Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Katarina Salavová

Радикалы колец с инволюцией. I.

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18 (1977), No. 2, 367--381

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105781

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,2 (1977)

РАДИКАЛЫ КОЛЕЦ С ИНВОЛЮЦИЕЙ. 1.

Катарина САЛАВОВА, Братислава

Резюме: В [7] были перенесены в теорию категорий результаты общей теории радикалов и алгебр. Категория колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ является достаточно "хорошей" и в ней удается развить теорию радикалов в смысле [7]. Специальные и наднильпотентные радикалы могут быть определены в любой достаточно "хорошей" категории. Выяснено, что в категории $\mathcal{R}^*$ они могут быть охарактеризованы так же, как и в категории колец с инволюцией $\mathcal{R}$. Но между радикалами в категории колец $\mathcal{R}$ и в категоии колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ есть и существенные различия. Так, например, полупростой класс колец может не быть замкнутым относительно $*$ - идеалов.

Ключевые слова: Инволюция, категория колец с инволюцией, $*$ - идеал, симметрические элементы, кососимметрические элементы, радикал.

AM : 16A21 Реф. Ж.: 2.723.211

---

0. Обозначения. Будем рассматривать категорию колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$. Объектами этой категории считаем ассоциативные кольца с инволюцией, т.е. антиавтоморфизмом порядка два. Морфизмами в этой категории считаем $*$ - гомоморфизмы, т.е. такой гомоморфизм φ, что для любого $x \in A$, $\varphi(x^*) = (\varphi(x))^*$. Множество I будем называть $*$ - идеалом, если I-идеал и $I^* = I$ Элемент x кольца с инволюцией A называется симметрическим (кососимметрическим), если $x^* = x$ $(x^* = -x)$. Если I - $*$ - идеал, то инволюция на кольце A индуцирует инволюцию на фактор-кольце $A/_I$. Категория колец с инволюцией удо-

влетворяет аксиомам 1 - 7 из работы [7] и поэтому в ней можно ввести понятие радикала следующим образом. Пусть ρ - произвольное свойство колец с инволюцией. Множество I будем называть ρ - $*$ - идеалом, если I - $*$ - идеал и кольцо, обладающие свойством ρ. Через $\rho(A)$ обозначим сумму всех ρ - $*$ - идеалов кольца A. В категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ определен радикал ρ, если выполнены условия:

R^*1. Всякий $*$ -гомоморфный образ ρ -кольца есть ρ - кольцо;

R^*2. $\rho(A)$ является ρ - $*$ -идеалом для всякого кольца A;

R^*3. $\left(\rho\ A/_{\rho(A)}\right) = 0$ для любого кольца A.

1. <u>Несколько примеров</u>. Будем говорить, что радикал в категории $\mathcal{R}$ замкнут относительно инволюции, если $(\rho(A))^* \subseteq \subseteq \rho(A)$ для любого кольца с инволюцией A. Радикал Джекобсона, первичный радикал, ниль радикал Кете, антипростой радикал, радикал Брауна-Маккоя, замкнуты относительно инволюции.

<u>Пример 1.1</u>. Существует радикал в категории $\mathcal{R}$, который не замкнут относительно инволюции. Пусть A - простое кольцо с единицей, нетерово слева, но не справа (см. [6]). Пусть $S_{\mathfrak{M}}$ это верхний радикал в категории $\mathcal{R}$, определенный классом $\mathfrak{M}$, состоящим из одного кольца A. Рассмотрим кольцо $A \oplus A^\circ$ с инволюцией $(a,b)^* = (b,a)$, где A° кольво, антиизоморфное кольцу A. Тогда $(0,A^\circ) \subseteq S_{\mathfrak{M}}(A \oplus A^\circ)$, но $(A,0) \not\subseteq S_{\mathfrak{M}}(A \oplus A^\circ)$, так как $S_{\mathfrak{M}}(A,0) = 0$.

<u>Определение 1.2</u>. В категории колец с инволюцией $\mathcal{R}^*$ можно определить верхний радикал следующим образом (см. [7]).

Пусть $\mathfrak{M}$ - произвольный класс колец с инволюцией, удовлетворяющий требованию:

U^*) Если кольцо A с инволюцией принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и B ненулевой $*$ - идеал в кольце A, то существует такой $*$-идеал I в B, что $I \neq B$ и $B/_I \in \mathfrak{M}$. Кольцо A с инволюцией называется $S_{\mathfrak{M}}$-кольцом, если A не отображается $*$ - гомоморфно на ненулевые кольца из класса $\mathfrak{M}$.

Предложение 1.3. Свойство $S_{\mathfrak{M}}$ является радикальным свойством в категории $\mathcal{R}^*$.

Доказательство дано в [7] для любой "хорошей" категории. Следующий пример показывает, насколько радикал кольца с инволюцией зависит от инволюции на кольце.

Пример 1.4. Пусть P - поле с тривиальной инволюцией, т.е. $x^* = x$ для всех $x \in P$, $S_{\mathfrak{M}}$ - верхний радикал в $\mathcal{R}^*$, определенный классом, состоящим из одного поля P. Рассмотрим кольцо $P \oplus P$ с инволюцией $(a, b)^* = (b, a)$. Тогда $S_{\mathfrak{M}}(P \oplus P) = P \oplus P$. Рассмотрим на кольце $P \oplus P$ тривиальную инволюцию. Тогда $S_{\mathfrak{M}}(P \oplus P) = 0$.

Перейдем теперь к построению примера радикала в категории $\mathcal{R}^*$, для которого класс полупростых колец не замкнут относительно $*$ - идеалов.

Определение 1.5. Обозначим через $U_0(A) = \overline{T(A) \cup N(A)}$ - подкольцо кольца A, порожденное множеством $T(A) \cup N(A)$, где $N(A) = \{x x^* \mid x \in A\}$ и $T(A) = \{x + x^* \mid x \in A\}$.

Замечание 1.6. Если A - $*$ - подкольцо кольца B, то $U_0(A) \subseteq U_0(B)$.

Замечание 1.7. Пусть φ - $*$ - гомоморфизм кольца A на кольцо B. Тогда $\varphi(U_0(A)) \subseteq U_0(B)$.

Будем говорить, что кольцо A обладает свойством ω, тогда и только тогда, когда $U_0(A)=A$.

<u>Теорема 1.8</u>. Свойство ω является радикальным в категории $\mathcal{R}^*$.

<u>Доказательство</u>. Выполнение свойства R^*1 следует непосредственно из замечания 1.7. R^*2. $\omega(A)=\sum I_j$, где I_j - $*$ -идеалы в кольце A такие, что $U_0(I_j)=I_j$. Покажем, что $U_0(\omega(A))=\omega(A)$. Пусть $x\in\omega(A)$. Тогда $x=x_1+\dots+x_m$, где $x_j\in I_j=U_0(I_j)\subseteq U_0(\omega(A))$. Таким образом, $x\in U_0(\omega(A))$. Осталось показать, что $\omega\left(A/_{\omega(A)}\right)=0$. Пусть существует $*$ - идеал $I/_{\omega(A)}$ такой, что $U_0\left(I/_{\omega(A)}\right)=I/_{\omega(A)}$. Тогда $I/_{\omega(A)}=U_0\left(I/_{\omega(A)}\right)=U_0(I)+\omega(A)/_{\omega(A)}$. Следовательно, $U_0(I)+\omega(A)=I$. Но $I\supseteq\omega(A)$, т.е. $I/_{\omega(A)}=U_0\left(I/_{\omega(A)}\right)=U_0(I)+\omega(A)/_{\omega(A)}$. Таким образом, $I=U_0(I)$. Отсюда следует, что $I=\omega(A)$.

Теперь покажем, что класс ω - полупростых колец не замкнут относительно $*$ -идеалов.

<u>Пример 1.9</u>. Пусть $\mathbb{Q}$ - поле рациональных чисел. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Q}[y]$ с инволюцией $y^*=-y$ и кольцо $A=\mathbb{Q}[y]/_{(y^4)}$ с индуцированной инволюцией. Любой элемент $t\in A$ можно однозначно записать в виде $t=a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3$. Рассмотрим множества $Z=\{a_2y^2+a_3y^3\mid a_2,a_3\in\mathbb{Q}\}$ и $Z_0=\{a_2y^2\mid a_2\in\mathbb{Q}\}$. Тогда Z - $*$ - идеал в A, а Z_0 - $*$ - идеал в кольце Z. Но $U_0(Z_0)=Z_0$. Таким образом, $\omega(Z)\neq 0$, но $\omega(A)=0$.

2. $*$ - <u>первичные идеалы и модули</u>

Определение 2.1. Кольцо с инволюцией A называется $*$ - первичным, если для любых двух $*$ -идеалов B и C кольца A из $BC = 0$ следует, что либо $B = 0$, либо $C = 0$.

Предложение 2.2. Кольцо A - $*$ -первично тогда и только тогда, когда из $cAb = cAb^* = 0$ следует, что либо $c = 0$ либо $b = 0$.

Замечание 2.3. Любое первичное кольцо $*$ -первично. Пусть P -поле, $A = P \oplus P$ с инволюцией $(a,b)^* = (b,a)$. Тогда A - $*$ -первичное, но не первичное кольцо.

Определение 2.4. A - модуль M называется первичным, если $MA \neq 0$ и из равенства $xB = 0$, где $x \in M$ и B - идеал в A, следует, что либо $x = 0$, либо $B \subseteq Ann_A(M) = \{x \in A \mid Mx = 0\}$.

Определение 2.5. Назовем $*$ - аннулятором множество $Ann^*_A(M) = \{x \mid x \in A, Mx = Mx^* = 0\}$. Если $Ann^*_A(M) = 0$, то M называется $*$ -точным A-модулем. Если $MA = 0$, то M - тривиальный модуль.

Определение 2.6. Пусть A - кольцо с инволюцией. A - модуль M называется $*$ -первичным, если $MA \neq 0$ и из равенства $xB = 0$, где $x \in M$ и B - $*$ -идеал в кольце A, следует, что либо $x = 0$, либо $B \subseteq Ann^*_A(M)$.

Замечание 2.7. Любой первичный модуль над кольцом с инволюцией является $*$ - первичным модулем. Кольцо из замечания 2.3, рассматриваемое как правый A-модуль, служит примером $*$ -первичного, но не первичного модуля.

Лемма 2.8. Кольцо A является $*$ -первичным тогда и только тогда, когда существует $*$ -точный, $*$ -первичный A - модуль.

Доказательство. Пусть кольцо A - $*$ -первично, тогда по теореме 6 из [4] существует такой первичный идеал P в кольце A, что $P \cap P^* = 0$. Ввиду предложения 5 из [2], существует первичный A-модуль M такой, что $P = Ann_A(M)$, т.е. M является $*$ -точным $*$ -первичным A-модулем. Пусть теперь кольцо A обладает $*$ -точным, $*$ -первичным A-модулем M. Предположим, что $CD = 0$ и $C \neq 0$, где C и D - $*$ - идеалы кольца A. Если $0 \neq x \in M$, то $xC \neq 0$. Возьмем $0 \neq y \in xC$. Тогда $y = xc$, где $c \in C$ и $yD \subseteq (xC)D = 0$. Следовательно, $D = 0$.

Лемма 2.9. Если B -ненулевой $*$ -идеал в кольце A и B - $*$ -первичное кольцо, то $Ann_A B$ - $*$ - первичный идеал в A.

Доказательство. Во первых, $Ann_A B \neq A$. Во вторых, пусть C и D - также $*$ -идеалы кольца A, что $CD \subseteq Ann_A B$. Из $*$ - первичности кольца B и равенства $(BCB)(BDB) = 0$, следует, что либо $BCB = 0$, либо $BDB = 0$. Пусть $BCB = 0$, но $CB \neq 0$. Тогда существует $0 \neq d \in CB \subseteq B$. Если $b \in B$, то $bBd = b^*Bd = 0$. Из предложения 2.2 следует, что $b = 0$, т.е. $B = 0$. Получили противоречие. Следовательно, $CB = 0$. Аналогично, $BC = 0$, т.е. $C \subseteq Ann_A B$.

Лемма 2.10. Пусть B - $*$ - идеал кольца A, C - $*$ - идеал кольца B, $B/_C$ - полупервичное кольцо. Тогда C - $*$ - идеал в кольце A.

Доказательство. Так как кольцо $B/_C$ не содержит ненулевых нильпотентных идеалов, то из $\left(AC + C/_C\right)^2 = 0$, следует, что $AC \subseteq C$. Аналогично, $CA \subseteq C$.

Лемма 2.11. Если M - $*$ -первичный A-модуль, и

P - $*$ -идеал кольца A такой, что $P \subseteq Ann^*_A(M)$, то при композиции $x(a+P) = xa$ M является $*$ - первичным $A/_P$ - модулем и имеет место равенство:

$$(1) \qquad Ann^*_{A/_P}(M) = Ann^*_A(M)/_P \quad .$$

Если M - $*$ - первичный $A/_P$ -модуль, где P - $*$ - идеал в A, то при композиции $xa = x(a+P)$ получаем, что M является $*$ -первичным A -модулем и имеет место (1).

Лемма 2.12. Пусть I - $*$ - идеал в кольце B, B - $*$ - идеал в кольце A. Тогда $I_A = I_{(A,*)}$, где $I_{(A,*)}$ -наименьший $*$ -идеал в кольце A, порожденный множеством I, и I_A - наименьший идеал в кольце A, порожденный множеством I. Следовательно, $I^3_{(A,*)} \subseteq I$.

Лемма 2.13. Если M - $*$ - первичный A -модуль и B такой $*$ -идеал в кольце A, что $MB \neq 0$, то M является $*$ - первичным B - модулем.

Доказательство. Пусть $xI = 0$, где $0 \neq x \in M$ и I - $*$ - идеал в кольце B. В силу леммы 2.12, $I^3_{(A,*)} \subseteq I$. Поэтому $xI^3_{(A,*)} = 0$. Пусть m - наименьшее из чисел $\{1,2,3\}$, удовлетворяющих равенству $xI^m_{(A,*)} = 0$. Если $m = 1$, то, в силу $*$ - первичности A - модуля M, $I_{(A,*)} \subseteq Ann^*_A(M)$. Но так как $I \subseteq I_{(A,*)}$, то $I \subseteq Ann^*_A(M) \cap B = Ann^*_B(M)$. Если же $m > 1$, то пусть $0 \neq y \in xI^{m-1}_{(A,*)}$. Тогда $y = xc_1$, где $c_1 \in I^{m-1}_{(A,*)}$. Следовательно, $yI_{(A,*)} = xc_1 I_{(A,*)} \subseteq xI^m_{(A,*)} = 0$. Отсюда, как и выше, получаем, что $I \subseteq Ann^*_B(M)$. Итак, M - $*$ - первичный B - модуль.

Лемма 2.14. Если M - $*$ - первичный B -модуль, где B - $*$ -идеал кольца A, то MB является $*$ - первичным A - модулем, причем $Ann_B^*(M) = Ann_A^*(MB) \cap B$.

Доказательство. Покажем сначала, что MB можно рассматривать как A - модуль. Пусть $a \in A$ и $x \in MB$, т.е. $x = \sum y_i b_i$, где $y_i \in M$, $b_i \in B$. Положим $xa = \sum y_i (b_i a)$. Проверим, что композиция определена корректно. Пусть $x = \sum z_j b_j$, где $z_j \in M$, $b_j \in B$. Если b - произвольный элемент кольца B, то $(\sum y_i (b_i a))b = \sum y_i (b_i a b) = \sum (y_i b_i)(ab) = \sum (z_j b_j)(ab) = \sum z_j (b_j a b) = (\sum z_j (b_j a)) b$.

Так как $MB \neq 0$, т.е. $B \notin Ann_A^*(M)$, то из $(\sum y_i (b_i a) - \sum z_j (b_j a))B = 0$, ввиду $*$ - первичности B - модуля M, следует, что $\sum y_i (b_i a) = \sum z_j (b_j a)$. Ясно, что относительно введенной композиции MB будет A - модулем. Докажем теперь, что MB будет $*$ - первичным A - модулем. Пусть $0 \neq x \in MB$ и $xI = 0$, где I - $*$ - идеал в кольце A. Так как $xIB \subseteq xIA \subseteq xI = 0$ и $xBI \subseteq xAI \subseteq xI = 0$, то $x(IB + BI) = 0$. Но $IB + BI$ является $*$ - идеалом в B. Следовательно, так как $x \neq 0$, то ввиду $*$ - первичности B -модуля M, $IB + BI \subseteq Ann_B^*(M)$, т.е. $0 = M(BI) = (MB)I$ или $I \subseteq Ann_A(MB)$. Но так как I - $*$ - идеал, то $I \subseteq Ann_A^*(MB)$. Покажем, что $Ann_B^*(M) = Ann_A^*(MB) \cap B$ (отсюда, в частности, следует, что $(MB)A \neq 0$). Пусть $b \in Ann_B^*(M)$, т.е. $Mb = Mb^* = 0$. Тогда $MBb = 0$ и $MBb^* = 0$. Следовательно, $Ann_B^*(M) \subseteq Ann_A^*(MB) \cap B$. Пусть $b \in Ann_A^*(MB) \cap B$. Тогда $MBb = MBb^* = 0$. По лемме 2.11, $x\bar{B} \neq 0$, где $\bar{B} = B/Ann_B^*(M)$, $0 \neq x \in M$. Пусть $0 \neq y \in x\bar{B}$. Тогда $y(\bar{b})_{(\bar{B},*)} = 0$. Следовательно, $\bar{b} = 0$, т.е. $b \in Ann_B^*(M)$.

3. Наднильпотентные радикалы в $\mathfrak{R}^*$. Пусть $\mathfrak{M}$ класс колец. Идеал B кольца A назовем $\mathfrak{M}$-идеалом, если $A/_B$ - ненулевое кольцо из класса $\mathfrak{M}$. Категория колец с инволюцией удовлетворяет аксиомам 1 - 7 из [7] и поэтому в ней можно ввести понятие наднильпотентного радикала.

Определение 3.1. Под наднильпотентным радикалом в категории $\mathfrak{R}^*$ будем понимать верхний радикал $S_{\mathfrak{M}}$ в категории $\mathfrak{R}^*$, где $\mathfrak{M}$ класс колец с инволюцией, удовлетворяющий свойствам:

S^*1) Если $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал C кольца A не содержит $*$-идеал B кольца A и $D = C \cap B$, то D есть $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал кольца B;

S^*2') Если B - ненулевой $*$ - идеал кольца A, C - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал кольца B, то существует $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал D кольца A такой, что $D \cap B = C$.

Класс колец с инволюцией $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условиям S^*1 и S^*2' называется $*$ - слабо специальным классом колец. Рассмотрим условия:

S^*3') Все кольца из класса $\mathfrak{M}$ полупервичны;

S^*4) Всякий ненулевой $*$-идеал кольца из класса $\mathfrak{M}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$;

S^*5') Если ненулевое кольцо B, принадлежащее классу $\mathfrak{M}$, является $*$ - идеалом кольца A, причем $Ann_A B = 0$, то $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 3.2. Следующие группы условий эквивалентны:

1) S^*1, S^*2';

2) S^*3', S^*4, S^*5'.

Доказательство. $S^*1 \Longrightarrow S^*4$. Пусть B -ненулевой $*$ -идеал в кольце $A \in \mathfrak{M}$, т.е. 0 есть $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце A. Из S^*1 следует, что $0 = B \cap D$ есть $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в B, т.е. $B \in \mathfrak{M}$.

$S^*4 \Longrightarrow S^*1$. Пусть C есть $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце A и $*$ - идеал C не содержит $*$ - идеал B кольца A. Тогда $0 \neq B/_{C \cap B} \cong B + C/_B \subseteq A/_C \in \mathfrak{M}$. Из S^*4 следует, что $B/_{C \cap B} \in \mathfrak{M}$, т.е. $C \cap B$ - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце B.

$S^*2 \Longrightarrow S^*5'$. Так как 0 - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце B, то существует $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал C такой, что $B \cap C = 0$. Тогда $C \subseteq Ann_A B = 0$. Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$.

Покажем теперь, что все кольца в классе $\mathfrak{M}$ полупервичны. Допустим противное, т.е. что слабо $*$ -специальный класс содержит не полупервичное кольцо. Тогда класс $\mathfrak{M}$ содержит и ненулевые кольца с нулевым умножением. Пусть A одно из них. Рассмотрим два случая: α) в кольце A существует ненулевой симметрический экемент v; β) в кольце A существует ненулевой кососимметрический элемент v. Всегда имеет место одна из этих возможностей. Группа Zv будет $*$ - идеалом в кольце A. Поэтому $Zv \in \mathfrak{M}$. Пусть $\bar{Z} = Z/_{Ann_Z v}$. Тогда получаем, что $\bar{Z}$ - кольцо с единицей. Рассмотрим на кольце $\bar{Z}$ нулевое умножение и обозначим это кольцо $\bar{Z}^o$. В случае α) на кольце $\bar{Z}^o$ рассмотрим тривиальную инволюцию, тогда $\bar{Z}^o \cong Zv$ и $\bar{Z}^o \in \mathfrak{M}$. В случае β) на кольце $\bar{Z}^o$ рассмотрим инволюцию $(\bar{z})^* = -\bar{z}$. В этом случае также $\bar{Z}^o \cong Zv$ и $\bar{Z}^o \in \mathfrak{M}$.

Построим кольцо $K = \{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \mid \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in \bar{Z}\}$, определяя операции сложения покомпонентно, а умножения по правилу

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1)(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2) = (0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1 \bar{\alpha}_2).$$

Нетрудно видеть, что K - ассоциативное, коммутативное кольцо и $K^n = 0$. А именно, если $k = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$, то $k^2 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$,

$k^3 = (\bar{0},\bar{0},\bar{1})$ и $k^4 = 0$. Ясно, что $K = Zk + Zk^2 + Zk^3$ и $K = \langle k \rangle$ - однопорожденное ассоциативное коммутативное кольцо с определяющими соотношениями $k^4 = 0$, $\delta k = 0$ для любого $\delta \in Ann_Z v$. В случае α) на K рассмотрим тривиальную инволюцию. В случае β): $k^* = -k$.

Положим $B = Zk^2 + Zk^3$ и $C = Zk^2$. Ясно, что в случае α) и β) B - $*$ - идеал кольца K, C - $*$ - идеал кольца B и $B/_C \cong \bar{Z}^\circ$. Между тем кольцо C не является $*$ - идеалом кольца K. Получили противоречие.

Осталось показать, что S^*3 и S^*5' влечет S^*2'. Сначала заметим, что если I - ненулевой $*$ - идеал в кольце A и $I \in \mathfrak{M}$, то $A/_{Ann_A I} \in \mathfrak{M}$. Пусть B - $*$ - идеал кольца A, C - $*$ - идеал кольца B, причем $B/_C$ - ненулевое кольцо из класса $\mathfrak{M}$. Ввиду леммы 2.10, C - $*$ - идеал кольца A. Заметим, что $Ann_{A/_C}(B/_C) = (C:B)/_C$, где $(C:B) = \{a \mid a \in A,\ aB \subseteq C,\ Ba \subseteq C\}$. Следовательно, $A/_{(C:B)} \in \mathfrak{M}$. Ясно, что $(C:B) \cap B = C$, т.е. выполнено условие S^*2'.

<u>Определение 3.3</u>. Радикал ρ в категории $\mathfrak{R}^*$ назовем наследственным, если любой $*$ - идеал ρ - радикального кольца ρ - радикален. Радикал ρ в категории $\mathfrak{R}^*$ назовем идеально наследственным, если $\rho(I) = I \cap \rho(A)$ для любого $*$ - идеала I кольца A.

<u>Предложение 3.4</u>. Пусть ρ - радикал в $\mathfrak{R}^*$ такой, что все нильпотентные кольца радикальны. Тогда ρ - наследственный радикал в $\mathfrak{R}^*$ тогда и только тогда, когда ρ - идеально наследственный радикал.

<u>Доказательство</u>. Пусть ρ - наследственный радикал в $\mathfrak{R}^*$. Ввиду предложения 2.1 из [7] достаточно показать, что

любой $*$ - идеал P ρ - полупростого кольца A ρ - полупрост. Пусть Q - ненулевой $*$ - идеал в кольце P такой, что $\rho(Q) = Q$. Тогда PQP - $*$ - идеал в кольце Q и в кольце A. Таким образом, $PQP = 0$. Положим $P_0 = \{x \mid x \in P, PxP = 0\}$. Тогда P_0 - $*$ - идеал в кольце A, $P_0^3 = 0$, $Q \subseteq P_0$. Таким образом, $\rho(P_0) = P_0$. Из ρ - полупростоти кольца A следует, что $P_0 = 0$ и $Q = 0$. Получили противоречие. Слеховательно, $\rho(P) = 0$.

<u>Предложение 3.5</u>. Радикал ρ в категории $\mathcal{R}^*$ является наднильпотентным тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) ρ наследственный радикал; 2) любое нильпотентное кольцо с инволюцией радикально.

<u>Доказательство</u>. Пусть ρ - наднильпотентный радикал, т.е. $\rho = S_{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}$ - $*$ - слабо специальный класс колец. Тогда: 1) если B - $*$ - идеал кольца A, C - $*$ - идеал кольца B, причем $0 \neq B/C \in \mathfrak{M}$, т.е. $S_{\mathfrak{M}}(B) \neq B$, то существует $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал кольца A такой, что $D \cap B = C$, т.е. $S_{\mathfrak{M}}(A) \neq A$;

2) так как все кольца из класса $\mathfrak{M}$ не содержат ненулевых нильпотентных идеалов, то все нильпотентные кольца не отображаются $*$ - гомоморфно на ненулевые кольца из класса $\mathfrak{M}$.

Пусть ρ - радикал в категории $\mathcal{R}^*$, удовлетворяющий свойствам 1) и 2). Положим $\mathfrak{M} = \{A \mid A \in \mathcal{R}^*, \rho(A) = 0\}$. Тогда $\rho = S_{\mathfrak{M}}$. Учитывая предложение 3.2 легко проверить, что класс $\mathfrak{M}$ - $*$ - слабо специальный.

4. <u>Специальные радикалы в</u> $\mathcal{R}^*$

Определение 4.1. Под специальным радикалом в категории $\mathfrak{R}^*$ будем понимать верхний радикал $S_{\mathfrak{M}}$ в категории $\mathfrak{R}^*$, где $\mathfrak{M}$ класс колец с инволюцией, удовлетворяющий свойствам S^*1 и S^*2

S^*2) Если B - ненулевой $*$ - идеал кольца A, D - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал кольца B, то существует единственный $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал C кольца A такой, что $C \cap B = D$.

Класс колец с инволюцией $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условиям S^*1, S^*2 называется $*$ - специальным классом колец.

Рассмотрим условие: S^*5) Если I - ненулевой $*$ -идеал в $*$ - первичном кольце A принадлежит классу $\mathfrak{M}$, то и $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 4.2. Следующие группы условий эквивалентны:

1) S^*1, S^*2.

2) S^*3, S^*4, S^*5.

Доказательство. Эквивалентность условий S^*1 и S^*4 была показана в теореме 3.2. Импликация $S^*2 \Longrightarrow S^*5$ доказывается также как и в 3.2. Теперь покажем, что в классе $\mathfrak{M}$, удовлетворящем условиям S^*1 и S^*2 все кольца $*$ - первичны. Пусть существует в классе $\mathfrak{M}$ кольцо A такое, что A не $*$ -первично. Из теоремы 3.2 следует, что кольцо A полупервично. Таким образом, в кольце A существуют $*$ -идеалы $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ такие, что $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 = 0$. Пусть $\mathfrak{B} = \{V \mid V \cap \mathfrak{I}_1 = 0,\ V - * -$ идеал в A, $V \supseteq \mathfrak{I}_2\}$. Множество $\mathfrak{B}$ индуктивно. По лемме Цорна существует максимальный элемент P. Ясно, что $\mathfrak{I}_1 \in \mathfrak{M}$. Таким образом, 0 - $\mathfrak{M}$ - идеал в кольце A и $\mathfrak{I}_1$. Покажем, что P - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце A. По свойству S^*2 существует $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал K/P в кольце A/P такой, что $\mathfrak{I}_1 + P/P \cap K/P = 0$. Ввиду максимальности $*$ - идеала P,

$K = P$ и $A/_P \in \mathfrak{M}$. Итак, 0 - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в $\mathcal{J}_1$, 0 - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце A, P - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в кольце A и $0 \cap \mathcal{J}_1 = P \cap \mathcal{J}_1 = 0$. Получили противоречие.

Осталось показать, что S^*3 и S^*5 влечет S^*2. При помощи леммы 2.9 легко показать, что если I - $*$ - идеал кольца A и $I \in \mathfrak{M}$, то $A/_{Ann_A I} \in \mathfrak{M}$. Пусть B - ненулевой $*$ - идеал кольца A и D - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал кольца B. Так как $B/_D$ - $*$ - первичное кольцо, то по лемме 2.10, D - $*$ - идеал кольца A. Ясно, что $(B:D) = \{x \in A \mid xB \subseteq D, Bx \subseteq D\}$ $*$ - идеал в A. Но $Ann_{A/_D}(B/_D) \cap B/_D = (B:D)/_D \cap B/_D = 0$, иначе $(B:D) \cap B = D$.

Пусть существует P - $\mathfrak{M}$ - $*$ - идеал в A такой, что $P \cap B = D$. Тогда $PB \subseteq D$ и $BP \subseteq D$, т.е. $P \subset (B:D)_A$. Наоборот, так как $D \neq B$, то $P \not\supseteq B$. Из $*$ - первичности идеала P и включений $B(B:D)_A \subseteq (B:D)_A \cap B = D \subseteq P$ получаем, что $(B:D)_A \subseteq P$. Таким образом, $P = (B:D)_A$.

Замечание 4.3. В [7] построен пример наднильпотентного радикала в $\mathfrak{R}$, не являющегося специальным. Легко показать, что этот радикал замкнут относительно инволюции, т.е. является наднильпотентным, но не специальным в $\mathfrak{R}^*$.

Литература

[1] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю.М. РЯВУХИН: Модули и радикалы, Докл. акад. наук СССР 156(1964), 991-994.

[2] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ: Первичные модули и радикал Бэра, Сибирский мат. журнал 2(1961), 801-806.

[3] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ: Радикалы ассоциативных колец, Математический сборник 44(1958), 179-212.

[4] MARTINDALE W.S.3rd.: Rings with involution and polynomial identities, J. algebra 11(1966), 186-194.

[5] SZASZ F.: Radikale der Ringe, Akademiai Kiadó, Budapest, 1975.

[6] COZZENS J.H.: Simple principal left ideal domains, J. algebra 23(1972), 66-75.

[7] Ю.М. РЯБУХИН: Радикалы в категориях, Математические исследования 2:3(1967), 107-165.

[8] BAXTER W.E., MARTINDALE W.S.3rd.: Rings with involution and polynomial identities, Canad. J. Math. 20(1968), 465-473.

[9] В.А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю.М. РЯБУХИН: Специальные модули и специальные радикалы, Докл. акад. наук СССР 147 (1962), 1274-1277.

Podtatranského 8

80100 Bratislava

Československo

(Oblatum 13.4. 1977)