M. N. L'vovskij

О продолжепии голоморфных отображений в пространствах Блоха

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 17 (1976), No. 2, 357--362

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105700`

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

17,2 (1976)

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВА БЛОХА

М.Н. ЛЬВОВСКИЙ, Москва

Резюме: Установлено совпадение оболочек голоморфности относительно голоморфных отображений в комплексные пространства, упругие по модулю аналитического множества, и оболочек голоморфности относительно аналитических функций.

Ключевые слова: Упругие комплексные пространства, оболочки голоморфности, неразветвленные накрытия, многообразия Штейна.

AMS : 32H20 Ref. Ž.: 3.992

В работе [1] П. Кернан и С. Кобаяси ввели следующее определение, обобщающее понятие упругого комплексного пространства, а следовательно, и понятие полного гиперболического по Кобаяси пространства. (Об этих пространствах см., например, в [2].)

Определение. Комплексное пространство M называется упругим по модулю собственного аналитического подмножества $\Delta \subset M$, если для любой последовательности $\{f_i\}$ голоморфных отображений круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в M выполнено следующее: либо из последовательности $\{f_i\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах D к голоморфному отображению $D \longrightarrow M$, либо для любого компакта $K \subset\subset D$ все образы $f_i(K)$ лежат, начиная с некоторого i , в любой наперед заданной окрестности множества Δ .

Если $\Delta = \emptyset$, то данное выше определение превращается в определение упругого пространства.

В том случае, когда не требуется конкретно указывать множество Δ , мы будем комплексное пространство, упругое по модулю аналитического множества, называть для краткости пространством Блоха. В качестве мотивировки этого названия можно предложить два аналога теоремы Блоха: теорему 5 работы [1] и теорему 1 ниже. Многообразие, фигурирующее в упомянутой теореме Кернала-Кобаяси, является пространством Блоха в нашем смысле, и это обстоятельство, как отмечено в [1], по существу эквивалентно утверждению теоремы.

<u>Теорема 1.</u> Пусть M и N - комплексные пространства, M - упруго по модулю аналитического множества Δ , K и Q - компакты в N и $M \setminus \Delta$ соответственно, $x \in K$. Тогда в M существует такой компакт L , что $f(K) \subset L$ при любом голоморфном отображении $f: N \longrightarrow M$, таком, что $f(x) \in Q$.

Доказательство этой теоремы нетрудно получить непосредственно из определения пространств Блоха, рассмотрев компактное исчерпание пространства M .

Одним из центральных вопросов современной теории голоморфных отображений является вопрос о принудительном аналитическом продолжении таких отображений в комплексные пространства различных классов. Нижеследующий основной результат данной статьи состоит в описании оболочек голоморфности относительно голоморфных отображений в пространства Блоха.

Теорема 2. Пусть X - неразветвленное накрытие над многообразием Штейна, $H(X)$ - оболочка голоморфности X относительно голоморфных функций на X, M - пространство, упругое по модулю аналитического множества Δ, $f: X \longrightarrow M$ - голоморфное отображение, причем $f(X) \cap (M \setminus \Delta) \neq \emptyset$. Тогда отображение f можно продолжить до голоморфного отображения $H(X) \longrightarrow M$.

Эта теорема обобщает недавный результат Х. Фудзимото [3] об оболочках голоморфности относительно голоморфных отображений в упругие пространства.

Доказательство теоремы 2 основано на последовательности лемм, первые две из которых являются аналогами для отображений в пространства Блоха классических теорем Леви и Хартогса. В формулировках этих лемм M и Δ - те же, что и в условии теоремы 2.

Лемма 1. Пусть Ω - область в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, с границей класса C^2 в точке $p \in \partial\Omega$, невыпуклая в смысле Леви в точке p; $f: \Omega \longrightarrow M$ - голоморфное отображение, причем $f(\Omega) \cap (M \setminus \Delta) \neq \emptyset$. Тогда существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки p, что отображение f можно продолжить до голоморфного отображения $\Omega \cup \mathcal{U} \longrightarrow M$.

Лемма 2. Пусть $0 < r < 1$, $R = \{z \in D^n : |z_j| < r, j = 1, \ldots, n-1, |z_n| > 1 - r\}$, $f: R \longrightarrow M$ - голоморфное отображение, причем $f(R) \cap (M \setminus \Delta) \neq \emptyset$. Тогда отображение f можно продолжить до голоморфного отображения $D^n \longrightarrow M$.

Пусть теперь X и f - те же, что и в условии теоремы 2. Обозначим через E пространство пучка ростков голоморфных отображений открытых подмножеств многообразия X в пространство M, а через $H^f(X)$ – связную компоненту E, содержащую связное множество $\{f_x : x \in X\}$. Конечно, здесь через f_x обозначен росток отображения f в точке x. $H^f(X)$ можно рассматривать как максимальную область существования отображения f, эта область является неразветвленным аналитическим накрытием над тем же многообразием Штейна, что и X.

Лемма 3. $H^f(X)$ является многообразием Штейна.

Доказательство леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что $p = 0 \in \mathbb{C}^n$. Пусть V такая окрестность точки $0 \in \mathbb{C}^n$, а φ такая вещественно-значная функция класса $C^2(V)$, что $\Omega \cap V = \{x \in V : \varphi(x) < 0\}$, $\operatorname{grad} \varphi|_0 \neq 0$. По условию форма Леви функции φ имеет в точке 0 хотя бы одно отрицательное собственное значение.

Выберем в $\mathbb{C}^n$ такую систему координат, что:

(1) $\varphi(x) = \operatorname{Re}(x_1 + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j) + \sum_{i,j} c_{ij} x_i \bar{x}_j + \rho(x)$,

где $1 \le i, j \le n$, (c_{ij}) – эрмитова матрица, $c_{22} < 0$, $\lim_{x \to 0} \|x\|^{-2} \rho(x) = 0$, и (2) существуют такие числа $a > b > 0$, что

$$\Delta \cap f(\xi_0(\Delta_a - \Delta_b)) = \emptyset, \quad \xi_0(\Delta_a - 0) \subset \Omega \cap V,$$

где $\Delta_\lambda = \{x \in \mathbb{C} : |x| < \lambda\}$, а $\xi_t(\theta) = (-t - b_{22}\theta^2, \theta, 0, \dots, 0)$, $\lambda > 0, t, \theta \in \mathbb{C}$. Это всегда можно сделать, поскольку прообраз $f^{-1}(\Delta)$ – собственное аналитическое подмножество Ω. Можно также считать, что $\xi_t(\Delta_a) \subset \Omega \cap V$ при $t \in (0, a]$.

Положим

$$h_k = f \circ \xi_{\frac{a}{k}}, \quad h_k : \Delta_a \to M, \quad g = f \circ \xi_0|_{\Delta_a - \Delta_b}.$$

При $k \to \infty$ $h_k \to g$ на $\Delta_a - \Delta_b$.

Поскольку M упруго по модулю Δ, мы можем в силу (2) выделить из последовательности $\{h_k\}$ подпоследовательность, сходящуюся к отображению h_0, $h_0 : \Delta_a \to M$, на Δ_a, и ясно также, что в нашем случае можно взять всю последовательность $\{h_k\}$ в качестве этой подпоследовательности.

Пусть N - окрестность в M точки $h_0(0)$, биголоморфно эквивалентная аналитическому подмножеству некоторого полидиска, а $\alpha \in (0, a)$ такого, что $h_0(\overline{\Delta}_\alpha) \subset N$, $h_k(\overline{\Delta}_\alpha) \subset N$ для достаточно больших k.

Отображение

$$A(w_1, \ldots, w_n) = (-w_1 - b_{22} w_2^2, w_2, \ldots, w_n)$$

является автоморфизмом пространства $\mathbb{C}^n$. Отметим, что

$$\xi_t(\theta) = A(t, \theta, 0, \ldots, 0).$$

Можно выбрать такие числа $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, $0 < \beta < \gamma$, $0 < \varepsilon < \alpha$, $\delta > 0$, что если обозначить

$$S = [(\Delta_\beta \times \Delta_\alpha) \cup (\Delta_\gamma \times (\Delta_\alpha - \Delta_\varepsilon)] \times \Delta_\delta^{n-2},$$

то $A(S) \subset \Omega \cap V$, и $f \circ A(S) \subset N$. По теореме Хартогса $f_{|A(S)}$ продолжается до голоморфного отображения $f' : A(\Delta_\gamma \times \Delta_\alpha \times \Delta_\delta^{n-2}) \to N$.

Если мы возьмем такую окрестность нуля $\mathcal{U} \subset A(\Delta_\gamma \times \Delta_\alpha \times \Delta_\delta^{n-2})$, что $\Omega \cap \mathcal{U}$ связно, то f' дает голоморфное продолжение f на $\Omega \cup \mathcal{U}$.

С помощью леммы 1 можно доказать лемму 2, а затем - лемму 3 и теорему 2 подобно тому, как это делается в [3] при получении упомянутого результата для упругих пространств.

Предположим теперь, что пространство Блоха M является аналитическим многообразием и, более того, неразветвленным накрытием над многообразием Штейна. Рассмотрев тождественное отображение многообразия M, которое, конечно, удовлетворяет всем условиям теоремы 2, мы в качестве следствия этой теоремы получаем следующее

Предложение. Если пространство Блоха является неразветвленным накрытием над многообразием Штейна, то оно само является многообразием Штейна.

Литература

[1] P. KIERNAN, S. KOBAYASHI: Holomorphic mappings into projective space with lacunary hyperplanes, Nagoya Math. J. 50(1973), 199-216.

[2] S. KOBAYASHI: Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, New York, 1970.

[3] H. FUJIMOTO: On holomorphic maps into a taut complex space, Nagoya Math. J. 46(1972), 49-61.

Механико-матем. факультет

Московского гос. универсутета

Чертановская 34-1-192

113 525 Москва, С С С Р

(Oblatum 4.11. 1975)