в $c_0(\Gamma)$, т.е. для всякого $m > 0$ $\exists K(m)$ такое, что для всякого $\bar{x} \in X$ $|\{\alpha \in \Gamma : |x(\alpha)| > \frac{1}{m}\}| = K(m)$, тогда τ_2 на X обладает σ-локально-конечной базой.

<u>Доказательство.</u> (a) Пусть $\mathcal{B}_\alpha$ -точечно-счетная база $X_\alpha \setminus \{\xi_\alpha\}$. Тогда $\mathcal{B}' = \{\pi_\alpha^{-1}(u_\alpha) \cap \Sigma : u_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ - предбаза топологии τ_2. $\mathcal{B}$ состоит из всевозможных конечных пересечений элементов $\mathcal{B}'$. Тогда $\mathcal{B}$ - база τ_2. $\mathcal{B}$ точечно-счетна. Действительно, если $v \in \mathcal{B}$ и $v \ni \bar{x}$, то $v = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(u_{\alpha_i}) \cap$ $\cap \Sigma$. $\bar{x} \in v$, значит $x(\alpha_i) \in u_{\alpha_i}$ и поэтому $x(\alpha_i) \neq \xi_{\alpha_i}$, значит $\alpha_i \in \Gamma(\bar{x})$, где $\Gamma(\bar{x})$ -носитель $\bar{x}$, т.е. $\Gamma(\bar{x}) =$ $= \{\alpha \in \Gamma : x(\alpha) \neq \xi_\alpha\}$, но $\Gamma(\bar{x})$ счетно, поэтому набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \subseteq \Gamma(\bar{x})$, а поскольку различных таких наборов счетно, и каждое $\mathcal{B}_\alpha$ -точечно-счетно, то различных $v \in \mathcal{B}$ таких, что $v \ni \bar{x}$ также не более, чем счетно.

(в) Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, где $\mathcal{B}_\alpha = \{O_n(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ - счетная база ξ_α в X_α. Пусть $V_{\alpha n}$ - σ-точечно-конечная база $X_\alpha \setminus \overline{O_n(\xi_\alpha)_n}$; $V_{\alpha n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{\alpha n m}$ и $V_{\alpha n m}$ -точечно-конечно. Пусть $\mathcal{U}_{nmk} = \{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(u_{\alpha_i}) \cap \Sigma\}$, где $u_{\alpha_i} \in$ $\in \bigcup_{p \le m} \{V_{\alpha_i m p}, \ n \le k\}$. Тогда $\bigcup_{n,m,k} \mathcal{U}_{nmk}$, очевидно, база топологии τ_2.

Докажем, что каждое $\mathcal{U}_{nmk}$ точечно-конечно на $\Sigma^*_{\mathcal{B}}$-произведении. Заметим прежде, что если P_0 конечное подмножество

Γ, то система $\{\pi_{P_0}(u)$, где $u \in \mathcal{U}_{nmk}\}$ точечно-конечна на $\prod_{\alpha \in P_0} X_\alpha$ (если рассматривать только различные $\pi_{P_0}(u)$).

Предположим теперь, что существует точка $\bar{x} \in \Sigma^*_{\mathcal{B}}$ -произведению и бесконечное множество $w_1, \ldots, w_j, \ldots$ различных элементов $\mathcal{U}_{nmk}$, такие, что каждое $w_j \ni \bar{x}$. Тогда для всякого $j \in N$ $w_j = \langle P_j, \bar{u}_j \rangle$, где $P_j = \{\alpha_1(j), \ldots, \alpha_{n_j}(j)\}$, а $\bar{u}_j = \{u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{n_j}}\}$ и $\bigcap_{i=1}^{n_j} \pi^{-1}_{\alpha_i}(u_{\alpha_i}) \cap \Sigma = w_j$, $n_j \le k$, и $u_{\alpha_i} \in \bigcup \{V_{\alpha_i n p} : p \le m\}$.

Существует бесконечное $\mathcal{K} \subseteq N$, такое, что для всякого $j, j' \in \mathcal{K}$ $n_j = n_{j'} = n_0 \le k$.

Выделим из системы $\{P_j : j \in \mathcal{K}\}$ бесконечную подсистему $\{P_j : j \in \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}\}$ так, что для всякого $j \in \mathcal{K}_1$ $P_j = P_0 \cup P_j'$, причем $P_j' \cap P_{j'}' = \emptyset$, если $j \neq j'$ и $j, j' \in \mathcal{K}_1$. Для всякого $j \in \mathcal{K}_1$ $P_j' \neq \emptyset$, иначе $P_j = P_0$ и поэтому система $\{\pi_{P_0}(w_j) : j \in \mathcal{K}_1\}$ не являлась бы точечно-конечной (т.к. все w_j различны и зависят не только от координат множества P_0). Пусть теперь $\alpha_j \in P_j'$. Тогда $x(\alpha_j) \in u_{\alpha_j} \in \bigcup_{p \le m} V_{\alpha_j m p}$, и, поскольку, $u_{\alpha_j} \cap O_m(\xi_{\alpha_j}) = \emptyset$, то $x(\alpha_j) \notin O_m(\xi_{\alpha_j})$. Тогда $\{\alpha : x(\alpha) \notin O_m(\xi_\alpha)\} \supseteq \{\alpha_j : j \in \mathcal{K}_1\}$ и поэтому бесконечно, что противоречит тому, что $x \in \Sigma^*_{\mathcal{B}}$ - произведению.

(c) Пусть $n \in Q^+$ и $\mathcal{B}_n$ -счетная база в $R \setminus [-n^{1/p}, n^{1/p}]$. Пусть $\mathcal{D}_n$ -множество всевозможных конечных наборов элементов $\mathcal{B}_n$. Если $B_j = \{V_1, \ldots, V_n\} \in \mathcal{D}_n$, а $P \subseteq \Gamma$, $P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, и $|P| = |B_j|$, то $\langle P, B_j \rangle = \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{\alpha_i}(V_i) \cap S_p$. Пусть $\omega(n,j) = \{\langle P, B_j \rangle$, где $B_j \in \mathcal{D}_n$, $P \subseteq \Gamma$ и $|\Gamma| = |B_j|\}$. Тогда $\omega = \bigcup_{n,j} \omega(n,j)$ есть база топологии τ_2 на S_p. Докажем, что каждое $\omega(n,j)$ - локально-конечно (в топологии τ_2). Пусть $\bar{y} \in S_p$. Тогда $\sum_{\alpha \in \Gamma} |y(\alpha)|^p = 1$. Пусть

$P_0=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ и $\sum_{\alpha\in P_0}|y(\alpha)|^p>1-\varkappa$. Выберем окрестность v_{α_i} у каждой $y(\alpha_i)$ так, чтобы $\sum_{\alpha_i\in P_0}\inf\{|x|^p : x\in v_{\alpha_i}\}>1-\varkappa$.

Пусть $O(\bar y)=\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\},\{v_{\alpha_1},\dots,v_{\alpha_m}\}\rangle$ Тогда, если $O(\bar y)\cap v(P,B_j)\neq\emptyset$, то $P\subseteq P_0$. Действительно, иначе существует $\bar z\in O(\bar y)\cap v(P,B_j)$ и существует $\beta\in P\setminus P_0$ такое, что $\bar z(\beta)\in v_\beta\in\mathcal{B}_j$. Но $v_\beta\cap[-\varkappa^{1/p},\varkappa^{1/p}]=\emptyset$, поэтому $|z(\beta)|>$ $>\varkappa^{1/p}$ и $|\bar z(\beta)|^p>\varkappa$. И тогда $\bar z\in O(\bar y)\Rightarrow\sum_{\alpha_i\in P_0}|\bar z(\alpha_i)|^p>1-\varkappa$.

Значит $\sum_{\alpha\in\Gamma}|\bar z(\alpha)|^p\geq\sum_{\alpha\in P_0}|\bar z(\alpha)|^p+|\bar z(\beta)|^p>1-\varkappa+\varkappa=1$.

Итак, $\sum_{\alpha\in\Gamma}|\bar z(\alpha)|^p>1$, противоречие.

Таким образом, $P\subseteq P_0$, но P_0 конечно, поэтому конечно множество различных $P\subseteq P_0$, а B_j фиксировано, поэтому конечно и множество тех $\langle P,B_j\rangle$, для которых $\langle P,B_j\rangle\cap O(\bar y)\neq\emptyset$. Значит, $\omega(\varkappa,j)$ локально-конечно на S_p.

Доказательство (d) представляет собой лишь небольшую модификацию (c) и поэтому здесь опускается.

Из доказанных теорем получаются важные следствия.

<u>Следствие 1</u>. Всякий бикомпакт, лежащий в Σ-произведении пространств со счетной сетью, является наследственно-металинделефовым (кратко НМ) пространством.

<u>Следствие 2</u>. Всякое финально-компактное подпространство Σ-произведения пространств с точечно-счетной базой есть НМ-пространство.

<u>Вопрос 1</u>. Пусть X финально-компактное подпространство в Σ-произведении пространств со счетной сетью. Будет ли X НМ-пространством?

<u>Следствие 3</u>. Всякое Σ^*-произведение пространств с σ-точечно-конечной (точечно-счетной) базой есть наследственно

σ-метакомпактное (кратко НбМ-пространство (есть НМ-пространстве)). В частности, $c_0(\Gamma)$ и все эберлейновские бикомпакты являются НσМ.

<u>Следствие 4</u>. Если $p > 0$, то подпространство S_p наследственно паракомпактно (НР) в $c_0(\Gamma)$.

<u>Следствие 5</u>. Если X строго равномерно расположено в $c_0(\Gamma)$, то X есть НР-пространство.

<u>Замечание 5</u>. Можно доказать, что S_p в следствии 4 и X в следствии 5 просто метризуемы. Продемонстрируем это на примере строго равномерного множества X.

Пусть τ -топология тихоновского произведения на $c_0(\Gamma)$. Пусть T -метрическая топология на $c_0(\Gamma)$ (где $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sup\limits_{\alpha \in \Gamma} |x(\alpha) - y(\alpha)|$). Ясно, что $\tau \subseteq T$. Докажем, что $T \subseteq \tau$ на подпространстве X. Пусть $\bar{x}_0 \in X$ и $O_\varepsilon(\bar{x}_0)$ - ε-окрестность точки $\bar{x}_0$ в T. $V_\varepsilon = O_\varepsilon \cap X$. Пусть m - первое натуральное число, такое, что $\frac{2}{m} \leq \varepsilon$. $V_{\frac{2}{m}}(\bar{x}_0) \subseteq V_\varepsilon(\bar{x}_0)$.

Пусть $K(m) = |\{\alpha \in \Gamma : |\bar{x}_0(\alpha)| > \frac{1}{m}\}|$ и $\Gamma_m(\bar{x}_0) = \{\alpha \in \Gamma : |\bar{x}_0(\alpha)| > \frac{1}{m}\}$. Пусть $\forall \alpha \in \Gamma_m(\bar{x}_0)$ V_α -окрестность $\bar{x}_0(\alpha)$ такая, что $\inf |V_\alpha| > \frac{1}{m}$ и $V_\alpha \subseteq O_\varepsilon(\bar{x}_0(\alpha))$.

Тогда $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma_m(\bar{x}_0)} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)\right) \cap X \subseteq V_{2/m}(\bar{x}_0)$. Действительно, если $\bar{y} \in X$ и $\bar{y} \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma_m(\bar{x}_0)} \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, то $\bar{y}(\alpha) \in V_\alpha$ и, значит, $|\bar{y}(\alpha)| > \frac{1}{m}$, но тогда для всех $\alpha \notin \Gamma_m(\bar{x}_0)$ $|\bar{y}(\alpha)| \leq \frac{1}{m}$ (т.к. $|\{\alpha \in \Gamma : |\bar{y}(\alpha)| > \frac{1}{m}\}| = K(m)$).Это же верно и для $\bar{x}_0$, т.е. для всех $\alpha \notin \Gamma_m(\bar{x}_0)$ $|\bar{x}_0(\alpha)| \leq \frac{1}{m}$. Отсюда, для этих α $|\bar{x}_0(\alpha) - \bar{y}(\alpha)| \leq \frac{2}{m} < \varepsilon$. Если же $\alpha \in \Gamma_m(\bar{x}_0)$, то $\bar{y}(\alpha) \in V_\alpha \subseteq O_\varepsilon(\bar{x}_0(\alpha))$ и поэтому также $|\bar{x}_0(\alpha) - \bar{y}(\alpha)| < \varepsilon$, значит, $\bar{y} \in O_\varepsilon(\bar{x}_0)$. Отсюда и $T \subseteq \tau$ а, значит, $T = \tau$ на X.

Предложение 5. Пусть $X \subseteq \Sigma$ -произведении топологических пространств с первой аксиомой счетности и X бикомпакт. Тогда точка $x_0 \in X$ есть точка с первой аксиомой счетности тогда и только тогда, когда найдется счетное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ такое, что $\pi_{\Gamma_0}^{-1} \pi_{\Gamma_0}(x_0) \cap X = x_0$.

Доказательство. Если $\{V_n\}$ счетная база точки x_0, то можно считать ее состоящей из элементов базы, т.е. $V_n = \langle P_n, V_n^r \rangle \cap \cap X$, тогда $\Gamma_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ - искомое. Обратное очевидно.

Следствие 6. Пусть $p > 0$ и $B_p = \{\bar{x} \in C_0(\Gamma) : \sum_{\alpha \in \Gamma} |x(\alpha)|^p \leq 1$, тогда множество точек с первой аксиомой счетности B_p совпадает с S_p и метризуемо.

Замечание 6. Поскольку для $p > 1$ B_p бикомпакт и в слабой топологии банахова пространства, то топология B_p совпадает со слабой топологией, значит, B_p -эберлейновский бикомпакт.

Пусть X эберлейновский бикомпакт из Теоремы 4 в работе [7]. Тогда из предложения 5 следует, что точка $x_0 \in X$ есть точка с первой аксиомой счетности, если и только если для всякого n $\Gamma(x_0) \cap \Gamma_n \neq \emptyset$, но такое множество строго равномерно расположению в $c_0(\Gamma)$ $(K(n) = n)$ и поэтому

Следствие 7. Множество G_δ -точек бикомпакта X метризуемо.

В связи с Замечанием 5 правомерен

Вопрос 2: пусть $X \subseteq c_0(\Gamma)$ и τ_2 на X обладает σ-локально-конечной базой. Следует ли тогда, что X метризуемо?

Теорема 4. Пусть для всякого $\alpha \in \Gamma$, $nw(X_\alpha) \leq \aleph_0$, $X \subseteq \Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$, $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ и τ_1 наследственно линделефово на X, тогда X наследственно металинделефово.

Доказательство. Пусть для всякого $\alpha \in \Gamma$ S_α -счетная сеть $X_\alpha \setminus \{\xi_\alpha\}$. Если $S' = \{\pi_\alpha^{-1}(s)$, где $s \in S_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$, то S - состоящая из всевозможных конечных пересечений элементов S' - есть точечно-счетная сеть для топологии τ_2 .

Пусть $\mathcal{U}$ - семейство открытых множеств в $\Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$, покрывающее X . Для доказательства достаточно считать, что каждый элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид $u = v \cap w$, где $v \in \tau_1$ $w \in \tau_2$ и $u \cap X \neq \emptyset$. Пусть $\tilde{S} = \{s \in S$ таких, что найдется $u \in \mathcal{U} : u = v \cap w$ и $s \subseteq w\}$. Для всякого $s \in \tilde{S}$, пусть $V_s' = \{v \in \tau_1 : v \cap s \neq \emptyset$ и существует $w \in \tau_2$ такой, что $v \cap s \subseteq v \cap w = u \in \mathcal{U}\}$. Поскольку τ_1 - HL , то существует счетное подсемейство $\tilde{V}_s \subseteq V_s$ с тем же телом.

Тогда $\mathcal{P} = \{\{v \cap s : v \in \tilde{V}_s\} : s \in \tilde{S}\}$ есть семейство, вписанное в $\mathcal{U}$ с тем же телом. Докажем это. Пусть $y \in \cup\mathcal{U}$, тогда найдутся $u \in \mathcal{U} : u = v \cap w$ и $y \in u$, поэтому $y \in v \cap w$. Поскольку S сеть для τ_2 , то найдется $s \in S : y \in s \subseteq w$, отсюда $s \in \tilde{S}$, $v \cap s \neq \emptyset$ и $v \cap s \subseteq v \cap w$, значит, $v \in V_s$, поэтому найдется $v' \in \tilde{V}_s$ такое, что $y \in v'$ а тогда $y \in v' \cap \cap s$, где $v' \in \tilde{V}_s$, $s \in \tilde{S}$, но тогда $v' \cap s \in \mathcal{P}$. Отсюда $\cup\mathcal{P} = \cup\mathcal{U}$ и $\mathcal{P}$, очевидно, вписано в $\mathcal{U}$.

Семейство $\mathcal{P}$ точечно счетно. Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1 и здесь опускается.

Пусть теперь $\beta = v \cap s \in \mathcal{P}$. Тогда существует $u_\beta \in \mathcal{U} : : v \cap s \subseteq u_\beta$. Кроме того, s зависит от конечного числа координат. Пусть $w(s)$ открытое в τ_2 множество, зависящее от тех же координат и $s \subseteq w(s)$, а $v \cap w(s) \subseteq u_\beta$. (Если $\pi_\alpha(s) \not\ni \xi_\alpha$, то $\pi_\alpha(w(s)) \not\ni \xi_\alpha$.) Обозначим $v \cap w(s) = w(\beta)$.Тогда семейство $\mathcal{W} = \{w(\beta) : \beta \in \mathcal{P}\}$ есть семейство открытых множеств, вписанное в $\mathcal{U}$ и $\cup\mathcal{W} = \cup\mathcal{U}$. Осталось доказать, что семейство $\mathcal{W}$ -точечно-счетно. Пусть $\bar{x} \in \cup\mathcal{W}$ и $w(\bar{x}) = \{w(\beta) : w(\beta) \ni \bar{x}\}$, тогда $w(\beta) = v \cap w(s)$. Множество S_0 тех различных s, для которых $v \cap w(s) \ni \bar{x}$ есть множество счетное, действительно, в противном случае существует несчетное множество $\Omega \subseteq S_0$ такое, что для всякого $s \in \Omega$ $w(s) \ni \bar{x}$. Пусть $\Gamma_s \subseteq \Gamma$ есть конечное множество координат, от которых зависит s (а, значит, и $w(s)$). Тогда для всякого $\alpha \in \Gamma_s$ $\bar{x}(\alpha) \in \sigma_\alpha(w(s))$ и поэтому $\bar{x}(\alpha) \neq \xi_\alpha$, значит, $\Gamma_s \subseteq \Gamma(\bar{x}) = \{\alpha : x(\alpha) \neq \xi_\alpha\}$. Но $\Gamma(\bar{x})$ счетно. Поэтому счетно и множество различных Γ_s. Отсюда существует несчетное $\Omega_0 \subseteq \Omega$ такое, что для всех $s, s' \in \Omega_0$ $\Gamma_s = \Gamma_{s'} = \Gamma_0$. Однако, множество различных $s \in S$, чьи координаты зависят лишь от Γ_0 не более, чем счетно. Противоречие.

Заметим, что для каждого $s_0 \in \tilde{S}$ существует лишь счетное число различных $\beta = v \cap s$, таких, что $\beta = v \cap s_0 \in \mathcal{P}$. Поэтому множество $B = \{v \cap w(s) ; s \in \tilde{S}_0\}$ не более чем счетно.

<u>Следствие 1</u>. Если X есть Σ^*-произведение пространств со счетной сетью или счетное произведение таких пространств, то X есть НМ-пространство.

<u>Следствие 2</u>. Если X со счетной сетью, $Z \subseteq C_0(\Gamma, C_p(X))$ $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$, причем τ_1 наследственно линделефова на Z, то Z есть НМ-пространство.

Действительно, если X со счетной сетью, то $C_p(X)$ также со счетной сетью и $C_0(\Gamma, C_p(X)) \hookrightarrow \Sigma(X_\alpha, \bar{0}, \Gamma)$, где $X_\alpha = C_p(X)$ для всех $\alpha \in \Gamma$.

<u>Следствие 3</u>. Если X -полное сепарабельное метрическое пространство, то $C_0(\Gamma, C_p(X))$ есть НМ-пространство.

<u>Следствие 4</u>. Если X -полное сепарабельное метрическое пространство, $Y \subseteq c_0(\Gamma)$, то $C_p(X, Y)$ есть НМ-пространство (например, если Y - эберлейновский бикомпакт, или метрическое

пространство).

Это следует из того, что $C_p(X,Y) \subseteq C_0(\Gamma, C_p(X))$ и Следствия 3.

<u>Вопрос 3</u>. Пусть X сепарабельное метрическое, Y -эберлейновский бикомпакт. Верно ли, что $C_p(X,Y)$ финально-компактно и НМ?

<u>Вопрос 4</u>. Пусть X со счетной сетью, $Y \subseteq c_0(\Gamma)$. Верно ли, что $C_p(X,Y)$ финально-компактно и НМ?

Известно, что всякое σ-произведение пространств со счетной базой линделефово. Здесь мы даем положительный ответ на вопрос М.Г. Ткаченко: верно ли, что счетное произведение σ-произведений пространств со счетной сетью линделефово?

Следуя [2] и [4] подмножество $Z \subseteq \Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ будем называть почти счетно инвариантным, если существует такое семейство $\gamma = \{\Gamma_0\}$ счетных подмножеств Γ, что

(1) если $\Gamma_0 \in \gamma$ и $x \in Z$, то $x/_{\Gamma_0} \in Z$.

(2) если $B \subseteq \Gamma$ и $|B| \leq \aleph_0$, то найдется $\Gamma_0 \in \gamma$, такое что $\Gamma_0 \supseteq B$,

(3) если $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ и $\Gamma_i \in \gamma$ для всякого $i \in N$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i \in \gamma$. Очевидно, что всякое счетно инвариантное подмножество $Z \subseteq \Sigma(X_\alpha, \xi_\alpha, \Gamma)$ является также и почти счетно-инвариантным. Таковыми, в частности, будут все σ-произведения, а для пространств со счетной сетью и все Σ^*-произведения, а также и их счетные произведения.

<u>Теорема 5</u>. Если для всякого $\alpha \in \Gamma$ $nw(X_\alpha) \leq \aleph_0$, $X \subseteq \Sigma(X_\alpha\ \xi_\alpha\ \Gamma)$ и почти счетно инвариантно в Σ, $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ и топология τ_1 наследственно линделефова на X, то X линделефово.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ -покрытие X . Для доказательства достаточно считать, что каждый элемент $u \in \mathcal{U}$ имеет вид $u = v \cap w$, где $v \in \tau_1$, $w \in \tau_2$,причем каждое v зависит от конечного числа координат. Также как в доказательстве Теоремы 4 впишем в $\mathcal{U}$ покрытие $\mathcal{P} = \{v \cap s : v \in \widetilde{\mathcal{V}}_s,\ s \in \widetilde{S}\}$. Достаточно доказать, что из покрытия $\mathcal{P}$ множества X можно выделить счетное.

Пусть $v \cap s$ произвольный элемент семейства $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{P}_0 = \{v \cap s\}$. Пусть Γ_s^0 -конечное множество координат, от которых зависит s . Γ_v^0 - конечное множество координат, от которых зависит v . X -почти счетно инвариантно, значит, существует $\Gamma_0 \in \gamma$, такие, что $\Gamma_0 \supseteq \Gamma_v \cup \Gamma_s$. Пусть $\widetilde{S}_0 = \{s \in \widetilde{S} : \Gamma_s \subseteq \Gamma_0\}$, множество $\widetilde{S}_0$ счетно. Тогда счетно и множество $\widetilde{\mathcal{V}}_0 = \{v : v \cap s \in \mathcal{P}$ и $s \in \widetilde{S}_0\}$, а вместе с ним и множество $\Gamma_v^1 = \cup\{\Gamma_v : v \in \widetilde{\mathcal{V}}_0\}$. Теперь мы вновь можем построить множество $\Gamma_1 \in \gamma$ такое, что $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_v^1 \cup \Gamma^0$. Пусть $\mathcal{P}_1 = \{v \cap s \in \mathcal{P}\}$, где $v \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$, $s \in \widetilde{S}_0\}$. $\mathcal{P}_1$ - счетно.

Аналогично, по индукции можно построить $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ подмножеств γ и последовательность $\{\mathcal{P}_i\}$ -счетных подмножеств $\mathcal{P}$, таких, что

1. для всякого $i \in N$ $\Gamma_i \in \gamma$,
2. $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ для всякого $i \in N$,
3. $\Gamma_i \supseteq \cup\{\Gamma_v :$ для тех v , что существует s: $v \cap s \in \cup\{\mathcal{P}_j : j < i\}$ для всех $i \geq 1\}$.
4. $\mathcal{P}_i = \{v \cap s \in \mathcal{P}$ таких, что $\Gamma_s \subseteq \Gamma_i\}$.

Пусть теперь $\Gamma_\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$. По условию X почти счетно инвариантно, поэтому $\Gamma_\omega \in \gamma$.

Докажем теперь, что $\mathcal{P}_\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i$ есть (очевидно счетное) покрытие X . Пусть $\bar{x} \in X$. Тогда $\bar{y} = \bar{x}/_{\Gamma_\omega} \in X$. Поэтому существует $v_0 \cap s_0 \in \mathcal{P}$, такое, что $v_0 \cap s_0 \ni \bar{y}$. Поскольку же $\Gamma(\bar{y}) = \{\alpha \in \Gamma : y(\alpha) \neq \xi_\alpha\} \subseteq \Gamma_\omega$, то $\Gamma_{s_0} \subseteq \Gamma_\omega$, а т.к. Γ_s конечно, то найдется номер i_0 такой, что $\Gamma_{i_0} \supseteq \Gamma_{s_0}$, но тогда по 4. $v_0 \cap s_0 \in \mathcal{P}_{i_0}$ и, значит, $\Gamma_{v_0} \subseteq \Gamma_{i_0+1}$ (по пункту 3.). Значит $\Gamma_{v_0} \cup \Gamma_{s_0} \subseteq \Gamma_\omega$, но на Γ_ω координаты точек $\bar{x}$ и $\bar{y}$ совпадают, и поэтому, раз $\bar{y} \in v_0 \cap s_0$, то и $\bar{x} \in v_0 \cap s_0$. Отсюда $\mathcal{P}$ -счетное покрытие X.

Замечание. В доказательстве Теоремы 5 используются идеи, принадлежащие Корсону и Линденштраусу (см. [4]).

Следствие 1. Следующие пространства линделефовы:

(а) σ-произведение пространств со счетной сетью,

(в) Σ^*-произведения пространств со счетной сетью,

(с) счетные произведения пространств из пунктов (а) и (в).

(а) и (в) вытекают из Теоремы 2 (с) и Теоремы 5. Счетное произведение Σ^*-произведений пространств со счетной сетью вновь гомеоморфно такому Σ^*-произведению (Предложение 2), а счетное произведение $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ σ-произведений содержится в некотором таком Σ^*-произведении, поэтому τ_1 будет наследственно-линделефово на X и ясно, что X счетно-инвариантно расположено.

В Теореме 2 доказано, что если X финально-компактное подпространство Σ-произведения пространств со счетной базой, и $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$, то топология τ_1 наследственно линделефова на X. Отсюда получаем

Следствие 2. Почти счетно-инвариантное подпространство X финально-компактно в Σ-произведении пространств со счетной базой тогда и только тогда, когда существует такое разложение $\tau(X) = \tau_1 \otimes \tau_2$, что топология τ_1 наследственно линделефова.

Вопрос 5. Верно ли, что X финально-компактно в Σ-произведении пространств со счетной базой (сетью), если и только если X почти счетно-инвариантно и всякое $\tau_1(X)$ наследственно линделефово?

Известно, что если X почти счетно-инвариантное подпространство Σ-произведения пространств со счетной базой, то $C_p(X)$ финально-компактно.

<u>Вопрос 6</u>. Пусть X финально-компактное подпространство Σ-произведения пространств со счетной базой. Верно ли, что $C_p(X)$ финально-компактно?

<u>Вопрос 7</u>. Пусть для всякого $n \in N$ X_n финально-компактное подпространство некоторого Σ-произведения пространств со счетной базой.

Верно ли, что $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ также финально-компактно?

Литература

[1] ГУЛЬКО С.П.: О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях, ДАН СССР 237(1977),503-508.

[2] ГУЛЬКО С.П.: О свойствах функциональных пространств, Семинар по общей топологии, МГУ, 1981, 8-41.

[3] AMIR D., LINDENSTRAUSS J.: The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Ann. Math. 88(1068), 35-46.

[4] CORSON H.H., LINDENSTRAUSS J.: On function spaces which are Lindelöf spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 476-491.

[5] АРХАНГЕЛЬСКИЙ А.В.: Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты, УМН 33, 6(1978), 29-84.

[6] JUHÁSZ I.: Cardinal functions in Topology, Math. Centre 34, Amsterdam 1971.

[7] YAKOVLEV N.N.: On bicompacta in Σ-products and related spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae 21(1980), 263-283.

Уральский университет имени А.М. Горького,
Свердловск,
СССР

(Oblatum 1.11. 1983)