Antonín Kučera

Об алгорифмической неапроксимируемости точных верхних границ конструктивных псевдосечений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18 (1977), No. 3, 445--453

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105790

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,3 (1977)

ОБ АЛГОРИФМИЧЕСКОЙ НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТИ ТОЧНЫХ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ КОНСТРУКТИВНЫХ ПСЕВДОСЕЧЕНИЙ

А. КУЧЕРА (A.KUČERA), Прага

Содержание: В настоящей заметке рассматриваются некоторые свойства псевдосечений (по существу нижних дедекиндовых сечений), связанные с вопросами алгорифмической аппроксимируемости их точных верхних границ. Приведено необходимое и достаточное условие существования алгорифма, оценивающего снизу расстояние псевдосечения от любого рекурсивно перечислимого множества рациональных чисел в его дополнении.

Ключевые слова: Частично рекурсивная функция, рекурсивно перечислимое множество, псевдосечение, субкреативность, алгорифм нижней оценки расстояния, эффективная неаппроксимируемость.

AMS: 02E99, 02F25 Ref. Ž.: 2.644.2

Э. Шпекер построил возрастающую ограниченную алгорифмическую последовательность рациональных чисел (РЧ), не сходящуюся ни к какому конструктивному действительному числу (КДЧ). И.Д. Заславский усилил этот результат, построив возрастающую ограниченную алгорифмическую последовательность РЧ, для которой существует алгорифм, который по всякому КДЧ являющемуся верхней границей этой последовательности выдает меньшее КДЧ, также являющееся верхней границей этой последовательности. Вопрос о верхних границах алгорифмических последовательностей КДЧ равносильно сведен Цейтиным в [5] к вопросу о верхних границах псевдосечений, и показано, что необходимым и достаточным условием существования понижающего алгорифма для собственного псевдосечения является его сильная неразрешимость. Заметим, что псевдосечение - это по существу нижнее дедекиндово сечение, и понижающий алгорифм для псевдосечения M - алгорифм перерабатывающий всякое КДЧ, являющееся верхней границей M, в меньшее КДЧ, также являющееся верхней границей M.

В настоящей статье рассматриваются условия, при которых для собственного псевдосечения возможно алгорифмически понижать не только любое КДЧ, являющееся его верхней границей, но даже алгорифмически оценивать снизу расстояние между псевдосечением и любым рекурсивно перечислимым (р.п.) множеством РЧ в его дополнении.

В дальнейшем мы пользуемся основными определениями и обозначениями из [1],[2],[3]. Все формулы и утверждения мы понимаем в соответствии с правилами конструктивного понимания математических суждений.

В статье используется аппарат частично рекурсивных функций (ЧРФ). В то же время в статье используются без дополнительных пояснений некоторые понятия и результаты, введенные и доказанные при помощи других аппаратов, равнообъемность которых аппарату ЧРФ общеизвестна (например аппарат нормальных алгорифмов, V-перечислимых множеств).

Множество всех натуральных чисел (НЧ) мы будем обозначать посредством N, множество всех РЧ - Q. Буквы i, j, k, l, m, n, p, q служат переменными для НЧ, буквы a, b, c, x, y переменными для РЧ. Мы будем пользоваться некоторой стандартной нумерацией всех ЧРФ одной переменной φ_k (порождаемой надлежащей ЧРФ двух переменных) и соответствующей ей нумерацией всех р.п. множеств НЧ W_k. Через D_k мы будем обозначать конечное множество, каноническим индексом которого является k ([3]).

Мы алгорифмически перенумеруем все РЧ, причем каждому РЧ a будет соответствовать НЧ $[a]^N$, и каждому НЧ n - РЧ $[n]^Q$. Таким образом, имеется естественное соответствие множеств РЧ и множеств НЧ. Ввиду этого мы будем без дальнейших пояснений пользоваться некоторыми понятиями, которые обычно относятся к множествам НЧ, но при помощи введенной нумерации без труда переносятся на множества РЧ. Для любого множества НЧ A мы будем обозначать посредством $[A]^Q$ множество РЧ $\{a \mid [a]^N \in A\}$, т.е. $\{a \mid \exists n (n \in A \,\&\, [n]^Q = a)\}$.

Сначала мы заново сформулируем понятие субкреативного множества из [6].

<u>Определение</u>. Р.п. множество НЧ A мы назовем субкреативным, если существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$\forall k (W_k \cap D_{f(k)} \neq (N - A) \cap D_{f(k)}) .$$

<u>Замечание 1</u>. Легко доказать, что р.п. множество НЧ A субкреативно тогда и только тогда, когда существует ЧРФ φ такая, что

$$\forall k (W_k \cap A = \emptyset \supset !\, \varphi(k) \,\&\, D_{\varphi(k)} \nsubseteq A \cup W_k) .$$

<u>Замечание 2</u>. Согласно результатам М.И. Кановича ([6], [7]), всякое субкреативное множество является сильно неразрешимым ([5]), но с другой стороны существуют сильно неразрешимые множества, не являющиеся субкреативными. Существование субкреативных множеств очевидно (примером служат креативные множества).

Мы будем рассматривать понятие субкреативности в связи с псевдосечениями. Мы сформулируем заново понятие псевдосечения из [5].

Определение. 1) Р.п. множество РЧ A мы назовем псевдосечением, если $A = \{x \mid \exists y (y \in A \ \& \ x < y)\}$.

2) Псевдосечение A мы назовем собственным, если существуют РЧ a, b такие, что $a \in A \ \& \ b \notin A$.

Замечание 3. Если не ограничиться рамками КДЧ, и ввести в рассмотрение тоже псевдочисла ([2]), то по всякому собственному псевдосечению легко построить псевдочисло, являющееся его "точной верхней границей".

Приведем для субкреативных псевдосечений характеристику, которая сильнее существования понижающего алгорифма.

Определение. 1) Пусть M - собственное псевдосечение, ψ - ЧРФ. Мы обозначим $Ap(\psi, M)$, если

а) $\forall m n (!\psi(n) \ \& \ m \leq n \supset !\psi(m))$,

б) $\forall n (!\psi(n) \supset ([\psi(n)]^{Q} + 2^{-n} \notin M) \ \& \ ([\psi(n)]^{Q} - 2^{-n} \in M))$.

2) Собственное псевдосечение M мы назовем эффективно неаппроксимируемым, если существует ЧРФ η такая, что

(1) $\forall k (Ap(\varphi_k, M) \supset !\eta(k) \ \& \ \neg ! \varphi_k(\eta(k)))$.

Обозначение. Посредством cgb мы обозначим ОРФ двух переменных такую, что для любых НЧ p, q

$$[W_{cgb(p,q)}]^{Q} = \{a \mid \exists k (k \in W_p \ \& \ a \geq [k]^{Q} - [q]^{Q})\}.$$

Таким образом, р.п. множество РЧ $[W_{cgb(p,q)}]^{Q}$ - "сдвиг" р.п. множества РЧ $[W_p]^{Q}$ на число $[q]^{Q}$

Определение. ЧРФ ω мы назовем алгорифмом нижней оценки расстояния для собственного псевдосечения M, если

$$\forall k([W_k]^Q \cap M = \emptyset \supset !\omega(k) \& [\omega(k)]^Q > 0 \& \\ \& [W_{cg\ell(k,\omega(k))}]^Q \cap M = \emptyset).$$

Теорема 1. Для любого собственного псевдосечения M следующие условия попарно эквивалентны:

1) псевдосечение M субкреативно,

2) псевдосечение M обладает алгорифмом нижней оценки расстояния,

3) псевдосечение M эффективно неаппроксимируемо.

Доказательство. Пусть M – собственное псевдосечение.
1) Мы допустим, что M – субкреативно. Тогда можно построить ОРФ $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ такие, что для всякого НЧ k, если $[W_k]^Q \cap M = \emptyset$, то $[D_{\varkappa_1(k)}]^Q \notin M \cup B_k$, и

$$[D_{\varkappa_2(k)}]^Q \notin M \cup B_k \cup \{a \mid \exists x(x \leq a \& x \in [D_{\varkappa_1(k)}]^Q \& \\ \& \forall y(y \in [D_{\varkappa_1(k)}]^Q \& x < y \supset y \in B_k))\},$$

где $B_k \leftrightharpoons \{a \mid \exists \ell(\ell \in [W_k]^Q \& a \geq \ell)\}$, и, следовательно,

$$\neg\neg \exists a \ell (a \in [D_{\varkappa_1(k)}]^Q \& \ell \in [D_{\varkappa_2(k)}]^Q \& a > \ell \& \\ \& \forall y(\ell \leq y \leq a \supset y \notin M \cup B_k)).$$

Мы построим ОРФ ω такую, что

а) $[\omega(k)]^Q$ равно наименьшему положительному РЧ, содержащемуся в множестве $\{|x-y| \mid y \in [D_{\varkappa_2(k)}]^Q \& x \in [D_{\varkappa_1(k)}]^Q\}$, если такое число существует,

б) $[\omega(k)]^Q = 0$, в противном случае.

Ввиду сказанного видно, что ОРФ ω – алгорифм нижней оценки расстояния для M.

2) Пусть ω – алгорифм нижней оценки расстояния для M. Мы построим ОРФ g такую, что для всякого НЧ k

$$[W_{g(k)}]^Q = \{a \mid \exists m(!\varphi_k(m) \& [\varphi_k(m)]^Q + 2^{-m} \leq a)\}.$$

Тогда выполненс $\forall k(Ap(\varphi_k, M) \supset [W_{g(k)}]^Q \cap M = \emptyset)$.

Далее, легко доказать, что

$$\forall knq(!\varphi_k(n+1) \& Ap(\varphi_k, M) \& [q]^Q = 2^{-n} \supset$$
$$\supset [W_{cgl(g(k),q)}]^Q \cap M \neq \emptyset).$$

Мы построим ЧРФ η такую, что

$$\forall k([\eta(k)]^Q \simeq 1 + \mu_n(2^{-n} \leq [\omega(g(k))]^Q)).$$

Тогда, очевидно η - ЧРФ, требуемая в определении эффективной неаппроксимируемости для M.

3) Пусть η - ЧРФ, для которой (1). Зафиксируем РЧ a, b такие, что $a \in M \& b \notin M$. Построим ОРФ h такую, что для любых НЧ k, n $!\varphi_{h(k)}(n) \equiv \exists y(y \in [W_k]^Q \& y - 2^{-n+1} \in M)$, $!\varphi_{h(k)}(n) \supset ([\varphi_{h(k)}(n)]^Q - 2^{-n} \in M) \& \exists y(y \in [W_k]^Q \& y \leq [\varphi_{h(k)}(n)]^Q + 2^{-n})$.

Тогда выполнено $\forall k([W_k]^Q \cap M = \emptyset \supset Ap(\varphi_{h(k)}, M))$.

Нетрудно доказать, что

$$\forall knq([W_{cgl(k,q)}]^Q \cap M \neq \emptyset \& [q]^Q = 2^{-n} \supset !\varphi_{h(k)}(n+1)).$$

Мы построим ЧРФ α такую, что для любого НЧ k

$!\alpha(k) \equiv !\eta(h(k))$, и если $!\alpha(k)$, то $[D_{\alpha(k)}]^Q$ содержит именно приведенные РЧ $a + j \cdot 2^{-i}$ $(j = 0, \dots, j_0)$, где $i \leftrightharpoons \eta(h(k))$, $j_0 \leftrightharpoons \mu_n(b - a < n \cdot 2^{-i})$.

Тогда выполнено

$$\forall k([W_k]^Q \cap M = \emptyset \supset !\alpha(k) \& [D_{\alpha(k)}]^Q \notin M \cup [W_k]^Q),$$

и, следовательно, псевдосечение M субкреативно.

Теорема доказана.

В [5] показано, что существуют два собственных сильно неразрешимых псевдосечения, сумма которых не является сильно неразрешимой. С другой стороны, на основании предыдущей теоремы, можно доказать следующее утверждение.

Следствие. Сумма субкреативного псевдосечения и любого собственного псевдосечения является субкреативным псевдосечением.

В работе [5] рассматривается вычислимый оператор, позволяющий перевести всякое р.п. множество НЧ A в псевдосечение

$$\mathcal{Y}(A) = \{a \mid \exists k\, (D_k \subseteq A \;\&\; a < \sum_{\ell \in D_k} 2^{-\ell})\} .$$

В [5] показано, что для любого р.п. множества НЧ A псевдосечение $\mathcal{Y}(A)$ сильно неразрешимо в том и только том случае, если множество A сильно неразрешимо. Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для свойства субкреативности.

Теорема 2. Для любого р.п. множества НЧ A множество $\mathcal{Y}(A)$ субкреативно в том и только том случае, если множество A субкреативно.

Доказательство. 1) Пусть A - субкреативное множество НЧ. Мы построим ОРФ g такую, что для всякого НЧ k

$$W_{g(k)} = \{m \mid \exists m\, (D_m \subseteq A \;\&\; m \notin D_m \;\&\; \exists a\, (a \in [W_k]^Q \;\&\; a < 2^{-m} + \sum_{\ell \in D_n} 2^{-\ell}))\} .$$

Легко видеть (см. лемму 4 §4 из [5]), что

$$\forall k ([W_k]^Q \cap \mathcal{Y}(A) = \emptyset \supset W_{g(k)} \cap A = \emptyset) .$$

Нетрудно проверить, что

$$\forall k n q ([W_{cgb(k,q)}]^Q \cap \mathcal{Y}(A) \neq \emptyset \;\&\; [q]^Q = 2^{-n} \supset \{0, \dots, m\} \subseteq \subseteq A \cup W_{g(k)}) .$$

Ввиду сказанного и субкреативности A ясно, что псевдосечение $\mathcal{Y}(A)$ обладает алгорифмом нижней оценки расстояния и, ввиду теоремы 1, является субкреативным.

2) Пусть для р.п. множества НЧ A псевдосечение $\mathcal{Y}(A)$ суб-

креативно. Мы построим ОРФ h такую, что для всякого НЧ k

$$[W_{h(k)}]^Q = \{a \mid \exists m(D_m \subseteq W_k \ \&\ a \geq 2 - \sum_{l \in D_m} 2^{-l})\} .$$

Тогда выполнено

$$\forall k(W_k \cap A = \emptyset \supset [W_{h(k)}]^Q \cap \mathcal{Y}(A) = \emptyset) .$$

Легко доказать, что

$$\forall k m q(\{0,\dots,m\} \subseteq A \cup W_k \ \&\ [q]^Q = 2^{-m} \supset [W_{cql(h(k),q)}]^Q \cap$$
$$\cap\ \mathcal{Y}(A) \neq \emptyset) .$$

Применив к псевдосечению $\mathcal{Y}(A)$ теорему 1, мы получим алгорифм нижней оценки расстояния для $\mathcal{Y}(A)$. Исходя от этого алгорифма, легко получить (см. замечание 1) ОРФ, требуемую определением субкреативности для множества A. Теорема доказана.

На основании теоремы 2 § 4 из [5], замечания 2 и предыдущей теоремы получаем следующее следствие.

Следствие. 1) Существует субкреативное псевдосечение. 2) Существует сильно неразрешимое псевдосечение, которое не является субкреативным.

Литература

[1] МАРКОВ А.А.: Теория алгорифмов, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова XLII (1954).

[2] ШАНИН Н.А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LXVII (1962), 15-294.

[3] РОДЖЕРС Х.: Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва 1972.

[4] ШАНИН Н.А.: О конструктивном понимании математических суждений, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова LII (1958), 226-311.

[5] ЦЕЙТИН Г.С.: О верхних границах перечислимых множеств конструктивных вещественных чисел, Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова CXIII (1970),102-172.

[6] КАНОВИЧ М.И.: Сложность ограниченного разрешения алгорифмов, Исследования по теории алгорифмов и математической логике, ВЦ АН СССР Москва 1973,3-41.

[7] КАНОВИЧ М.И.: Об универсальности сильно неразрешимых множеств, Доклады АН СССР 204(1972),533-535.

[8] КАНОВИЧ М.И.: Сложность предела шпекеровых последовательностей, Доклады АН СССР 214(1974),1020-1023.

Matematicko-fyzikální fakulta

Karlova universita

Malostranské nám. 25, Praha 1

Československo

(Oblatum 7.4. 1977)