

I. A. Černjavskaĵa

Бесконечно малые изгибания первого и второго порядков поверхностей в пространстве Лобачевского

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 3, 399--424

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105636>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

И.А. ЧЕРНЯВСКАЯ, Ростов-на-Дону

Резюме: В работе исследуются бесконечно малые изгибания первого и второго порядков поверхностей в пространстве Лобачевского S_2 : введены аналоги векторов вращения и перемещение бесконечно малого изгибания поверхности; получен аналог интегральной формулы В. Вляшке; доказана жесткость второго порядка плоского аналитического желоба в пространстве Лобачевского.

Ключевые слова: Бесконечно малые изгибания, поверхность, пространство Лобачевского.

AMS: 53A05

Ref. Ž.: 3.934.14

Бесконечно малые изгибания первого порядка в пространствах постоянной кривизны рассматривали А.В. Погорелов [1], И. Я. Рябчикова [2], Г.Н. Габбов [3]. Основным методом, используемым в этих работах, является метод А.В. Погорелова, заключающийся в построении отображения поверхности F пространства постоянной кривизны на поверхность Φ евклидова пространства и установлении такого соответствия между изгибающими полями поверхности F и Φ , при котором они обе жестки, или обе нежестки.

Цель настоящей работы - построить теорию бесконечно малых изгибаний не только первого, но и второго порядка поверхностей пространства Лобачевского, являющуюся аналогом известной теории бесконечно малых изгибаний поверхностей в евклидо-

вом пространстве, [4]. Построенная теория применена для получения аналога интегральной теоремы Бляшке и доказательства жесткости первого и второго порядков некоторых типов поверхностей в пространстве Лобачевского.

п. 1 Пространство Лобачевского кривизны $\kappa = -\frac{1}{\kappa^2}$ будем рассматривать в виде гиперсферы 1S_3 мнимого радиуса $i\kappa$ с отождествленными диаметрально противоположными точками в пространстве Минковского 1R_4 , [6]; это дает возможность использовать векторный аппарат пространства 1R_4 . Приведем без доказательства те факты векторной алгебры пространства 1R_4 , которые будут использованы в дальнейшем. Введем в 1R_4 ортогональную систему координат $\{0, \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где \bar{e}_0 - вектор мнимой длины $i\kappa$; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - векторы длины κ . В работе [3] введены следующие операции:

скалярное произведение двух векторов

$$\bar{a} = \sum_{i=0}^3 a^i \bar{e}_i, \quad \bar{b} = \sum_{i=0}^3 b^i \bar{e}_i, \quad \text{где } \bar{a}, \bar{b} \text{ - векторы}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \kappa^2 (-a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3);$$

векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ трех векторов

$$\bar{a} = \sum_{i=0}^3 a^i \bar{e}_i, \quad \bar{b} = \sum_{i=0}^3 b^i \bar{e}_i, \quad \bar{c} = \sum_{i=0}^3 c^i \bar{e}_i \quad \text{где } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ - векторы}$$

$$\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] = \kappa^2 \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3 \\ -\bar{e}_0 & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{vmatrix},$$

смешанное произведение четырех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ есть число

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = \kappa^4 \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3 \\ d^0 & d^1 & d^2 & d^3 \end{vmatrix} .$$

Кроме этих операций введем еще следующие:

векторное произведение вектора $\bar{a} = \sum_{i=0}^3 a^i \bar{e}_i$ на вектор $\bar{b} = \sum_{i=0}^3 b^i \bar{e}_i$ есть бивектор $\bar{\bar{x}} = [\bar{a}, \bar{b}]$ с координатами x^{ij} , $i < j$; $i, j = 0, 1, 2, 3$:

$$x^{0i} = (-1)^i \begin{vmatrix} a^{\kappa} & a^l \\ b^{\kappa} & b^l \end{vmatrix} \quad x^{\kappa l} = (-1)^{\kappa+l-1} \begin{vmatrix} a^0 & a^i \\ b^0 & b^i \end{vmatrix} ,$$

где $\kappa < l$; $\kappa, l \neq 0, i$; $i, \kappa, l = 1, 2, 3$;

векторное произведение бивектора $\bar{\bar{x}}$ на вектор \bar{c} есть вектор $\bar{d} = \bar{\bar{x}} \times \bar{c}$ с координатами

$$d^i = (-1)^{i+1} \sum_{\substack{\kappa < l \\ \kappa, l \neq i}} (-1)^{\kappa+l} x^{\kappa l} c^m ,$$

где i, κ, l, m все различны и принимают значения 0, 1, 2, 3;

скалярное произведение двух бивекторов $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{\bar{w}}$ есть число

$$\bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{w}} = \kappa^4 \left(\sum_{i=1}^3 x^{0i} w^{0i} - \sum_{i < j} x^{ij} w^{ij} \right) ;$$

бивектор $\bar{\bar{x}}_*$, поляризованный относительно бивектора $\bar{\bar{x}}$, определяется равенствами

$$x_{*}^{0i} = (-1)^{i+1} x^{\kappa l} , \quad x_{*}^{\kappa l} = (-1)^i x^{0i} ,$$

где $i, \kappa, l = 1, 2, 3$; $\kappa < l$; $\kappa, l \neq i$.

Верны тождества:

$$I \quad [\bar{a}, \bar{b}] \cdot [\bar{c}, \bar{d}] = (\bar{a}, \bar{c}) \cdot (\bar{b}, \bar{d}) - (\bar{a}, \bar{d}) \cdot (\bar{b}, \bar{c})$$

$$II \quad [\bar{a}, \bar{b}]_* \cdot [\bar{c}, \bar{d}] = -(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

$$III \quad [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}] \cdot \bar{d} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

$$IV \quad [\bar{a}, \bar{b}] \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}, \bar{c})$$

$$V \quad [\bar{a}, \bar{b}]_* \times \bar{c} = -[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$$

$$VI \quad [\bar{a}, \bar{b}]_* \times [\bar{c}, \bar{d}, \bar{e}] = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} \\ (\bar{a}, \bar{c}) & (\bar{a}, \bar{d}) & (\bar{a}, \bar{e}) \\ (\bar{b}, \bar{c}) & (\bar{b}, \bar{d}) & (\bar{b}, \bar{e}) \end{vmatrix}$$

п. 2 Рассмотрим в 1S_3 поверхность F , заданную уравнением

$$(1) \quad \bar{x} = \bar{x}(\mu, \nu), \quad \bar{x}^2 = -\kappa^2, \quad (\mu, \nu) \in \mathcal{D},$$

где \mathcal{D} - односвязная область изменения параметров μ, ν . Будем предполагать, что функция $\bar{x}(\mu, \nu)$ трижды непрерывно дифференцируема в \mathcal{D} и в каждой точке ее

$$[\bar{x}, \bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu] \neq 0.$$

Пусть F подвергается бесконечно малой деформации

$$(2) \quad \bar{x}^*(\mu, \nu, t) = \rho \{ \bar{x}(\mu, \nu) + t \bar{z}(\mu, \nu) \}, \quad \bar{x}^{*2} = -\kappa^2, \quad t \rightarrow 0, \quad t > 0,$$

сохраняющей регулярность поверхности.

Деформация (2) называется бесконечно малым изгибанием первого порядка поверхности F , если длина любой дуги каждой спрямляемой кривой на F изменяется на величину второго порядка относительно $t \rightarrow 0$.

Как и в евклидовом пространстве можно получить основное уравнение бесконечно малых изгибаний:

$$(3) \quad d\bar{x} \cdot d\bar{x} = 0$$

эквивалентное системе уравнений в частных производных:

$$(4) \quad \bar{x}_\mu \cdot \bar{x}_\mu = 0, \quad \bar{x}_\mu \bar{x}_\nu + \bar{x}_\nu \cdot \bar{x}_\mu = 0, \quad \bar{x}_\nu \cdot \bar{x}_\nu = 0.$$

Дифференцируя по t тождество $\bar{x}^{\mu 2} = -\kappa^2$, получим при $t \rightarrow 0$

$$(5) \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = 0.$$

Теорема 1. Для поверхности $F: \bar{x} = \bar{x}(\mu, \nu)$ и данного на ней поля $\bar{x}(\mu, \nu)$ удовлетворяющего системе уравнений (4) и равенству (5), существует единственная пара полей $\bar{f}(\mu, \nu), \bar{\eta}(\mu, \nu), \bar{f}\bar{e}_0 = \bar{\eta}\bar{e}_0 = 0$ ¹⁾, тождественно удовлетворяющая система уравнений:

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x} \}, \\ \bar{x}_\mu = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\mu] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x}_\mu \}, \\ \bar{x}_\nu = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\nu] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x}_\nu \}. \end{cases}$$

Доказательство существования полей $\bar{f}, \bar{\eta}$.

Из (4), (5) следует, что $\bar{x} \perp \bar{x}, \bar{x}_\mu \perp \bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu \perp \bar{x}_\nu$ в каждой точке поверхности F , а потому, наверное, существуют три пары полей $\bar{f}_i, \bar{\eta}_i, i = 1, 2, 3$, такие, что

-
- 1) Условия $\bar{f}\bar{e}_0 = \bar{\eta}\bar{e}_0 = 0$ не нарушают общности рассуждений. Действительно, если существует пара полей $\bar{f}_1, \bar{\eta}_1$, удовлетворяющих, например, равенству $\bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}_1, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}_1] \times \bar{x} \}$, то разлагая векторы $\bar{f}_1, \bar{\eta}_1$, по базису: $\bar{f}_1 = f^0 \bar{e}_0 + \sum_1^3 f^i \bar{e}_i, \bar{\eta}_1 = \eta^0 \bar{e}_0 + \sum_1^3 \eta^i \bar{e}_i$ получим, что векторы $\bar{f} = \sum_1^3 f^i \bar{e}_i, \bar{\eta} = \sum_1^3 \eta^i \bar{e}_i$, для которых $\bar{f}\bar{e}_0 = \bar{\eta}\bar{e}_0 = 0$, также удовлетворяют уравнению $\bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x} \}.$

$$\begin{cases}
 (7) & \bar{x} = \frac{1}{x^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}_1, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}_1] \times x \} , \\
 (8) & \bar{x}_\mu = \frac{1}{x^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}_2, \bar{x}_\mu] - [\bar{e}_0, \bar{f}_2] \times x_\mu \} , \\
 (9) & \bar{x}_\nu = \frac{1}{x^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}_3, \bar{x}_\nu] - [\bar{e}_0, \bar{f}_3] \times x_\nu \} .
 \end{cases}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\bar{f}_i \bar{e}_0 = 0$, $\bar{\eta}_i \bar{e}_0 = 0$, $i = 1, 2, 3$. Подставив в (4₂) вместо векторов \bar{x}_μ , \bar{x}_ν их выражения из (8), (9) и воспользовавшись тождествами П, Ш, получим

$$(10) \{ ([\bar{e}_0, \bar{\eta}_3]_{\times} - [\bar{e}_0, \bar{\eta}_2]_{\times}) + ([\bar{e}_0, \bar{f}_3] - [\bar{e}_0, \bar{f}_2]) \} \cdot [\bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu] = 0 .$$

Рассмотрим в двумерной плоскости, определяемой векторами \bar{x}_μ , \bar{x}_ν , два вектора: $\bar{a}_1 \perp \bar{x}_\mu$, $\bar{a}_2 \perp \bar{x}_\nu$. В силу (10)

$$(11) \{ ([\bar{e}_0, \bar{\eta}_3]_{\times} - [\bar{e}_0, \bar{\eta}_2]_{\times}) + ([\bar{e}_0, \bar{f}_3] - [\bar{e}_0, \bar{f}_2]) \} \cdot [\bar{a}_1, \bar{a}_2] = 0 .$$

Введем в пространстве всех бивекторов из 1R_4 базис $\{ [\bar{x}, \bar{a}_1], [\bar{x}, \bar{a}_2], [\bar{x}, \bar{a}_3], [\bar{a}_1, \bar{a}_2], [\bar{a}_1, \bar{a}_3], [\bar{a}_2, \bar{a}_3] \}$, где

$$a_3 = \frac{[\bar{x}, \bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu]}{|[\bar{x}, \bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu]|} -$$

единичный вектор нормали поверхности F . В силу (11) имеет место разложение:

$$\begin{aligned}
 & ([\bar{e}_0, \bar{\eta}_3]_{\times} + [\bar{e}_0, \bar{f}_3]) - ([\bar{e}_0, \bar{\eta}_2]_{\times} + [\bar{e}_0, \bar{f}_2]) = A[\bar{x}, \bar{a}_1] + \\
 & + B[\bar{x}, \bar{a}_2] + C[\bar{x}, \bar{a}_3] + D[\bar{a}_1, \bar{a}_3] + E[\bar{a}_2, \bar{a}_3] .
 \end{aligned}$$

Введем бивектор:

$$\begin{aligned}
 & [\bar{e}_0, \bar{\eta}'_1]_{\times} + [\bar{e}_0, \bar{f}'_1] = [\bar{e}_0, \bar{\eta}_2]_{\times} + [\bar{e}_0, \bar{f}_2] + A[\bar{x}, \bar{a}_1] + \frac{1}{2} C[\bar{x}, \bar{a}_3] + \\
 & + D[\bar{a}_1, \bar{a}_3] = [\bar{e}_0, \bar{\eta}_3]_{\times} + [\bar{e}_0, \bar{f}_3] - B[\bar{x}, \bar{a}_2] - \frac{1}{2} C[\bar{x}, \bar{a}_3] - E[\bar{a}_2, \bar{a}_3] .
 \end{aligned}$$

Тогда

$$[\bar{e}_0, \bar{\eta}_2]_* + [\bar{e}_0, \bar{f}_2] = [\bar{e}_0, \bar{\eta}'_2]_* + [\bar{e}_0, \bar{f}'_2] - A[\bar{x}, \bar{a}_1] - \frac{1}{2} C[\bar{x}, \bar{a}_2] - \mathcal{D}[\bar{a}_1, \bar{a}_2],$$

$$[\bar{e}_0, \bar{\eta}_3]_* + [\bar{e}_0, \bar{f}_3] = [\bar{e}_0, \bar{\eta}'_3]_* + [\bar{e}_0, \bar{f}'_3] + B[\bar{x}, \bar{a}_2] + \frac{1}{2} C[\bar{x}, \bar{a}_3] + \mathcal{E}[\bar{a}_2, \bar{a}_3].$$

Подставляя эти выражения бивекторов $[\bar{e}_0, \bar{\eta}_i]_* + [\bar{e}_0, \bar{f}_i]$, $i = 1, 2$, в равенства (8), (9), получим

$$(12) \quad \bar{x}_\mu = \frac{1}{\kappa^2} \{ -[\bar{e}_0, \bar{\eta}'_1]_* \times \bar{x}_\mu - [\bar{e}_0, \bar{f}'_1] \times \bar{x}_\mu \},$$

$$(13) \quad \bar{x}_\nu = \frac{1}{\kappa^2} \{ -[\bar{e}_0, \bar{\eta}'_2]_* \times \bar{x}_\nu - [\bar{e}_0, \bar{f}'_2] \times \bar{x}_\nu \}.$$

Используя (7), (12), (13) и (5), как и выше, построим с помощью полей $\bar{\eta}'$, \bar{f}' , $\bar{\eta}_1$, \bar{f}_1 пару полей $\bar{f}(\mu, \nu)$, $\bar{\eta}(\mu, \nu)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1.

Доказательство единственности полей \bar{f} , $\bar{\eta}$.

Предположим, что кроме полей \bar{f} , $\bar{\eta}$, существует еще пара полей $\bar{f}''(\mu, \nu)$, $\bar{\eta}''(\mu, \nu)$, $\bar{f}''\bar{e}_0 = \bar{\eta}''\bar{e}_0 = 0$, удовлетворяющая системе уравнений (6). Тогда

$$(14) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta} - \bar{\eta}'', \bar{x}] + \bar{e}_0(\bar{f} - \bar{f}'', \bar{x}) - (\bar{f} - \bar{f}'')(\bar{e}_0, \bar{x}) = 0,$$

$$(15) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta} - \bar{\eta}'', \bar{x}_\mu] + \bar{e}_0(\bar{f} - \bar{f}'', \bar{x}_\mu) - (\bar{f} - \bar{f}'')(\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) = 0,$$

$$(16) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta} - \bar{\eta}'', \bar{x}_\nu] + \bar{e}_0(\bar{f} - \bar{f}'', \bar{x}_\nu) - (\bar{f} - \bar{f}'')(\bar{e}_0, \bar{x}_\nu) = 0.$$

Умножив равенства (14) - (16) скалярно на вектор \bar{e}_0 , получим

$$\langle \bar{f} - \bar{f}'', \bar{x} \rangle = 0, \langle \bar{f} - \bar{f}'', \bar{x}_\mu \rangle = 0, \langle \bar{f} - \bar{f}'', \bar{x}_\nu \rangle = 0,$$

откуда следует

$$(17) \quad \langle \bar{f} - \bar{f}'' \rangle = \alpha \bar{a}_3.$$

Умножая (17) скалярно на вектор \bar{e}_0 и учитывая, что $\bar{e}_0 \bar{a}_3 \equiv 0$ только в том случае, когда F - плоскость, проходящая через конец вектора \bar{e}_0 , можно, не нарушая общности, считать

$$\alpha \equiv 0,$$

следовательно:

$$\bar{\eta} \equiv \bar{\eta}'' ,$$

а теперь (14) - (16) дают

$$\bar{\eta} \equiv \bar{\eta}''$$

что и требовалось.

Теорема 2. В каждой точке поверхности $F: \bar{x} = \bar{x}(\mu, \nu)$, $\bar{x}^2 = -\kappa^2$, имеют место равенства

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{\eta}_\mu = \alpha \bar{x}_\mu - \beta \bar{x}_\nu - \frac{\alpha(\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) - \beta(\bar{e}_0, \bar{x}_\nu)}{\bar{e}_0 \bar{x}} \bar{x}, \\ \bar{\eta}_\nu = \gamma \bar{x}_\mu - \alpha \bar{x}_\nu - \frac{\gamma(\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) - \alpha(\bar{e}_0, \bar{x}_\nu)}{\bar{e}_0 \bar{x}} \bar{x}. \end{cases}$$

где α, β, γ - некоторые функции от μ, ν .

Дифференцируя (6₂) по ν , а (6₃) по μ и учитывая, что $\bar{x}_{\mu\nu} = \bar{x}_{\nu\mu}$, получим

$$(19) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu, \bar{x}_\mu] + \bar{e}_0(\bar{x}_\mu, \bar{f}_\nu) - \bar{f}_\nu(\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) = [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu, \bar{x}_\nu] + \bar{e}_0(\bar{x}_\nu, \bar{f}_\mu) - \bar{f}_\mu(\bar{e}_0, \bar{x}_\nu).$$

Умножая скалярно равенство (19) на вектор \bar{e}_0 , получим

$$(20) \quad \bar{x}_\mu \bar{f}_\nu = \bar{x}_\nu \bar{f}_\mu.$$

Дифференцируя (6₁) по μ , а затем по ν и сравнивая результаты с (6₂), (6₃), убедимся, что

$$(21) \quad \bar{f}_\mu = \frac{1}{\bar{e}_0 \bar{x}} [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu, \bar{x}], \quad \bar{f}_\nu = \frac{1}{\bar{e}_0 \bar{x}} [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu, \bar{x}].$$

Учитывая (20), (21), запишем (19) в виде:

$$(22) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu, \bar{x}_\mu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}] = [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu, \bar{x}_\nu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}] .$$

Из (22) следует:

$$(23) \quad \begin{cases} \bar{\eta}_\mu = \alpha (\bar{x}_\mu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) - \beta (\bar{x}_\nu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) + \lambda \bar{e}_0 , \\ \bar{\eta}_\nu = \gamma (\bar{x}_\mu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) - \sigma (\bar{x}_\nu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) + \mu \bar{e}_0 . \end{cases}$$

Так как $\bar{\eta} \bar{e}_0 = 0$, то $\lambda = \mu = 0$. Подставляя выражения векторов $\bar{\eta}_\mu$, $\bar{\eta}_\nu$ из (23) в (22), получим $\alpha = \sigma$, следовательно, формулы (23) принимают вид (18). Теорема доказана.

Найдем систему уравнений, определяющую функции α , β , γ . Как и в [1], можно получить формулы Гаусса для поверхности $\bar{x} = \bar{x}(\mu, \nu)$, $\bar{x}^2 = -\kappa^2$:

$$(24) \quad \begin{cases} \bar{x}_{\mu\mu} = \Gamma_{11}^1 \bar{x}_\mu + \Gamma_{11}^2 \bar{x}_\nu + \frac{\mathcal{E}}{\kappa^2} \bar{x} + \mathcal{L} \bar{a}_3 , \\ \bar{x}_{\mu\nu} = \Gamma_{12}^1 \bar{x}_\mu + \Gamma_{12}^2 \bar{x}_\nu + \frac{\mathcal{F}}{\kappa^2} \bar{x} + \mathcal{M} \bar{a}_3 , \\ \bar{x}_{\nu\nu} = \Gamma_{22}^1 \bar{x}_\mu + \Gamma_{22}^2 \bar{x}_\nu + \frac{\mathcal{G}}{\kappa^2} \bar{x} + \mathcal{N} \bar{a}_3 , \end{cases}$$

где \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} ; \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} - соответственно коэффициенты первой и второй основных форм поверхности; $\Gamma_{j^i k^l}^i$ - ее символы Кристоффеля.

Дифференцируя (18₁) по ν , а (18₂) по μ , учитывая, что $\bar{\eta}_{\mu\nu} = \bar{\eta}_{\nu\mu}$, и используя (24) и линейную независимость векторов \bar{x} , \bar{x}_μ , \bar{x}_ν , \bar{a}_3 , получим:

$$(25) \quad \begin{cases} \alpha_\nu - \gamma_\mu = \gamma \Gamma_{11}^1 - 2\alpha \Gamma_{12}^1 + \beta \Gamma_{22}^1 - \{ \gamma (\frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) - \alpha (\frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) \} , \\ \alpha_\mu - \beta_\nu = \gamma \Gamma_{11}^2 - 2\alpha \Gamma_{12}^2 + \beta \Gamma_{22}^2 - \{ \alpha (\frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) - \beta (\frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}) \} , \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{E}\gamma + 2F\alpha - G\beta + \kappa^2 \{ \gamma \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}} \right) - \alpha \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}} \right) \}_{,\mu} - \\ - \kappa^2 \{ \alpha \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}} \right) - \beta \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}} \right) \}_{,\nu} = 0. \end{array} \right.$$

Можно показать, что (25₄) есть следствие равенств (25₁₋₃).

Если ввести новые функции

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\bar{\mathcal{E}}_0 \bar{x}},$$

то системе (25) можно придать привычный вид [4]:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_{,\nu} - \tilde{\gamma}_{,\mu} = \tilde{\gamma} \Gamma_{11}^1 - 2\tilde{\alpha} \Gamma_{12}^1 + \tilde{\beta} \Gamma_{22}^1, \\ \tilde{\alpha}_{,\mu} - \tilde{\beta}_{,\nu} = \tilde{\gamma} \Gamma_{11}^2 - 2\tilde{\alpha} \Gamma_{12}^2 + \tilde{\beta} \Gamma_{22}^2, \\ \tilde{\gamma} \mathcal{L} - 2\tilde{\alpha} M + \tilde{\beta} N = 0. \end{array} \right.$$

Система уравнений (26) является аналогом основной системы уравнений теории бесконечно малых изгибаний первого порядка поверхностей евклидова пространства [4]. Если будет найдено решение $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ системы (26), то подставляя эти функции в (18), (21), получим уравнения в полных дифференциалах для определения полей $\bar{\xi}(\mu, \nu)$, $\bar{\eta}(\mu, \nu)$, которые в силу односвязности поверхности F будут найдены однозначно. Затем из уравнения

$$d\bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\xi}] \times d\bar{x} \}$$

однозначно найдем поле $\bar{x}(\mu, \nu)$ и тем самым - бесконечно малое изгибание поверхности.

Система (26) всегда имеет тривиальное решение $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = 0$, которому отвечают поля $\bar{\xi} = \text{const}$, $\bar{\eta} = \text{const}$. Можно показать, что в пространстве 1S_3 поле

$$\bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\xi}] \times \bar{x} \},$$

где $\bar{\eta} = \text{const}$, $\bar{\xi} = \text{const}$, есть поле бесконечно малого дви-

жения поверхности $\bar{x}(\mu, \nu)$. Такие изгибания поверхности назовем тривиальными.

Поверхность, не допускающую никаких бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных, назовем жесткой.

п. 3 Теперь не трудно построить аналог интегральной формулы В. Вляшке [4],[7], при помощи которого во многих случаях устанавливает жесткость поверхностей.

Используя (22), можно убедиться в справедливости тождества:

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}_\nu, \bar{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \nu} (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}_\mu, \bar{\eta}) = -2 (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}_\mu, \bar{\eta}_\nu).$$

Полагая теперь в формуле Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu} - \frac{\partial P}{\partial \nu} \right) d\mu d\nu = \oint_{\partial D} (P d\mu + Q d\nu)$$

$$Q = (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}_\nu, \bar{\eta}), \quad P = (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}_\mu, \bar{\eta})$$

и учитывая (27), найдем:

$$(28) \quad 2 \iint_D (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}_\mu, \bar{\eta}_\nu) d\mu d\nu = \oint_{\partial D} (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}, d\bar{\eta}).$$

Используя уравнения (23), можно формуле (28) придать вид:

$$(29) \quad -2\kappa \iint_D (\beta \gamma - \alpha^2) \frac{\bar{e}_0 a_2}{\bar{e}_0 \bar{x}} d\sigma = \oint_{\partial D} (\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}, d\bar{\eta}).$$

Это и есть аналог формулы В. Вляшке.

п. 4 Применим формулу В. Вляшке к доказательству жесткости некоторых поверхностей в пространстве 1S_3 .

Рассмотрим в 1S_3 геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой ℓ . Такая поверхность называется эквидистантной

"бочкой", а прямая ℓ - ее ось, зададим ось "бочки" уравнением

$$(30) \quad \bar{X}(s) = \bar{e}_0 \operatorname{ch} s + \bar{e}_2 \operatorname{sh} s$$

Через каждую точку $\bar{X}(b)$ оси проведем плоскость, перпендикулярную оси:

$$(31) \quad \bar{Y}(\mu, \nu) = \bar{X}(b) \operatorname{ch} \mu + (\bar{e}_1 \cos \nu + \bar{e}_2 \sin \nu) \operatorname{sh} \mu,$$

(здесь μ имеет простой геометрический смысл - расстояние точки (μ, ν) от торки $\bar{X}(b)$) и в каждой такой плоскости рассмотрим множество точек, отстоящих от точки $\bar{X}(b)$ на данном расстоянии h , тогда, полагая в (31) $\mu = h$, получим уравнение эквидистантной "бочки":

$$(32) \quad \bar{Y}(b, \nu) = (\bar{e}_0 \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b) \operatorname{ch} h + (\bar{e}_1 \cos \nu + \bar{e}_2 \sin \nu) \operatorname{sh} h.$$

Рассмотрим в 1S_3 выпуклую поверхность F с краем ∂F , представляющим собой окружность, лежащую на эквидистантной "бочке". Не нарушая общности, будем считать, что эта окружность имеет центр в конце вектора \bar{e}_0 . Верна

Теорема: Поверхность F , с $K > 0$ (K - внешняя кривизна), не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний первого порядка, при которых ее край ∂F скользит по эквидистантной "бочке".

Доказательство. Без нарушения общности рассуждений можно считать, что ∂F определяется уравнением $\mu = 0$, тогда вдоль ∂F :

$$(33) \quad \bar{x}(0, \nu) = \bar{Y}(0, \nu) = \bar{e}_0 \operatorname{ch} h + (\bar{e}_1 \cos \nu + \bar{e}_2 \sin \nu) \operatorname{sh} h.$$

Можно показать, используя основные соотношения для сторон трипрямоугольника, [8], что в 1S_3 расстояние h точки $\bar{x}(0, \nu)$ края ∂F до оси (30) эквидистантной "бочки" находится из равенства:

$$h^2 \operatorname{ch} \frac{h}{\kappa} = \sqrt{(\bar{e}_0, \bar{x})^2 - (\bar{e}_3, \bar{x})^2}$$

Так как по условию теоремы каждая точка $\bar{x}(0, \nu)$ края ∂F переходит в точку $\bar{x}^*(0, \nu, t)$ деформированной поверхности, которая также должна лежать на эквидистантной "бочке", то

$$(34) \quad \sqrt{(\bar{e}_0, \bar{x}^*)^2 - (\bar{e}_3, \bar{x}^*)^2} = \kappa^2 \operatorname{ch} \frac{h}{\kappa} = \operatorname{const} .$$

Дифференцируя (34) по параметру деформации t , получим при $t \rightarrow 0$ вдоль ∂F :

$$(\bar{e}_0, \bar{x})(\bar{e}_0, \bar{x}) - (\bar{e}_3, \bar{x})(\bar{e}_3, \bar{x}) = 0 .$$

Вдоль ∂F , как это следует из (33), $(\bar{e}_3, \bar{x}) = 0$, поэтому

$$(\bar{e}_0, \bar{x})(\bar{e}_0, \bar{x}) / \partial F = 0 .$$

И, так как $(\bar{e}_0, \bar{x}) < 0$, то

$$(35) \quad (\bar{e}_0, \bar{x}) / \partial F = 0 .$$

Подставив в (35) вместо \bar{x} его выражение из (6), получим

$$(36) \quad (\bar{f}, \bar{x}) / \partial F = 0 .$$

Если учесть, что $\bar{f} \bar{e}_0 = 0$ и (33), то (36) дает:

$$(37) \quad ((\bar{f}, \bar{e}_1) \cos \nu + (\bar{f}, \bar{e}_2) \sin \nu) / \partial F = 0 .$$

Дифференцируя (36) по ν два раза и используя (21₂), получаем:

$$(38) \quad (\bar{f}, \bar{x}_{\nu\nu}) / \partial F = 0, \quad (\bar{f}_{\nu}, \bar{x}_{\nu}) / \partial F + (\bar{f}, \bar{x}_{\nu\nu}) / \partial F = 0 .$$

Из (33) следует

$$\bar{x}_{\nu\nu} / \partial F = (-\bar{e}_1 \cos \nu - \bar{e}_2 \sin \nu) \operatorname{sh} h ,$$

поэтому в силу (37) имеем:

$$(\bar{f}, \bar{x}_{\nu\nu}) / \partial F = 0 .$$

Теперь (38₂) принимает вид:

$$(39) \quad (\bar{F}_v, \bar{x}_{vv}) / \partial F = 0 .$$

Если подставим в (39) вместо \bar{F}_v его выражение из (21₂) и воспользуемся равенством (18₂), то получим:

$$(\bar{e}_0, \gamma \bar{x}_u - \alpha \bar{x}_v - \frac{\gamma(\bar{e}_0 \bar{x}_u) - \alpha(\bar{e}_0 \bar{x}_v)}{\bar{e}_0 \bar{x}} \bar{x}, \bar{x}, \bar{x}_v) / \partial F = 0$$

или

$$(40) \quad \gamma(\bar{e}_0, \bar{a}_3) / \partial F = 0 .$$

Так как $(\bar{e}_0, \bar{a}_3) \neq 0$ на F , то из (40) следует

$$(41) \quad \gamma / \partial F = 0 .$$

Применим к поверхности F формулу (29). В силу (21₂), (18₂), (36), (38₁) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\partial F}(\bar{e}_0, \frac{\bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}}, \bar{\eta}, d\bar{\eta}) &= \frac{\Phi}{\partial F} d\bar{F} \cdot \bar{\eta} = - \frac{\Phi}{\partial F} \bar{F} \cdot d\bar{\eta} = \\ &= - \frac{\Phi}{\partial F} \bar{F} (\gamma \bar{x}_u - \alpha \bar{x}_v - \frac{\gamma(\bar{e}_0 \bar{x}_u) - \alpha(\bar{e}_0 \bar{x}_v)}{\bar{e}_0 \bar{x}} \bar{x}) d\nu = 0 . \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\iint_F (\beta\gamma - \alpha^2) \frac{\bar{e}_0 \bar{a}_3}{\bar{e}_0 \bar{x}} d\sigma = 0 .$$

По условию теоремы всюду на F $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mu^2 > 0$; как и в евклидовом пространстве, верна лемма [7]: если $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 > 0$ и $\mathcal{L}\gamma - 2\mathcal{M}\alpha + \mathcal{N}\beta = 0$, то $\beta\gamma - \alpha^2 \leq 0$, причем $\beta\gamma - \alpha^2 = 0$ лишь в случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Если предположить, что \bar{a}_3 - единичный вектор внешней нормали поверхности F , то $(\bar{e}_0, \bar{a}_3) = \kappa \sin \frac{d}{\kappa} > 0$, [6], где d - расстояние конца вектора \bar{e}_0 от касательной плоскости к поверхности F в точке с вектором нормали \bar{a}_3 . Учитывая сказанное и то, что $(\bar{e}_0, \bar{x}) < 0$ всюду на F , [6], заключаем из (42):

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

а это означает жесткость поверхности F .

Используя формулу (29), можно доказать жесткость регулярных овалов в 1S_3 ; жесткость шпалочки с произвольным гладким краем относительно изгибаний обобщенного скольжения; жесткость выпуклых поверхностей с краем, вдоль которого поперечная полоса лежит на сфере и ряд других теорем.

Замечание. Если $\kappa \rightarrow \infty$, то пространство 1S_3 превратится в евклидово, уравнения (6) перейдут в известные основные уравнения теории бесконечно малых изгибаний в евклидовом пространстве [4], а формула (29) - в известную формулу В. Бляшке [7].

п. 5 Рассмотрим односвязную регулярную поверхность

$$\bar{x} = \bar{x}(\mu, \nu), \quad \bar{x}^2 = -\kappa^2, \quad (\mu, \nu) \in \mathcal{D}$$

и ее деформации второго порядка:

$$(43) \quad \bar{x}^*(\mu, \nu, t) = \varphi \{ \bar{x}(\mu, \nu) + 2t\bar{z}(\mu, \nu) + 2t^2\bar{w}(\mu, \nu) \}, \\ \bar{x}^{*2} = -\kappa^2, \quad t > 0, \quad t \rightarrow 0,$$

где функции $\bar{z}(\mu, \nu), \bar{w}(\mu, \nu)$ предполагаются также трижды непрерывно дифференцируемыми в области \mathcal{D} .

Деформацию (43) назовем бесконечно малым изгибанием второго порядка поверхности F , если длина любой дуги каждой спрямляемой кривой на F изменяется на величину третьего порядка относительно $t \rightarrow 0$.

Как и в евклидовом пространстве, можно получить основную систему уравнений теории бесконечно малых изгибаний второго порядка:

$$(44) \quad d\bar{x} \cdot d\bar{x} = 0, \quad d\bar{x} \cdot d\bar{w} + d\bar{z}^2 = 0.$$

Так как $\bar{x}^{*2} = -\kappa^2$, то

$$(45) \quad \bar{x} \bar{x} = 0, \quad \bar{x} \bar{w} + \bar{x}^2 = 0.$$

Теорема 3. Для поверхности $\bar{x} = \bar{x}(\mu, \nu)$ и данных на ней полей $\bar{x}(\mu, \nu)$, $\bar{w}(\mu, \nu)$, удовлетворяющих системам уравнений (44) и (45), существуют единственные две пары полей

$$\bar{f}(\mu, \nu), \bar{\eta}(\mu, \nu), \bar{f}^*(\mu, \nu), \bar{f} \bar{e}_0 = \bar{\eta} \bar{e}_0 = \bar{f}^* \bar{e}_0 = \\ = \bar{\eta}^* \bar{e}_0 = 0, \quad \text{тождественно удовлетворяющие системам уравнений:}$$

$$(46) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x} \}, \\ d\bar{x} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, d\bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times d\bar{x} \}, \end{cases}$$

$$(47) \quad \begin{cases} \bar{w} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x} + [\bar{e}_0, \bar{\eta}^*, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}^*] \times \bar{x} \}, \\ d\bar{w} = \frac{1}{\kappa^2} \{ [\bar{e}_0, \bar{\eta}, d\bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times d\bar{x} + [\bar{e}_0, \bar{\eta}^* d\bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}^*] \times d\bar{x} \}. \end{cases}$$

Используя (44₁), (45₁), как и в теореме 1, можно доказать существование единственной пары полей $\bar{f}(\mu, \nu)$, $\bar{\eta}(\mu, \nu)$, $\bar{f} \bar{e}_0 = 0$, $\bar{\eta} \bar{e}_0 = 0$, удовлетворяющей системе уравнений (46). После этого, равенства (44₂), (45₂), можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{ \bar{w} - \frac{1}{\kappa^2} ([\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x}) \} \times \bar{x} &= 0, \\ \{ \bar{w}_\mu - \frac{1}{\kappa^2} ([\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\mu] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x}_\mu) \} \times \bar{x}_\mu &= 0, \\ \{ \bar{w}_\nu - \frac{1}{\kappa^2} ([\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\nu] - [\bar{e}_0, \bar{f}] \times \bar{x}_\nu) \} \times \bar{x}_\nu &= 0. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, точно так же, как и в теореме 1, построим пару полей $\bar{f}^*(\mu, \nu)$, $\bar{\eta}^*(\mu, \nu)$, удовлетворяющую (47), и докажем ее единственность.

Рассуждая, как в п. 2, получим для поля $\bar{\eta}$ равенства (18) и систему уравнений (26). Для стискивания $\bar{\eta}^*$ заметим,

что из (47₂) в силу $\bar{w}_{\mu\nu} = \bar{w}_{\nu\mu}$ следует

$$(48) \quad \frac{1}{\kappa^2} [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\mu]] - [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu, \bar{\xi}] \frac{e_0 \bar{x}_\mu}{\kappa^2} + [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu^*, \bar{x}_\mu] - \\ - \bar{\xi}_\nu (\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) - \bar{\xi}_\nu^* (\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) = \frac{1}{\kappa^2} [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\nu]] - \\ - [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu, \bar{\xi}] \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\kappa^2} + [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu^*, \bar{x}_\nu] - \bar{\xi}_\mu (\bar{e}_0, \bar{x}_\nu) - \bar{\xi}_\mu^* (\bar{e}_0, \bar{x}_\nu).$$

Используя (18) и тождества 1, У1, можно проверить справедливость следующих равенств:

$$(49) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\nu]] = [\bar{e}_0, \bar{x}_\nu, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{\eta}_\mu]] + \\ + \alpha (\bar{e}_0 [\bar{e}_0, \bar{\eta}] \cdot [\bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu] - [\bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu] \times \bar{\eta}) + \\ + \frac{\alpha (\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) - \beta (\bar{e}_0, \bar{x}_\nu)}{\bar{e}_0 \bar{x}} (\bar{e}_0 [\bar{e}_0, \bar{\eta}] \cdot [\bar{x}_\nu, \bar{x}] - [\bar{x}_\nu, \bar{x}] \times \bar{\eta}),$$

$$(50) \quad [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{x}_\mu]] = [\bar{e}_0, \bar{x}_\mu, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{\eta}_\nu]] + \\ + \alpha (\bar{e}_0 [\bar{e}_0, \bar{\eta}] \cdot [\bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu] - [\bar{x}_\mu, \bar{x}_\nu] \times \bar{\eta}) + \\ + \frac{\gamma (\bar{e}_0, \bar{x}_\mu) - \alpha (\bar{e}_0, \bar{x}_\nu)}{\bar{e}_0 \bar{x}} (\bar{e}_0 [\bar{e}_0, \bar{\eta}] \cdot [\bar{x}_\mu, \bar{x}] - [\bar{x}_\mu, \bar{x}] \times \bar{\eta}).$$

Учитывая равенства (49), (50), и выполняя довольно громоздкие тождественные преобразования, запишем (48) в виде:

$$(51) \quad \frac{1}{\kappa^2} [\bar{e}_0, \bar{x}_\mu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{\eta}_\nu]] + i \gamma \left(\frac{\bar{e}_0 \bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}} \right) - \\ - \alpha \left(\frac{\bar{e}_0 \bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}} \right)_\nu \left\{ [\bar{e}_0, \bar{x}, \bar{x}_\mu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}] + [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\nu^*, \bar{x}_\mu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\mu}{\bar{e}_0 \bar{x}}] \right\} = \\ = \frac{1}{\kappa^2} [\bar{e}_0, \bar{x}_\nu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}, [\bar{e}_0, \bar{\eta}, \bar{\eta}_\mu]] + i \alpha \left(\frac{\bar{e}_0 \bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}} \right)_\mu - \\ - \beta \left(\frac{\bar{e}_0 \bar{x}}{\bar{e}_0 \bar{x}} \right)_\nu \left\{ [\bar{e}_0, \bar{x}, \bar{x}_\nu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}] + [\bar{e}_0, \bar{\eta}_\mu^*, \bar{x}_\nu - \bar{x} \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_\nu}{\bar{e}_0 \bar{x}}] \right\}.$$

Из (51) следует:

$$(52) \begin{cases} \bar{\eta}_{\mu}^* = \frac{1}{\kappa^2} [\bar{\epsilon}_0, \bar{\eta}, \bar{\eta}_{\mu}] + \lambda \bar{x}_{\mu} - \mu \bar{x}_r + \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} - \lambda \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}_{\mu}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} + \mu \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}_r}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right) \bar{x} + \sigma_1 \bar{\epsilon}_0, \\ \bar{\eta}_r^* = \frac{1}{\kappa^2} [\bar{\epsilon}_0, \bar{\eta}, \bar{\eta}_r] + \nu \bar{x}_{\mu} - \lambda \bar{x}_r + \left(\frac{\sigma_2}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} - \nu \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}_{\mu}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} + \lambda \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}_r}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right) \bar{x} + \sigma_2 \bar{\epsilon}_0 \end{cases}$$

где

$$\sigma_1 = - \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\kappa^2} \left(\alpha \left(\frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right)_{\mu} - \beta \left(\frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right)_r \right),$$

$$\sigma_2 = - \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\kappa^2} \left(\gamma \left(\frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right)_{\mu} - \alpha \left(\frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right)_r \right).$$

Используя $\bar{\eta}_{\mu r}^* = \bar{\eta}_{r \mu}^*$ и формулы Гаусса (24), в силу линейной независимости векторов \bar{x} , \bar{x}_{μ} , \bar{x}_r , \bar{a}_3 , получим:

$$(53) \begin{cases} \bar{\lambda}_r - \bar{\mu}_{\mu} = \bar{\nu} \Gamma_1^1 - 2 \bar{\lambda} \Gamma_{12}^1 + \bar{\mu} \Gamma_{22}^1, \\ \bar{\lambda}_{\mu} - \bar{\mu}_r = \bar{\nu} \Gamma_{11}^2 - 2 \bar{\lambda} \Gamma_{12}^2 + \bar{\mu} \Gamma_{22}^2, \\ \bar{\nu} \mathcal{L} - 2 \bar{\lambda} \mathcal{M} + \bar{\mu} \mathcal{N} - 2 \frac{\kappa}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} (\beta \gamma - \alpha^2) \sqrt{\epsilon \mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = 0, \end{cases}$$

где

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \left(\lambda - \alpha \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right), \quad \bar{\mu} = \frac{1}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \left(\mu - \beta \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right), \quad \bar{\nu} = \frac{1}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \left(\nu - \gamma \frac{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}}{\bar{\epsilon}_0 \bar{x}} \right).$$

Система уравнений (26), (53) есть аналог известной системы уравнений теории бесконечно малых изгибаний второго порядка поверхностей евклидова пространства [4].

Как и в евклидовом пространстве, изгибания F второго порядка называем тривиальными, если тривиально хотя бы только одно поле $\mathcal{X}(\mu, r)$. Поверхность F , не допускающую никаких бесконечно малых изгибаний второго порядка, кроме тривиальных, называем поверхностью, обладающей жесткостью второго порядка.

Заметим, что, если $\kappa \rightarrow \infty$, то пространство ${}^1 S_3$ превратится в евклидово пространство, а уравнения (46), (47), пе-

рейдут в известные основные уравнения теории бесконечно малых изгибаний второго порядка поверхностей евклидова пространства, [4].

п. 4 Применим изложенную выше теорию к доказательству жесткости второго порядка плоского аналитического желоба в пространстве 1S_3 .

Плоским желобом G в 1S_3 назовем поверхность, удовлетворяющую условиям:

1) G содержит плоскую замкнутую выпуклую кривую C кривизны $\kappa > 0$, 2) G расположена по одну сторону от плоскости кривой C и имеет в каждой точке кривой C с этой плоскостью касание первого порядка. Верна

Теорема: Плоский аналитический желоб G : обладает жесткостью второго порядка относительно аналитических бесконечно малых изгибаний.

Эта теорема есть аналог известной теоремы Рембса [9].

Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Выберем в 1R_4 систему координат так, чтобы плоскость

$$\bar{X} = \varphi (\bar{e}_0 + \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2), \quad \bar{X}^2 = -\kappa^2$$

совпала с плоскостью кривой C и конец вектора \bar{e}_0 находился внутри кривой C . Внутренние координаты u, v на желобе G введем так, чтобы кривая C определялась уравнением $u = 0$.

Предположим, что G допускает бесконечно малые изгибания второго порядка, определяемые полями $\bar{x}(u, v), \bar{w}(u, v)$. Пусть $\bar{f}, \bar{\eta}, \bar{f}^*, \bar{\eta}^*$ - поля, соответствующие \bar{x} и \bar{w} по равенствам (46), (47). Покажем, что $\bar{\eta} = const$. Согласно

определению, данному в п. 3, это будет означать жесткость второго порядка желоба G_2 .

По определению желоба единичный вектор \bar{a}_3 нормали желоба вдоль кривой C можно считать совпадающим с вектором \bar{N} нормали плоскости (54):

$$(55) \quad \bar{a}_3 / c = \bar{N} = \frac{[\bar{X}, \bar{X}_\alpha, \bar{X}_\beta]}{|[\bar{X}, \bar{X}_\alpha, \bar{X}_\beta]|} = \frac{\bar{e}_3}{\kappa}$$

Следовательно вдоль кривой C :

$$(56) \quad \bar{e}_3 \bar{x} = 0, \quad \bar{e}_3 \bar{x}_\mu = 0, \quad \bar{e}_3 \bar{x}_\nu = 0.$$

Рассмотрим уравнение (52₂). Умножим обе части его скалярно на вектор \bar{e}_3 . В силу (56) вдоль кривой C получим:

$$\bar{\eta}_\nu^* \bar{e}_3 = \frac{1}{\kappa^2} [\bar{e}_0 \bar{\eta} \bar{\eta}_\nu] \cdot \bar{e}_3.$$

Откуда следует:

$$(57) \quad \bar{e}_3 \oint_c [\bar{e}_0 \bar{\eta} \bar{\eta}_\nu] d\nu = \kappa^2 \oint_c (\bar{e}_3 \bar{\eta}^*) = 0.$$

2. Коэффициенты \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{N} второй основной формы желоба G_2 вдоль линии C , учитывая (55) можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{e}_3 \bar{x}_{\mu\mu}}{\kappa}, \quad \mathcal{M} = \frac{\bar{e}_3 \bar{x}_{\mu\nu}}{\kappa}, \quad \mathcal{N} = \frac{\bar{e}_3 \bar{x}_{\nu\nu}}{\kappa}.$$

В силу (56)

$$(58) \quad \mathcal{M}/c = 0, \quad \mathcal{N}/c = 0$$

но $\mathcal{L}/c \neq 0$ так как иначе желоб G_2 имел бы с плоскостью кривой C касание выше первого порядка. Из уравнения (26₃):

$$\mathcal{L}\gamma - 2\mathcal{M}\alpha + \mathcal{N}\beta = 0$$

с учетом (58) получим

$$(59) \quad \gamma/c = 0$$

поэтому уравнение (18₂) принимает вид:

$$(60) \quad \bar{\eta}_v/c = (-\alpha \bar{x}_v + \alpha \frac{\bar{e}_0 \bar{x}_v}{\bar{e}_0 \bar{x}} \bar{x})/c = -\alpha \frac{(\bar{e}_0 \bar{x})}{\kappa} \left(\frac{\kappa^2 \bar{x} + \bar{e}_0 (\bar{e}_0 \bar{x})}{\kappa (\bar{e}_0 \bar{x})} \right)_v / c$$

или

$$(61) \quad d\bar{\eta}/c = -\alpha \frac{(\bar{e}_0 \bar{x})}{\kappa} d \left(\frac{\kappa^2 \bar{x} + \bar{e}_0 (\bar{e}_0 \bar{x})}{\kappa (\bar{e}_0 \bar{x})} \right) / c$$

3. Покажем, что вдоль кривой C $\bar{\eta} = const$. С этой целью переведем поверхность \tilde{G} погореловским отображением [31]:

$$(62) \quad \bar{\eta}' = \frac{\kappa^2 \bar{x} + \bar{e}_0 (\bar{e}_0 \bar{x})}{\kappa (\bar{e}_0 \bar{x})}$$

В поверхности \tilde{G} евклидова пространства E_0 ($\alpha^0 = 0$). При этом кривая C перейдет в замкнутую, выпуклую, плоскую кривую \tilde{C} , лежащую на \tilde{G} [31], и содержащую внутри себя начало координат пространства E_0 - образ конца вектора \bar{e}_0 при отображении (62). Известно, [31], что всякое поле $\bar{x}(\mu, \nu)$ в 1S_3 удовлетворяющее равенствам

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x} = 0, \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = 0$$

отображением

$$(63) \quad \bar{\xi} = \frac{\kappa^2 \bar{x} + \bar{e}_0 (\bar{e}_0 \bar{x})}{\bar{e}_0 \bar{x}}$$

переводится в поле $\bar{\xi}(\mu, \nu)$ пространства E_0 , удовлетворяющее в каждой точке поверхности \tilde{G} условию:

$$d\bar{\eta}' \cdot d\bar{\xi} = 0$$

Из (63) следует

$$(64) \quad \bar{\xi} = [\bar{\eta} \cdot \bar{y}] - \bar{\xi}, \quad d\bar{\xi} = [\bar{\eta}, d\bar{y}] ,$$

где $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ - те же самые векторы, что в (46).

В силу (62) равенство (61) принимает вид:

$$(65) \quad d\bar{\eta}/\bar{c} = (\tilde{\alpha} d\bar{y})/\bar{c} ,$$

где

$$\alpha = -\alpha \frac{\bar{e}_0 \bar{x}}{\kappa} .$$

Таким образом, если точка $(0, \nu)$ пробегает кривую \tilde{C} , то конец вектора $\bar{\eta}(0, \nu)$ опишет в пространстве E_0 кривую \tilde{C}' , которая в силу (65) замкнута, выпукла и лежит в плоскости кривой \tilde{C} . Рассмотрим в евклидовом пространстве E_0 кривую $\tilde{\Gamma}$:

$$(66) \quad \bar{\omega} = \bar{y}(0, \nu) + \varepsilon \bar{\eta}(0, \nu) ,$$

где ε - достаточно малое постоянное число. Кривая $\tilde{\Gamma}$ будет также замкнутой, выпуклой. В силу (66) касательные к линиям $\tilde{C}, \tilde{C}', \tilde{\Gamma}$ в соответствующих точках параллельны. Известно, что смешанная площадь областей, ограниченных кривыми \tilde{C} и $\tilde{\Gamma}$, удовлетворяет неравенству Брунна-Минковского, [5]:

$$(67) \quad \mathcal{J}(\bar{y}, \bar{\omega}) \geq \sqrt{\mathcal{J}(\bar{y}, \bar{y}) \cdot \mathcal{J}(\bar{\omega}, \bar{\omega})} ,$$

где

$$\mathcal{J}(\bar{y}, \bar{\omega}) = -\frac{\bar{e}_2}{2\kappa} \Phi[\bar{y}, d\bar{\omega}] ,$$

$$\mathcal{J}(\bar{y}, \bar{y}) = -\frac{\bar{e}_2}{2\kappa} \Phi[\bar{y}, d\bar{y}] ,$$

$$\mathcal{J}(\bar{\omega}, \bar{\omega}) = -\frac{\bar{e}_2}{2\kappa} \Phi[\bar{\omega}, d\bar{\omega}] .$$

Используя (57), (64), (64₂), можно показать, что в (67) имеет место равенство, а это значит, [5], что кривые \tilde{C} и \tilde{C}' гомотетичны. Так как точку O внутри кривой \tilde{C} можно выбирать произвольно, то кривая \tilde{C}' вырождается в точку, а это значит

$$\bar{\eta}(0, r)/\tilde{c} = const.$$

Из (65), (61) следует, что в 1S_3

$$(68) \quad \begin{aligned} \bar{\eta}(0, r)/c &= const, \\ \alpha/c &= 0. \end{aligned}$$

4. Покажем, наконец, что $\bar{\eta} = const$ и в некоторой окрестности кривой C . Дифференцируя (25₃) по μ и учитывая (58), (59), (68), получим

$$(69) \quad (\mathcal{L} \gamma_\mu + \mathcal{N}_\mu \beta)/c = 0.$$

Уравнение (25₁) в силу (59), (68) вдоль кривой C принимает вид:

$$(70) \quad -\gamma_\mu = \Gamma_{22}^1 \beta.$$

В пространстве 1S_3 для поверхности S_2 можно записать аналоги уравнений Петерсона-Кодацци, одно из них имеет вид:

$$\mathcal{M}_\nu - \mathcal{N}_\mu = \Gamma_{22}^1 \mathcal{L} + \Gamma_{22}^2 \mathcal{M} - \Gamma_{21}^1 \mathcal{M} - \Gamma_{21}^2 \mathcal{N}.$$

Вдоль кривой C это уравнение запишется следующим образом:

$$(71) \quad \mathcal{N}_\mu = -\Gamma_{22}^1 \mathcal{L}.$$

Как и в евклидовом пространстве, можно найти выражение геодезической кривизны κ_g линии C :

$$(72) \quad \kappa_g = -\dot{v}^2 \sqrt{g_{ij} - F^2} \Gamma_{22}^1 .$$

Так как по условию касательная плоскость к G_j вдоль C совпадает с плоскостью кривой C , то вдоль C

$$(73) \quad \kappa_g = \kappa$$

и так как по условию теоремы $\kappa|_C \neq 0$, то в силу (73), из (72) следует

$$(74) \quad \Gamma_{22}^1|_C \neq 0 .$$

Из (61), (71) имеем:

$$(75) \quad (\mathcal{L}\gamma_{ii} - \mathcal{L}\Gamma_{22}^1(\beta))|_C = 0 .$$

Подставляя в (75) вместо γ_{ii} его выражение из (70) и учитывая (74) и $\mathcal{L}|_C \neq 0$, получим

$$(76) \quad \beta|_C = 0 .$$

А тогда из (75)

$$\gamma_{ii}|_C = 0 .$$

Итак, вдоль кривой C

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \gamma_{ii} = 0 .$$

Теперь из уравнения (25₂) найдем

$$\alpha_{ii}|_C = 0 .$$

Дифференцируя по u один раз (25_{1,2}) и два раза (25₃) и учитывая (58), (59), (68), (76), получим

$$(77) \quad -(\gamma_{iii})|_C = (\beta_{ii}\Gamma_{22}^1)|_C ,$$

$$(78) \quad (\mathcal{L}\gamma_{iii} + 2N_{ii}\beta_{ii})|_C = 0 ,$$

$$(79) \quad (\alpha_{\mu\mu} + \beta_{\mu\nu})|_C = (\beta_{\mu} T_{22}^2)|_C .$$

Из (77) - (79) с учетом (71), (74) следует

$$\beta_{\mu}|_C = 0, \quad \gamma_{\mu\mu}|_C = 0, \quad \alpha_{\mu\mu}|_C = 0 .$$

Рассуждая аналогично можно убедиться, что, как и в евклидовом пространстве, все производные от функций α , β , γ вдоль кривой C равны нулю. В предположении аналитичности функций α , β , γ получаем, что

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0$$

и в некоторой окрестности кривой C , что означает жесткость второго порядка желоба G .

Используя метод, примененный в последней теореме, можно также доказывать жесткость второго порядка любой аналитической поверхности в 1S_3 относительно аналитических изгибаний, сохраняющих нормальную кривизну плоской, замкнутой, выпуклой кривой, лежащей на поверхности и не являющейся ни на каком участке асимптотической.

Л и т е р а т у р а

- [1] А.В. ПОГОРЕЛОВ: Внешняя геометрия поверхностей, Наука, 1969.
- [2] И.Я. РЯВЧИКОВА: Бесконечно малые изгибания в пространстве Лобачевского, Успехи мат. наук 15(93)(1969), 173-176.
- [3] Г.Н. ГАУБОВ: О жесткости выпуклых поверхностей в гиперболическом пространстве, Доклады акад. наук УзССР (1965), 8-10.
- [4] Н.В. ЕФИМОВ: Качественные вопросы теории деформации поверхностей, Успехи мат. наук 3(1948), 47-158.

- [5] Л.А. ЛЮСТЕРНИК: Выпуклые фигуры и многогранники, Москва, 1956.
- [6] Х. ФРАНК: Построение дифференциальной геометрии в пространстве Лобачевского методом внешних форм, Сиб.мат. ж. 2(1961), 600-621.
- [7] В. ВЛЯШКЕ: Дифференциальная геометрия, т.1, ОНТИ, 1935.
- [8] В.Ф. КАГАН: Основания геометрии, 1, Москва-Ленинград, 1949.
- [9] E. REMBS: Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen, Math. Zeitschrift 36(1932), 110-121.

Гос. университет

Ростов-на-Дону

С С С Р

(Oblatum 27.12.1974)