R. R. Ahmerov; Mikhail I. Kamenskij

Об одном подходе к исследованию устойчивости периодических решений в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 2, 293--313

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,2 (1975)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ПРИНЦИПЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

АХМЕРОВ Р.Р., КАМЕНСКИЙ М.И., Воронеж

Резюме: Предлагается один подход к исследованию устойчивости решений уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, позволяющий, в частности доказывать теоремы об устойчивости и неустойчивости периодических решений в принципе усреднения для таких уравнений.

Ключевые слова: Уравнение нейтрального типа, принцип усреднения, периодическое решение, устойчивость, уплотняющий оператор.

AMS: 34K20 Ref. Ž.: 7.929

---

1. В последнее время большое внимание уделяется обоснованию различных принципов усреднения для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего ([1]-[5]) и нейтрального ([6] - [10]) типов. Такие уравнения возникают, например, при исследовании различных химических процессов [11], а также при исследовании ряда задач электродинамики [12] и радиотехники [13] - [14] . В классических теоремах о принципе усреднения (см., напр.,[15] - [16]) наряду с существованием периодических решений неусредненного уравнения, рождающихся из состояния равновесия усредненного уравнения,

утверждается также, что эти решения обладают теми же свойствами устойчивости, что и данное состояние равновесия. В настоящей статье предлагается один подход к исследованию устойчивости решений уравнений нейтрального типа, позволяющий, в частности, доказывать теоремы об устойчивости и неустойчивости периодических решений в принципе усреднения для таких уравнений.

2. Всюду ниже мы будем обозначать через C пространство определенных на $[-h, 0]$ непрерывных функций со значениями в R^m с равномерной нормой, а через C^1 - пространство определенных на $[-h, 0]$ непрерывно дифференцируемых функций со значениями в R^m с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x(0)\|_{R^m} + \|x'\|_C$.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида:

$$x'(t) = \mathcal{F}(t, x_t, x'_t), \tag{1}$$

где, как обычно, x - неизвестная функция; оператор $\mathcal{F}$ действует из $R^1 \times C \times C$ в R^m ; x_t и x'_t являются при каждом $t \in R^1$ элементами пространства C и определяются равенствами $x_t(s) = x(t+s), x'_t(s) = x'(t+s) (s \in [-h, 0])$.

Исследование на устойчивость решений уравнений нейтрального типа сопряжено со специфической трудностью: для существования непрерывно дифференцируемого решения решения уравнения (1) с начальным условием

(2) $$x(s) = \varphi(s) \quad (s \in [-h, 0])$$

необходимо (ср., напр., [17]) выполнение жесткого условия "склейки":

(3) $$\varphi'_-(0) = \mathcal{F}(0, \varphi, \varphi') .$$

Легко видеть, что класс операторов $\mathcal{F}$, для которых условие (3) выполнено для любых функций φ (или для достаточно "богатого" множества функций φ) довольно узок. А так как в определении устойчивости фигурирут произвольные возмущения начального значения исследуемого на устойчивость решения, то классическое рассмотрение устойчивости решений уравнений нейтрального типа сужает класс изучаемых уравнений. Эту трудность можно обойти различными способами. Мы воспользуемся здесь следующим приемом: наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее семейство уравнений, зависящих от положительного параметра μ :

(4_μ) $$x'(t) = \mathcal{F}(t, x_t, x'_t) + (x'_-(0) - \mathcal{F}(0, x_0, x'_0))\nu_\mu(t)$$ *)

Здесь ν_μ - определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция, равная $1 - \mu^{-1}t$ при $t \in [0, \mu]$ и нулю при $t > \mu$. Очевидно, что при всех $\mu > 0$ для уравнений (4_μ) условие "склейки" выполнено при любых начальных функциях $\varphi \in C^1$. Пусть для всех достаточно малых $\mu > 0$ задача (4_μ) - (2) имеет на отрезке $[-h, T]$ непрерывно дифференцируемое решение. Всевозможные пределы таких решений при $\mu \longrightarrow 0$ в

----

*) Уравнения, аналогичные (4_μ) рассматривались (по другому поводу) в [18],[20].

пространстве $C([-h,T],R^m)$ (если они существуют) будем называть (см.[8]) обобщенными решениями задачи (1) - (2) на отрезке $[-h,T]$. Нетрудно видеть, что обобщенные решения лежат в пространстве С.Л. Соболева $W_\infty^{(1)}$.

Пусть x является непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1), определенным на $[-h,\infty)$.

<u>Определение 1</u> (см.[18]). Решение x уравнения (1) называется усиленно асимптотически устойчивым, если существует $\mu_0>0$ такое, что решение x уравнения (4_μ) асимптотически устойчиво в пространстве C^1 равномерно относительно $\mu\in(0,\mu_0]$.

<u>Определение 2</u>. Решение x уравнения (1) назовем усиленно неустойчивым, если существует $\mu_0>0$ такое, что решение x уравнений (4_μ) неустойчиво в пространстве C^1 равномерно относительно $\mu\in(0,\mu_0]$, то есть

$\exists(\delta>0)\ \forall(\mu\in(0,\mu_0])\ \exists(\{g_k^\mu\}\subset C^1,$

$\|g_k^\mu-x_0\|_{C^1}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$; $\{t_k^\mu\}\subset[0,\infty)$; $x(\cdot,\mu,k)$ -

- решения уравнений (4_{μ_k}), выпущенные из

$g_k^\mu)\ [\|x_{t_k^\mu}(\cdot,\mu,k)-x_{t_k^\mu}\|_{C^1}\geq\delta]$.

<u>Замечание 1</u>. Отметим, что понятие усиленной неустойчивости не является непосредственным отрицанием понятия усиленной устойчивости. Такой выбор определения усиленной неустойчивости связан с тем, что отрицание понятия усиленной устойчивости является понятием более слабым по отношению к понятию неустойчивости. Было бы интересно построить пример уравнения, у которого некоторое решение не является усиленно

устойчивым, и, в то же время, является устойчивым.

Замечание 2. Будем говорить, что решение уравнения (1) C^1 - асимптотически устойчиво (C^1 -неустойчиво), если оно асимптотически устойчиво (неустойчиво) в пространстве C^1 на множестве начальных функций, удовлетворяющих условию "склейки". Нетрудно показать, что усиленная асимптотическая устойчивость решений уравнения (1) с периодической правой частью эквивалентна C^1 -асимптотической устойчивости, а усиленная неустойчивость - C^1 -неустойчивости. В случае же непериодической части уравнения (1), вообще говоря, имеют место следующие импликации: из усиленной асимптотической устойчивости относительно начального момента t_0 вытекает C^1 -асимптотическая устойчивость относительно любого начального момента $t_1 < t_0$; из C^1-асимптотической устойчивости относительно начального момента t_0 вытекает усиленная асимптотическая устойчивость относительно любого начального момента $t_1 < t_0$; из усиленной неустойчивости относительно начального момента t_0 вытекает C^1 -неустойчивость относительно любого начального момента $t_1 > t_0$; и, наконец, из C^1-неустойчивости относительно начального момента t_0 вытекает усиленная неустойчивость относительно любого начального момента $t_1 > t_0$.

Замечание 3. Легко видеть, что из усиленной асимптотической устойчивости вытекает асимптотическая устойчивость в классе обобщенных решений в пространстве $W_\infty^{(1)}$.

3. Ниже мы будем исследовать на устойчивость периодические решения следующего функционально-дифференциального

уравнения нейтрального типа:

$$(5_\varepsilon) \qquad x'(t) = \varepsilon f(t, x_t, x'_t) \ ;$$

здесь $f : R^1 \times C \times C \longrightarrow R^m$, ε - малый положительный параметр.

Всюду в дальнейшем предполагается, что оператор f удовлетворяет следующим шести требованиям:

1) непрерывен по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица с константой ℓ по третьей переменной;

2) непрерывен по второй переменной равномерно по совокупности переменных, то есть

$\forall(\alpha > 0) \exists (\beta > 0) \forall (t \in R^1 ; u^1, u^2, v \in C :$
$\|u^1 - u^2\|_C \le \beta) [\| f(t, u^1, v) - f(t, u^2, v\|_{R^m} \le \alpha] ;$

3) непрерывно дифференцируем по совокупности двух последних переменных, то есть при любых фиксированных $u^1, v^1 \in C$ оператор f представим в виде:

$$f(t,u,v) = f(t,u^1,v^1) + f'_{uv}(t,u^1,v^1)(u-u^1, v-v^1) + \Delta(t,u,v,u^1,v^1),$$

где $f'_{uv}(t, u^1, v^1)$ - действующий из $C \times C$ в R^m линейный ограниченный непрерывно зависящий от t, u^1, v^1 оператор, а оператор Δ при любых $u^1, v^1 \in C$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{\|u-u^1\|_C + \|v-v^1\|_C \le r} \{ \| \Delta(t,u,v,u^1,v^1)\|_{R^m} / r \} \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \ ;$$

4) ω -периодичен по первой переменной;

для каждого $a \in R^m$ обозначим через $\bar{a}$ функцию из C тождественно равную a . Определим операторы $\tilde{f}$ и $\hat{f}$, действующие из C в R^m и из R^m в R^m, соответственно, равенствами

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s,u,\theta)\,ds \quad (\theta \in C : \theta(s) \equiv 0), \ \hat{f}(a) = \tilde{f}(\bar{a});$$

5) уравнение

$$x'(t) = \hat{f}(x(t)) \tag{6}$$

имеет стационарное решение x^*;

6) оператор $B = \hat{f}'(x^*(0))$ не имеет собственных значений, лежащих на мнимой оси.

Изучение вопроса об устойчивости периодических решений уравнения (5_ε), рождающихся из состояния равновесия x^* уравнения (6), существование которых при малых ε было показано в [9], мы сведем к изучению устойчивости неподвижных точек оператора сдвига по траекториям уравнений

$$(7_{\varepsilon\mu}) \quad x'(t) = \varepsilon f(t, x_t, x_t') + (x_-'(0) - \varepsilon f(0, x_0, x_0'))\, \nu_\mu(t).$$

Поэтому нам потребуется один результат об устойчивости неподвижных точек операторов, действующих в банаховом пространстве, являющийся очевидным следствием лемм 4 и 5 из [24]:

<u>Теорема 1</u>. Пусть E - банахово пространство, а оператор $\mathfrak{U}$ действует из E в E. Пусть x_* является решением уравнения

$$\mathfrak{U}x = x \tag{8}$$

и оператор $\mathfrak{U}$ дифференцируем по Фреше в точке x_*.

Тогда:

(а) если спектральный радиус оператора $\mathfrak{U}'(x_*)$

меньше единицы, то решение x_* уравнения (8) асимптотически устойчиво;

(б) если оператор $\mathfrak{U}'(x_*)$ имеет конечное число собственных значений, лежащих вне замкнутого круга с центром в нуле радиуса, большего единицы, а остальная часть спектра лежит внутри этого круга, то решение x_* уравнения (8) неустойчиво, то есть существуют $\delta > 0$, $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \theta$ и n_k такие, что $\| \mathfrak{U}^{n_k} x_k \| \geq \delta$.

Заметим, что из результатов работ [25] и [26] вытекает, что оператор сдвига по траекториям уравнения $(7_{\varepsilon\mu})$ за время ω определен и непрерывен при достаточно малых ε на всем пространстве C^1. Из периодичности оператора $\mathcal{L}$ вытекает справедливость этого утверждения для любого другого промежутка времени.

Обозначим через $\mathrm{U}(\varepsilon, \mu, \cdot)$ оператор сдвига по траекториям уравнения $(7_{\varepsilon\mu})$ за время $\omega_\varepsilon = ([\varepsilon^{-1}] + 1)\omega$ ($[\varepsilon^{-1}]$ – целая часть числа ε^{-1}). Из результатов работы [19] вытекает, что оператор $\mathrm{U}(\varepsilon, \mu, \cdot)$ непрерывно дифференцируем при $\varepsilon \in (0, \ell^{-1})$ по последней переменной.

<u>Замечание 4</u>. Всюду в дальнейшем мы под словами "спектр оператора", "собственное значение оператора" будем понимать спектр и собственное значение, соответственно, его комплексификации (см.[27]) и поэтому, не ограничивая общности, будем считать все линейные уравнения, рассматриваемые ниже, комплексными.

<u>Лемма 1</u>. Пусть Ω – замкнутое множество комплексной плоскости, не содержащее нуля, и пусть оператор $e^{\omega B}$ не имеет собственных значения, лежащих в Ω. Тогда существуют

$\varepsilon_0 > 0$ и $\varkappa_0 > 0$ такие, что при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\mu \in (0, \frac{\omega}{2}]$ и любом ω-периодическом решении x^ε уравнения (5_ε) таком, что $\| x^\varepsilon - x^* \|_{C^1_\omega} \leq \varkappa$ спектр оператора $U'_x(\varepsilon, \mu, x^\varepsilon_0)$ не пересекается с Ω.

Доказательство. Обозначим $\min\{|\lambda| : \lambda \in \Omega\}$ через d. Из результатов работы [21] вытекает, что оператор $U(\varepsilon, \mu, \cdot)$ при любых фиксированных $\varepsilon \in (0, \ell^{-1})$ и $\mu > 0$ уплотняет с константой $\varepsilon\ell$ относительно некоторой нормальной меры некомпактности (о мерах некомпактности и уплотняющих операторах см.[22],[23]). Поэтому (см. [28] или [22], п. 1.3.7) и оператор $U'_x(\varepsilon, \mu, u)$ при любых $u \in C^1$ уплотняет с той же константой. Положим $\varepsilon_1 = \frac{d}{2\ell}$. Тогда при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ выполняется неравенство $\varepsilon\ell \leq \frac{d}{2}$ и, следовательно ([22], п. 2.2.8), при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ вне круга радиуса, например, $\frac{2d}{3}$ с центром в нуле спектр оператора $U'_x(\varepsilon, \mu, u)$ может состоять только из конечного числа собственных значений конечной кратности.

Допустим, что утверждение леммы не верно, то есть допустим, что найдутся такие $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\mu_k \in (0, \frac{\omega}{2}]$ и $x^k \in C^1_\omega$ такие, что x^k является решением уравнения (5_{ε_k}), $\| x^k - x^* \|_{C^1_\omega} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и

$$(9) \qquad \sigma(U'_x(\varepsilon_k, \mu_k, x^k_0)) \cap \Omega \neq \emptyset$$

(здесь $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A). Обозначим $U'_x(\varepsilon_k, \mu_k, x^k_0)$ через $V(k)$. Соотношение (9) в подробной записи означает, что найдутся такие $\lambda_k \in \Omega$ и $u^k \in C^1$, что $\|u^k\|_{C^1} = 1$ и

(10) $$V(k)u^k = \lambda_k u^k .$$

Из результатов работы [19] следует, что операторы $V(k)$ являются операторами сдвига за время ω_{ε_k} по траекториям уравнения, получачемого линеаризацией уравнения ($7_{\varepsilon_k}(u_k)$) вдоль решения x^k. Из этой же работы непосредственно следует наличие такой константы M, что

$$\|V(k)\|_{C^1 \to C^1} \leq M .$$

Следовательно собственные значения операторов $V(k)$ лежат в круге радиуса M. Поэтому, также не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_0 \in \Omega$.

Обозначим через $A(t,k)$ оператор $f'_{uv}(t, x_t^k, (x_t^k)')$, а через $\mathcal{D}_k$ - множество функций $u \in C^1$, для которых выполнено следующее условие "склейки": $u'_-(0) = \varepsilon_k A(0,k)(u,u')$. Очевидно, что $\mathcal{D}_k$ является линейным подпространством пространства C^1. Заметим, что $V(k)u^k \in \mathcal{D}_k$, а поэтому и $u^k = \lambda_k^{-1} V(k)u^k \in \mathcal{D}_k$. Таким образом $(u^k)'_-(0) = \varepsilon_k A(0,k)(u^k, (u^k)')$.

Обозначим через y^k решение уравнения

$$y'(t) = \varepsilon_k A(t,k)(y_t, y'_t) ,$$

на отрезке $[-h, \omega_{\varepsilon_k}]$, выпущенное из начальной функции u^k. То есть

$$(11)\quad y^k(t)=u^k(0)+\varepsilon_k\int_0^t A(\xi,k)(y^k_\xi,(y^k_\xi)')\,d\xi \quad (t\in[0,\omega_{\varepsilon_k}]),$$
$$y^k(s)=u^k(s)\quad (s\in[-h,0]) .$$

Тогда в силу определения оператора сдвига

$$[V(k)u^k](s)=y^k(\omega_{\varepsilon_k}+s)\quad (s\in[-h,0]) .$$

Запишем теперь равенство (10) подробнее:

$$(12)\quad \lambda_k u^k(s)=u^k(0)+\varepsilon_k\int_0^{\omega_{\varepsilon_k}+s} A(\xi,k)(y^k_\xi,(y^k_\xi)')\,d\xi \quad (s\in[-h,0]).$$

Дифференцируя равенство (12) по s, получаем

$$(13)\quad \lambda_k (u^k)'(s)=\varepsilon_k A(\omega_{\varepsilon_k}+s,k)(y^k_{\omega_{\varepsilon_k}+s},(y^k_{\omega_{\varepsilon_k}+s})') .$$

Далее, нетрудно видеть, что $\|y^k\|_{C^1([-h,\omega_{\varepsilon_k}],R^m)}\le M$,
а отсюда и из (13) вытекает следующая оценка:

$$\|(u^k)'(s)\|_{R^m}\le \varepsilon_k\cdot \sup_k \max_{t\in[0,\omega]}\|A(t,k)\|_{C\times C\to R^m}\cdot \frac{M}{d} .$$

Поэтому при достаточно больших k выполнено неравенство
$\|(u^k)'\|_C\le \frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$(14)\quad 1\ge\|u^k(0)\|_{R^m}=\|u^k\|_{C^1}-\|(u^k)'\|_C\ge 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} .$$

Положив в (12) s равным нулю, получим

$$(15)\quad \lambda_k u^k(0)=u^k(0)+\varepsilon_k\int_0^{\omega_{\varepsilon_k}} A(\xi,k)(y^k_\xi,(y^k_\xi)')\,d\xi .$$

Определим действующий из C в C оператор $W(\varepsilon)$ формулой $[W(\varepsilon)u](s)=u(\varepsilon s)$ $(s\in[-h,0])$. Сделаем в равенствах (11) и (15) замену переменных, положив $\tau=\varepsilon_k t$, $\varsigma=\varepsilon_k\xi$, $x^k(\tau)=y^k\left(\frac{\tau}{\varepsilon_k}\right)$. Получим, соответственно (выкладки проводятся также, как и в [8]),

$$(16)\quad x^{k}(\tau)=u^{k}(0)+\int_0^{\tau} A\left(\frac{\xi}{\varepsilon_k},k\right)\left(W(\varepsilon_k)x^{k}_{\xi},\ \varepsilon_k W(\varepsilon_k)(x^{k}_{\xi})'\right)d\xi ,$$

$$(17)\quad \lambda_k u^{k}(0)=u^{k}(0)+\int_0^{\varepsilon_k\omega_{\varepsilon_k}} A\left(\frac{\xi}{\varepsilon_k},k\right)\left(W(\varepsilon_k)x^{k}_{\xi},\ \varepsilon_k W(\varepsilon_k)(x^{k}_{\xi})'\right)d\xi .$$

Заметим, что $\|x^{k}\|_{C^1([0,\varepsilon_k\omega_{\varepsilon_k}],R^m)}$ ограничены в совокупности. Поэтому из последовательности $\{x^{k}\}$ можно выделить сходящуюся в пространстве $C([0,\omega],R^m)$ подпоследовательность; мы сохраняем за ней прежнее обозначение, а ее предел обозначаем через x.

Нетрудно видеть далее, что разность между операторами $A\left(\frac{\xi}{\varepsilon_k},k\right)$ и $f'_{uv}\left(\frac{\xi}{\varepsilon_k},\ x_0^*,\ (x_0^*)'\right)$ стремится к нулю по норме операторов при $k\longrightarrow\infty$ равномерно по ξ. Учитывая вышесказанное и используя модификацию теоремы М.А. Красносельского - С.Г. Крейна (см.[29]) для таких операторов из [8], перейдем в равенствах (16) и (17) к пределу при $k\longrightarrow\infty$. Получим, соответственно,

$$x(\tau)=x(0)+\int_0^{\tau}Bx(\xi)d\xi\ (\tau\in[0,\omega]),\ \lambda_0x(0)=x(0)+\int_0^{\omega}Bx(\xi)d\xi .$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\lambda_0 x(0)=e^{\omega B}x(0)$. А отсюда, учитывая, что в силу неравенства (14) $x(0)\neq 0$, следует, что λ_0 является собственным значением оператора $e^{\omega B}$, лежащим в Ω. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

<u>Лемма 2</u>. Пусть оператор $e^{\omega B}$ имеет ненулевое собственное значение λ. Тогда существуют $\varepsilon_0>0$, $\mu_0>0$ и

$r_0 > 0$ такие, что при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\mu \in (0, \mu_0)$ и любом ω-периодическом решении x^ε уравнения (5_ε), лежащем в шаре пространства C^1_ω радиуса r_0 с центром в x^*, у оператора $U'_x(\varepsilon, \mu, x^\varepsilon_0)$, есть собственное значение λ_ε, причем $\lambda_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \lambda$.

Доказательство. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{|\lambda|}{2\ell}$. Тогда при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ константа $\varepsilon \ell$, с которой уплотняет оператор $U(\varepsilon, \mu, \cdot)$ меньше $\dfrac{|\lambda|}{2}$. Ниже мы будем рассматривать значения параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$.

Обозначим через K – m-мерное подпространство пространства C^1, состоящее из функций-констант, и определим оператор $V : K \longrightarrow K$ формулой $[Vx](s) \equiv e^{\omega B} x(0)$ $(s \in [-h, 0])$. Легко видеть, что спектры операторов V и $e^{\omega B}$ совпадают. Поэтому λ является собственным значением оператора V

Допустим, что утверждение леммы не верно, то есть допустим, что существуют $\varepsilon_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, $\mu_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, $q > 0$ и ω-периодические решения x^k уравнений (5_{ε_k}) такие, что $\|x^k - x^*\|_{C^1_\omega} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ и операторы $U'_x(\varepsilon_k, \mu_k, x^k_0)$ не имеют в круге радиуса q с центром в λ собственных значений. Обозначим через Γ окружность на комплексной плоскости с центром в λ радиуса $\min\{q, \dfrac{|\lambda|}{3}\}$. Нетрудно видеть, что внутри Γ нет точек спектра операторов $U'_x(\varepsilon_k, \mu_k, x^k_0)$.

Так же, как и в доказательстве леммы 1, обозначим

$U'_x(\varepsilon_k, (\mu_k, x_0^k)$ через $V(k)$. Докажем сначала, что при любом $\mu \in K$

(18) $\qquad \| [\alpha I - V(k)]^{-1}\mu - [\alpha I - \mathcal{V}]^{-1}\mu \|_{C^1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

равномерно по $\alpha \in \Gamma$. В предположении противного найдутся такие $\alpha_m \in \Gamma$ (без ограничения общности можно считать, что $\alpha_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_0 \in \Gamma$), $\mu \in K$, $\delta > 0$ и $k_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$, что

(19) $\qquad \| [\alpha_m I - V(k_m)]^{-1}\mu - [\alpha_m] - \mathcal{V}]^{-1}\mu \|_{C^1} \geq \delta$.

Докажем предварительно следующее предельное соотношение

(20) $\qquad \| [\alpha_m I - V(k_m)]^{-1}\mu - [\alpha_0 I - \mathcal{V}]^{-1}\mu \|_{C^1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Обозначим $[\alpha_m I - V(k_m)]^{-1}\mu$ через x^m . Тогда

(21) $\qquad \mu = \alpha_m x^m - V(k_m)x^m$.

Методом от противного, используя отсутствие на Γ собственных значений оператора $\mathcal{V}$, нетрудно показать существование такой константы N , что $\| x^m \|_{C^1} \leq N$. Пусть y^m – решение уравнения

$$y'(t) = \varepsilon_{k_m} A(t, k_m)(y_t, y'_t) + (y'_-(0) - \varepsilon_{k_m} A(0, k_m)(y_0, y'_0))\, \nu_\mu(t)$$

выпущенное из x^m , то есть

(22) $$y^m(t) = x^m(0) + \varepsilon_{k_m} \int_0^t A(\xi, k_m)(y^m_\xi, (y^m_\xi)')\,d\xi + {} + c_m \int_0^t \nu_\mu(\xi)\,d\xi \quad (t \in [0, \omega_{\varepsilon_{k_m}}])$$

(здесь через c_m обозначен $(x^m)'_-(0) - \varepsilon_{k_m} A(0, k_m)(x^m)')$)

и $y^m(s) = x^m(s)$ при $s \in [-h, 0]$. Тогда равенство (21) перепишется в виде

$$(23)\quad u(s) = \alpha_m x^m(s) - x^m(0) - \varepsilon_{k_m} \int_0^{\omega_{\varepsilon_{k_m}}+s} A(\xi, k_m)(y^m_\xi, (y^m_\xi)') d\xi - c_m \frac{u_{k_m}}{R} \quad (s \in [-h, 0])$$

(здесь мы считаем, что m достаточно велико, и поэтому $\int_0^{\omega_{\varepsilon_{k_m}}+s} \nu_{u_{k_m}}(\xi) d\xi = \int_0^{u_{k_m}} \nu_{u_{k_m}}(\xi) d\xi = \frac{u_{k_m}}{2}$). Теперь, также как это было сделано в доказательстве леммы 1, легко показать существование такой функции $x \in K$, что

$$\| x^m - x \|_{C^1} \longrightarrow 0, \quad x = [\alpha_0 I - V]^{-1} u .$$

Заметим, наконец, что в силу непрерывности резольвенты

$$\| [\alpha_m I - V]^{-1} u - [\alpha_m I - V]^{-1} u \|_{C^1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 .$$

Таким образом неравенство (19) не выполнено и, следовательно, верно (18).

Доказательство леммы завершается теперь просто. Так как внутри Γ нет точек спектра операторов $V(k)$, то проекторы Рисса

$$(24)\qquad \mathcal{P}_k x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [\alpha I - V(k)]^{-1} x \, d\alpha = \theta$$

при любом $x \in C^1$ и, в частности, при $x \in K$. Воспользовавшись (18), перейдем в равенстве (24) к пределу при $k \longrightarrow \infty$. Получим

$$\mathcal{P}_0 x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [\alpha I - V]^{-1} x \, d\alpha = \theta$$

при любом $x \in K$. Это равенство противоречит тому, что внутри Γ есть собственное значение λ оператора $\mathcal{V}$. Лемма доказана.

Будем называть индексом изолированного ω-периодического решения x уравнения (5_ε) (уравнения (6)) вращение $\gamma(I - U(\varepsilon, \mu, \cdot),\ S_{C^1}(x_0, \varkappa))$ (соответственно $\gamma(I - e^{\omega B},\ S_{R^m}(x(0), \varkappa))$) уплотняющего векторного поля $I - U(\varepsilon, \mu, \cdot)$ (поля $I - e^{\omega B}$) на сферах пространства C^1 (соответственно пространства R^m) с центром в x_0 (соответственно $x(0)$) радиуса $\varkappa$, не содержащих внутри и на себе начальных значений других ω-периодических решений уравнения (5_ε)(уравнения (6)), кроме x. Будем обозначать этот индекс через $ind\,(x, U(\varepsilon, \mu, \cdot))$ (соответственно $ind\,(x, e^{\omega B})$).

Нам потребуются еще две леммы об индексе ω-периодических решений уравнений (5_ε), доказательства которых мы не приводим.

<u>Лемма 4</u>. Существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ и $\rho > 0$ такие, что при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\mu \in (0, \mu_0]$

$$\gamma(I - U(\varepsilon, \mu, \cdot),\ S_{C^1}(x_0^*, \rho)) = ind\,(x^*(0), e^{\omega B}) .$$

<u>Лемма 5</u>. Существуют $\varepsilon_0 > 0$, и $\varkappa_0 > 0$ такие, что при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (5_ε) имеет в шаре пространства C^1_ω с центром в x^* радиуса $\varkappa_0$ лишь конечное число ω-периодических решений x^ε, причем

$$ind\,(x^\varepsilon, U(\varepsilon, \mu, \cdot)) = ind\,(x^*, e^{\omega B}) .$$

Теорема 2 (основной результат). Пусть выполнены условия 1) - 6). Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\varkappa_0 > 0$ такие, что

(а) если все собственные значения оператора B лежат в левой открытой полуплоскости (то есть решение x^* уравнения (6)) асимптотически устойчиво), то при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (5_ε) имеет в шаре $T_{C^1_\omega}(x^*, \varkappa_0)$ единственное ω-периодическое решение x^ε, причем x^ε усиленно асимптотически устойчивы и

$$\| x^\varepsilon - x^* \|_{C^1_\omega} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 ,$$

(б) если существует по крайней мере одно собственное значение λ оператора B, лежащее в правой открытой полуплоскости (то есть решение x^* уравнения (6) неустойчиво), то при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (5_ε) имеет в шаре $T_{C^1_\omega}(x^*, \varkappa_0)$ единственное ω-периодическое решение x^ε, причем x^ε усиленно неустойчивы и

$$\| x^\varepsilon - x^* \|_{C^1_\omega} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 .$$

Поясним кратко схему доказательства. Существование таких решений вытекает, как легко видеть, из результатов работы [9]. Единственность следует из леммы 3 и 4 и теоремы об аддитивности вращения (см.[22], п. 3.2.5). Для доказательства устойчивости и неустойчивости этих решений достаточно заметить, что в силу леммы 1 и 2 выполнены условия теоремы 1.

4. Авторы благодарны М.А. Красносельскому и Б.Н. Садовскому за полезное обсуждение результатов.

Литература:

[1] ФОДЧУК В.И.: О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Укр.мат.журн.16,№ 2(1964),273-279.

[2] HALE J.K.: Averaging methods for differential equations with retarded arguments and small parameter, J. Differential Equat. 2,No 1(1966),57-73.

[3] ХАЛАНАЙ А.: Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Rev.math.pures et appl.,Acad.RPR,4,No 3(1959), 467-483.

[4] ВУРД В.Ш.: Принцип усреднения на бесконечном промежутке для функционально-дифференциальных уравнений и почти периодические колебания квазилинейных систем, Вестн.Ярославского ун-та,вып. 7,Ярославль(1974),89-115.

[5] МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А., ФОДЧУК В.И.: Вторая теорема Н.Н. Боголюбова о методе усреднения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Укр. мат.журн.24,№ 1(1972),49-56.

[6] ФОДЧУК В.И.: Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, Укр.мат. журн.20,№ 2(1968),203-209.

[7] ФИЛАТОВ А.Н.: Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, Ташкент, 1971.

[8] АХМЕРОВ Р.Р.: К принципу усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, Укр.мат.журн.25,№ 5(1973),579-588.

[9] АХМЕРОВ Р.Р., КАМЕНСКИЙ М.И.: Ко второй теореме Н.Н. Богилюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнениях нейтрального типа, Дифференц.уравнения 10,№ 3(1974),537-540.

[10] АХМЕРОВ Р.Р.: Принцип усреднения и почти периодические решения систем функционально-дифферемциальных уравнений нейтрального типа, Труды НИИМ ВГУ, вып.15,ВГУ,Воронеж(1974),3-9.

[11] COOKE K.L.: Differential-difference equations, International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, New York-London(1963),155-171.

[12] DRIVER R.D.: A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics,New York-London(1963),474-484.

[13] COOKE K.L., KRUMME D.W.: Differential-differential equations and Nonlinear Initial-Boundary Value Problem for Linear Hyperbolic Partial Differential Equations, J.Math.Anal.and Appl.24,No 2 (1968),372-387.

[14] РУБАНИК В.П.: Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, Москва,1969.

[15] МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А.: Метод усреднения в нелинейной механике, Киев,1971.

[16] БОГОЛЮБОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний,Москва, 1963.

[17] АМЕРИНА Л.М., САДОВСКИЙ В.Н.: О локальной разрешимости функционально -дифференциального уравнения нейтрального типа, Тр.мат.фак.ВГУ,Воронеж,вып. 3(1971),1-12.

[18] ТУРБАВИН А.С.: О разрешимости задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, Сб.работ асп.по мат.и мех.ВГУ,Воронеж(1969),60-65.

[19] РОДКИНА А.Е., САДОВСКИЙ В.Н.: О дифференцировании опе-

ратора сдвига по траекториям уравнений нейтрального типа, Тр.мат.фак.ВГУ,Воронеж(1974).

[20] САДОВСКИЙ Б.Н.: Применение топологических методов в теории периодических решений дифференциально-операторных уравнений нейтрального типа, Докл. АН СССР,200,Но 5(1971),1037-1041.

[21] КАМЕНСКИЙ М.И.: Об операторе сдвига по траекториям уравнений нейтрального типа, Сб.тр.асп.ВГУ, Математика,вып.1,Воронеж(1974).

[22] САДОВСКИЙ Б.Н.: Предельно компактные и уплотняющие операторы, Успехи мат.наук 27,Но 1(163)(1972), 81-146.

[23] САДОВСКИЙ Б.Н.: О мерах некомпактности и уплотняющих операторах, Пробл.мат.анализ сложн.систем, вып.2,ВГУ,Воронеж(1968),89-119.

[24] ЮДОВИЧ В.И.: Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости, Докл.АН СССР,195,Но 2(1970),292-295.

[25] КАМЕНСКИЙ М.И.: Вычисление индекса изолированного решения задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа, Сб.тр. асп.ВГУ,Математика,вып.1,Воронеж(1973).

[26] НЕПОМНЯЩАЯ Е.М., САДОВСКИЙ Б.Н.: О методе последовательных приближений для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, Тр. мат.фак.ВГУ,вып.6,Воронеж(1972),59-68.

[27] КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П.: Функциональный анализ и нормированные пространства, Москва,1959.

[28] DANEŠ J.: Some fixed point theorems in metric and Banach spaces, Comment.Math.Univ.Carolinae 12 (1971),37-51.

[29] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., КРЕЙН С.Г.: О принципе усреднения в нелинейной механике, Успехи мат.наук,10,Но 3 (1955),147-152.

Воронежский государственный университет

Научно-исследовательский институт математики

СССР

г. Воронеж-центр

Просп. Революции 24

(Oblatum 29.12.1974)