Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Siegfried Hahn

Ein Homotopieerweiterungssatz für kompakte Vektorfelder in topologischen Vektorräumen (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 17 (1976), No. 4, 807--811

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105740`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,4 (1976)

EIN HOMOTOPIEERWEITERUNGSSATZ FÜR KOMPAKTE VEKTORFELDER IN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

(Vorläufige Mitteilung)

Siegfried HAHN, Dresden

Inhalt: Der Homotopieerweiterungssatz von Granas [2] wird für (nichtnotwendig lokalkonvexe) topologische Vektorräume bereitgestellt. Dabei kann im Gegensatz zu Klee [10] auf die Forderung, dass der Definitionsbereich der betrachteten Abbildungen eine einfachberandete Nullumgebung ist, verzichtet werden.

Schlüsselwörter: Homotopie, Abbildungsgrad, kompakte Vektorfelder, zulässige topologische Vektorräume.

AMS: 47H10 Ref. Ž.: 7.978.53

In dieser Note skizzieren wir einen vom Abbildungsgrad freien Zugang zur Leray-Schauder-Theorie im Sinne von Granas (s.z.B. [2]) für allgemeine topologische Vektorräume. Es erweist sich, dass dabei das Hilfsmittel der einfachberandeten Nullumgebung (s. Klee [9],[10], dort: "Shrinkable neighborhood") nicht benötigt wird. Nähere Ausführungen werden in [13] erscheinen.

Alle hier betrachteten topologischen Vektorräume (TVR) seien reell und separiert. Sei A eine Teilmenge eines TVR. Dann bezeichne das Symbol $C(A,E)$ die Klasse aller kompakten Vektorfelfder (s. [10]) auf A und $C_o(A,E)$ die Klasse aller $f \in C(A,E)$ mit $f(x) \neq o$ $(x \in A)$.

Es seien X und Y Teilmengen eines TVR E mit $X \subset Y$. In Anlehnung an Granas [2] heisse $f \in C_0(X,E)$ wesentlich bezüglich Y, wenn f keine Erweiterung $\tilde{f} \in C_0(Y,E)$ besitzt. Andernfalls heisst f unwesentlich.

Unsere Ausführungen beziehen sich auf zulässige TVR (s. [10],[5]), die die Klasse der lokalkonvexen TVR echt enthalten. Bisher ist nicht bekannt, ob alle TVR zulässig sind. Damit wir die Ergebnisse von Granas auf (zulässige) TVR übertragen können, betrachten wir nicht unwesentliche Vektorfelder (wie in [2],[10]), sondern solche, die sich durch unwesentliche finite Vektorfelder ([2]) gleichmässig approximieren lassen. Dieses Vorgehen scheint der Struktur der kompakten Abbildungen besser angepasst zu sein. Ihm liegt ein Approximationsgedanke zugrunde, mit dem bereits allgemeine Fixpunktaussagen bewiesen werden konnten ([11], [5]) sowie der Abbildungsgrad für TVR und ein Homotopieerweiterungssatz für mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen Räumen bereitgestellt wurde ([6],[7],[8],[12]).

<u>Definition</u>. Es seien E ein TVR, X und Y abgeschlossene Teilmengen von E mit $X \subset Y$ sowie $f \in C_0(X,E)$. f heisse approximationsunwesentlich bezüglich Y, wenn es zu jeder Nullumgebung V aus E ein $f_V \in C_0(X,E)$ und einen endlichdimensionalen Teilraum E_V von E gibt, so dass $f_V(x) - f(x) \in V$ $(x \in X)$, $x - f_V(x) \in E_V$ $(x \in X)$, $X \cap E_V \neq \emptyset$ gilt und $f_V | X \cap E_V$ unwesentlich bezüglich $Y \cap E_V$ ist.

Ein $f \in C_0(X,E)$ heisse approximationswesentlich, wenn f nicht approximationsunwesentlich ist.

Unsere Begriffsbildung wird motiviert durch folgende

Bemerkung. In metrischen Vektorräumen ist ein $f \in C_0(X,E)$ genau dann approximationsunwesentlich, wenn sich f gleichmässig durch finite unwesentliche Vektorfelder approximieren lässt.

Satz 1. Es seien E ein zulässiger TVR sowie X und Y abgeschlossene Teilmengen von E mit $X \subset Y$. Dann gilt:

(1) Jedes approximationswesentliche $f \in C_0(X,E)$ ist wesentlich (bezüglich Y).

(2) Sei $f \in C_0(X,E)$ approximationsunwesentlich und finit. Dann existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E derart, dass $X \cap E_0 \neq \emptyset$ und $f \mid X \cap E_0$ unwesentlich bezüglich Y ist.

(3) Für den Fall, dass $f \in C_0(X,E)$ finit und E metrisierbar ist, fallen die Begriffe "wesentlich" und "approximationswesentlich" zusammen.

Wir formulieren nun unseren Homotopieerweiterungssatz.

Satz 2. Es seien E ein zulässiger TVR, X und Y abgeschlossene Teilmengen von E sowie f und g zwei auf X homotope (s. [2],[10]) Vektorfelder aus $C_0(X,E)$. Dann sind f und g entweder beide approximationswesentlich oder beide approximationsunwesentlich bezüglich Y.

Der Beweis verwendet den Homotopieerweiterungssatz von Granas für endlichdimensionale normierte Räume und elementare Approximationsgedanken. Damit liegt im wesentlichen unseren Satz 2 nur der klassische Erweiterungssatz von Tietze (s. z.B. [2]) zugrunde. Mit Satz 2 können wir die Ergebnisse der Leray-Schauder-Theorie auf zulässige TVR (ohne Abbildungsgrad) übertragen und benötigen keine tieferliegenden

Hilfsmittel, wie z.B. den Erweiterungssatz von Dugundji [1] und den Begriff der einfachberandeten Nullumgebung mehr.

Ein Spezialfall von Satz 2 wurde vom Verfasser bereits in [4] vorgestellt, wodurch das Sweeping-Theorem sowie allgemeine Fixpunkt- und Eigenwertaussagen einfach bewiesen werden konnten. Satz 2 lässt nun auch den vom Abbildungsgrad freien Beweis des Antipodensatzes von Borsuk und des Borsuk-Ulam-Theorems für zulässige TVR zu. Klee [10] bewies bereits den Gebietsinvarianzsatz für zulässige TVR. Wir können ihn nun ohne Benutzung der einfachberandeten Nullumgebungen beweisen.

Ferner is unser Homotopieerweiterungssatz für den Beweis von Konvergenzsätzen zu Projektionsverfahren in TVR geeignet, wofür bisher der Abbildungsgrad verwendet wurde (s. z.B. [3]).

Literatur

[1] J. DUGUNDJI: An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math. 1(1951), 353-367.

[2] A. GRANAS: The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I), Rozprawy Math. XXX Warszawa 1962.

[3] S. HAHN: Über Näherungslösungen von nichtlinearen Operatorengleichungen, Wiss. Z. TU Dresden 22 (1973), 489-493.

[4] S. HAHN: Zur Leray-Schauder-Theorie in topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. TU Dresden 24(1975), 375-378.

[5] S. HAHN u. K.F. POTTER: Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen,

Studia Math. 50(1974), 1-16.

[6] S. HAHN u. T. RIEDRICH: Der Abbildungsgrad kompakter Vektorfelder in nichtnotwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. TU Dresden 22(1973), 37-42.

[7] W. KABALLO: Zum Abbildungsgrad in Hausdorffschen topologischen Vektorräumen, Manuscripta Math. 8(1973), 209-216.

[8] G. KAYSER: Zur relativen Drehung in Hausdorffschen topologischen Vektorräumen, Wiss. Z. TU Dresden 23(1974), 339-344.

[9] V. KLEE: Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces, Math. Ann. 141(1960), 281-285.

[10] V. KLEE: Leray-Schauder-theory without local convexity, Math. Ann. 141(1960), 286-296.

[11] M. LANDSBERG: Über die Fixpunkte kompakter Abbildungen, Math. Ann. 154(1964), 427-431.

[12] T.W. MA: Non-singular set-valued compact fields in locally convex spaces, Fund. Math. 75(1972), 249-259.

[13] S. HAHN: Zur Theorie kompakter Vektorfelder in topologischen Vektorräumen (wird in Math. Nachr. veröffentlicht).

TU Dresden

Sektion Mathematik

8027 Dresden

D D R

(Oblatum 7.7. 1976)