Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Vladimir G. Maz'ya

Об одном операторе вложения и функциях множества типа (p, l)-ёмкости

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 14 (1973), No. 1, 155--175

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105479

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
14,1 (1973)

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ВЛОЖЕНИЯ И ФУНКЦИЯХ МНОЖЕСТВА ТИПА (p, ℓ)-емкости

В.Г. МАЗЬЯ, Ленинград

Аннотация: Доказываются теоремы об условиях справедливости неравенства $\|u\|_{L_q(\Omega)} \le C\|D_\ell u\|_{L_p(\Omega)}$, где Ω -открытое подмножество R^n и D_ℓ - градиент порядка ℓ. Изучаются также условия полной непрерывности соответствующего оператора вложения.

Ключевые слова: теоремы вложения, емкость, пространства Соболева.

AMS, Primary: 46E30, 46E35 Ref. Ž. 7.972.27

В этой статье доказываются теоремы об условиях справедливости неравенства

$$(1.0)\qquad \|u\|_{L_q(\Omega)} \le C\,\|D_\ell u\|_{L_p(\Omega)}\ ,$$

где Ω - открытое подмножество R^n и D_ℓ - градиент порядка ℓ. Изучаются также условия полной непрерывности соответствующего оператора вложения. Результаты работы были сформулированы в статье [1] (см. также [2]).

§ 1. Вложение $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ (случай $p \le q$)

Пусть e - произвольное компактное подмножество Ω. Введем класс функций

$$\mathfrak{M}(e,\Omega)=\{u\in C_0^\infty(\Omega),\ 0\le u\le 1 \text{ в } R^n,\ u=1 \text{ в окрестности } e\}.$$

Назовем (p,l)-емкостью множества e относительно Ω число

$$(p,l)-cap(e,\Omega)=\inf\{\int_\Omega |D_l u|^p dx : u\in\mathfrak{M}(e,\Omega)\}.$$

Емкость пустого множества, по определению равна нулю. Если это не сможет привести к путанице, вместо $(p,l)-cap$ мы будем писать просто cap. Если $\Omega=R^n$, указание на Ω в обозначениях $\mathfrak{M}(e,\Omega)$, $cap(e,\Omega)$ и т.п. будем опускать.

В дальнейшем $\|\cdot\|_p$ - норма в $L_p(\Omega)$; $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ - пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике $\|D_l u\|_p$; Q_d - открытый куб с ребром d, Q_{2d} - концентрический и подобно расположенный куб с ребром $2d$; c, c_0 - положительные постоянные, зависящие только от n, p, l, q. Интегрирование без указания пределов распространено на Ω.

Лемма 1.1. 1) Если e - компактное подмножество куба $\overline{Q}_d$, такое, что $cap(e,Q_{2d})>0$, то для всех функций $u\in C^\infty(\overline{Q}_d)$, каждая из которых равна нулю в окрестности множества e, выполнено неравенство

$$\|u\|_{L_q(Q_d)}\le A\sum_{i=1}^{l} d^{i-l}\|D_i u\|_{L_p(Q_d)}, \tag{1.1}$$

в котором $1 \le q \le pn(n-pl)^{-1}$ при $n > pl$, $1 \le q < \infty$ при $n = pl$, $1 \le q \le \infty$ при $n < pl$ и

$$A \le c d^{n/q} [\mathrm{cap}(e, Q_{2d})]^{-1/p} .$$

2) Если для всех функций $u \in C^\infty(\overline{Q}_d)$, каждая из которых равны нулю в окрестности множества e, выполнено неравенство (1.1) и если $\mathrm{cap}(e, Q_{2d}) \le c_0 d^{n-pl}$, где c_0 – достаточно малая постоянная, то

$$A \ge c d^{n/q} [\mathrm{cap}(e, Q_{2d})]^{-1/p} .$$

Эта лемма была сформулирована в [1] и доказана в [2] в случае $p = 2$ (причем приведенное в [2] доказательство по существу не использует требования $p = 2$). В статье [3] показано, что утверждение первой части леммы остается справедливым и для более широкого класса функций $\{u \in C^\infty(\overline{Q}_d),\ \int_{Q_d} u\,dx \ge 0,\ u \le 0$ на $e\}$.

В силу теоремы вложения С.Л. Соболева [4] при $q = pn(n-pl)^{-1}$, $n > pl$ и при $q = \infty$, $p = 1$, $l = n$ неравенство (1.0) справедливо, каково бы ни было множество Ω. Как известно, при $q \ge pn(n-pl)^{-1}$, $n > pl$, а также при $q = \infty$, $n = pl$, $p > 1$ это неравенство не может быть верным для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ с одной и той же константой. Поэтому остается рассмотреть только случаи $q < pn(n-pl)^{-1}$ при $n = pl$ и $q \le \infty$ при $n < pl$.

Найдем сначала необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (1.0) при $q \ge p$. При $p = 2$ оно было доказано в [8] и при всех $p > 1$ сформулировано в [1].

Теорема 1.1. Для того, чтобы при всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнялась оценка (1.0), где $q \in [p, \frac{pn}{n-pl})$ при $n \geq pl$ и $q \in [p, \infty)$ при $n < pl$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $d > 0$ имело место неравенство

$$\inf cap(\overline{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) > 0, \tag{2.1}$$

где $infimum$ берется по всем кубам Q_d с длиной ребра d.

Достаточность. Построим в R^n кубическую решетку с длиной ребра d. Пусть

$$d^{lp-n} cap(\overline{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) \geq \gamma > 0$$

для любого куба решетки. Согласно лемме 1.1

$$\| u \|^p_{L_p(Q_d)} \leq c\gamma^{-1} \sum_{k=1}^{l} d^{pk} \| D_k u \|^p_{L_p(Q_d)} .$$

Суммируя по всем кубам решетки, получаем неравенство

$$\| u \|^p_p \leq c\gamma^{-1} \sum_{k=1}^{l} d^{pk} \| D_k u \|^p_p .$$

Для оценки правой части воспользуемся известным неравенством

$$\| D_k u \|_p \leq c \| D_l u \|^{\frac{k}{l}} \| u \|_p^{1-\frac{k}{l}} . \tag{3.1}$$

Тогда

$$\| u \|^p_p \leq c \sum_{k=1}^{l} (d^{pl} \gamma^{-\frac{l}{k}} \| D_l u \|^p_p)^{\frac{k}{l}} \| u \|_p^{p(1-\frac{k}{l})} . \tag{4.1}$$

Так как $cap(C\Omega \cap \overline{Q}_d, Q_{2d}) \leq c d^{n-lp}$, то $\gamma \leq c$ и, следо-

$$2^{-1}\|u\|_p^p + c d^{pl}\gamma^{-l}\|D_l u\|_p^p .$$

Значит,

$$\|u\|_p^p \le c d^{pl}\gamma^{-l}\|D_l u\|_p^p . \tag{5.1}$$

Докажем неравенство (1.0) в случае $q > p$. В силу леммы 1.1

$$\|u\|^p_{L_q(Q_d)} \le c d^{\frac{n}{q}p}\gamma^{-1}\sum_{j=1}^{l} d^{pj-n}\int_{Q_d}|D_j u|^p dx .$$

Суммируя по всем кубам Q_d и используя неравенство $(\sum_i a_i)^{\varepsilon} \le \sum_i a_i^{\varepsilon}$ $(a_i \ge 0,\ \varepsilon < 1)$, получаем

$$\|u\|_q^p \le c\gamma^{-1} d^{n\frac{p}{q}}\sum_{j=1}^{l} d^{pj-n}\int |D_j u|^p dx .$$

Теперь неравенство (3.1) дает

$$\|u\|_q^p \le c\gamma^{-1} d^{n\frac{p}{q}}\sum_{j=1}^{l} d^{pj-n}\|D_l u\|_p^{p\frac{j}{l}}\|u\|_p^{p(1-\frac{j}{l})} .$$

Применяя (5.1), получим окончательно:

$$\|u\|_q^p \le c\gamma^{-l} d^{n\frac{p}{q}+lp-n}\|D_l u\|_p^p . \tag{6.1}$$

Необходимость. Пусть Q_d – произвольный куб с ребром d и u – любая функция из пространства $C^{\infty}(\overline{Q}_d)$ такая, что $dist(\overline{Q}_d \cap C\Omega,\ supp\, u) > 0$. Заменим в (1.0) функцию u функцией $u\eta$, где $\eta \in C_0^{\infty}(Q_d)$, $\eta = 1$ на $Q_{d/2}$, $|D_j\eta| \le c d^{-j}$. Тогда

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \le C\|D_l(u\eta)\|_{L_p(Q_d)} .$$

Отсюда:

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \le c\,C\sum_{j=0}^{\ell} d^{j-\ell}\|D_j u\|_{L_p(Q_d)} \quad .$$

Применяя известное неравенство

$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \le c\,d\,\|Du\|_{L_p(Q_d)} + c\,\|u\|_{L_p(Q_{d/2})}$$

и неравенство Гельдера, получаем

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \le c\,C\sum_{j=1}^{\ell} d^{j-\ell}\|D_j u\|_{L_p(Q_d)} +$$

$$+\, c\,C\,d^{-\ell+n\frac{q-p}{pq}}\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \quad .$$

Поэтому, если число d столь велико, что $2cCd^{-\ell+n\frac{q-p}{pq}} < 1$, то

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \le c\,C\sum_{j=1}^{\ell} d^{j-\ell}\|D_j u\|_{L_p(Q_d)} \quad .$$

Поскольку

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \le c\,d^{n\frac{p-q}{pq}+1}\|Du\|_{L_p(Q_d)} + c\,\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \quad ,$$

то

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \le c\,(C + d^{\ell+n\frac{p-q}{pq}})\sum_{j=1}^{\ell} d^{j-\ell}\|D_j u\|_{L_p(Q_d)} \quad .$$

В силу леммы 1.1, либо $cap\,(\bar{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) > c_0 d^{n-p\ell}$, либо

$$cap\,(\bar{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) \ge c\,d^{np/q}(C + d^{\ell+n\frac{p-q}{pq}})^{-p} \quad .$$

Теорема доказана.

Приведем несколько используемых далее свойств (p,ℓ)-емкости.

1) При $n > p\ell$ для любого замкнутого множества $e \subset \bar{Q}_d$

$$\operatorname{cap}(e, Q_{2d}) \le c \operatorname{cap}(e) \quad . \tag{7.1}$$

В самом деле, пусть $u \in \mathfrak{M}(e)$ и $\eta \in \mathfrak{M}(\overline{Q}_d, Q_{2d})$, $|D_j \eta| \le c d^{-j}$. Тогда

$$\operatorname{cap}(e, Q_{2d}) \le \|D_\ell(u\eta)\|_p^p \le c \sum_{j=0}^{\ell} \|D_j u\|_p^p \, d^{(\ell-j)p} \quad ,$$

что в силу неравенства Гельдера не превосходит

$$c \sum_{j=0}^{\ell} \|D_j u\|_{q_j}^p \, , \quad q_j = pn\,[n-(\ell-j)p]^{-1} \; .$$

Применяя теорему вложения С.Л. Соболева [4], получаем (7.1).

2) Если $p\ell > n$ и $e \subset \overline{Q}_d$, то

$$\operatorname{cap}(e, Q_{2d}) \ge c d^{n-p\ell} \quad . \tag{8.1}$$

Действительно, по теореме С.Л. Соболева [4] для любой функции $u \in \mathfrak{M}(e, Q_{2d})$:

$$1 = \max |u|^p \le c d^{p\ell-n} \int_{Q_{2d}} |D_\ell u|^p dx \; .$$

Минимизируя последний интеграл, приходим к (8.1).

3) Пусть e - замкнутое подмножество гладкого s-мерного многообразия V_s, $e \subset \overline{Q}_d$ и $n-1 \ge s > n-\ell p \ge 0$. Тогда по теореме вложения С.Л. Соболева - В.П. Ильина [5] для любой функции $u \in \mathfrak{M}(e, Q_{2d})$

$$[m_s(e)]^{p/q} = \left(\int_e |u|^q m_s(dx)\right)^{p/q} \le C \int_{Q_{2d}} |D_\ell u|^p dx \; ,$$

где m_s - s-мерный объем на V_s и $q = ps(n-\ell p)^{-1}$, если $n > \ell p$, q - любое положительное число при $n = \ell p$. Значит,

$$[m_s(e)]^{p/q} \le C \operatorname{cap}(e, Q_{2d}) \quad . \tag{9.1}$$

Постоянная C зависит от многообразия V_p, но не от e.

4) Отметим еще следующую оценку (p,l)-емкости, доказанную в [3]. Пусть $n \geq lp > n-1$ и e - континуум диаметра σ, расположенный в $\overline{Q}_d$. Тогда

$$\mathrm{cap}\,(e, Q_{2d}) \geq c\,\sigma d^{n-1-lp} \quad (10.1)$$

Теорему 1.1 можно перефразировать следующим образом.

<u>Теорема 1'. 1.</u> Для того, чтобы для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имело место неравенство (1.0), где $q \in [p, \frac{pn}{n-pl})$ при $n \geq pl$ и $q \in [p, \infty]$ при $n < pl$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) При некотором $d > 0$

$$\inf_{Q_d} \mathrm{cap}\,(\overline{Q}_d \cap C\Omega) > 0 \quad (11.1)$$

если $n > pl$.

2) При некотором $d > 0$

$$\inf_{Q_d} \mathrm{cap}\,(\overline{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) > 0 \quad (12.1)$$

если $n = pl$.

3) Множество Ω не содержит произвольно больших кубов, если $n < pl$ или если $n = pl$ и дополнение к Ω связано.

В случае 1) утверждение следует из теоремы 1.1 и оценки (7.1), случай 2) содержится в теореме 1.1. Если $n < pl$, условие

$$\mathrm{cap}\,(\overline{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) \geq c\, d^{n-pl}$$

эквивалентно непустоте $C\Omega \cap \overline{Q}_d$, что доказывает 3) при

$n < pl$. Пусть $n = pl$ и дополнение к Ω связно. Если Ω содержит произвольно большие кубы, то, очевидно, неравенство (2.1) не выполнено. Пусть в Ω нельзя поместить кубы любого размера и пусть число d_0 столь велико, что при $d > d_0$ любой куб Q_d имеет непостое пересечение с $C\Omega$. Тогда в $C\Omega$ существует континуум, содержащий точки из Q_d и CQ_{2d}. Остается применить оценку (10.1).

Приведем пример бесконечной области, для которой выполняются условия теоремы 1.1.

Пример 1.1. В каждом кубе $Q_1^{(i)}$ координатной решетки с ребром 1 выделим замкнутое подмножество e_i, лежащее на s-мерной плоскости V_i, $s > n - pl \geq 0$. Пусть $\inf_i m_s(e_i) \geq const > 0$. Обозначим через Ω дополнение множества $\bigcup_i e_i$. Тогда в силу (9.1) $cap(e_i, Q_2^{(i)}) \geq const > 0$ для любого куба $Q_2^{(i)}$ и, значит, для множества Ω неравенство (1.0) выполнено.

§ 2. Вложение $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ (случай $p > q$).

В [3] была введена функция компактного множества $e \subset \bar{Q}_d$:

$$(p,l)-\gamma_{l-1}(e, Q_{2d}) = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}_{l-1}} \inf_{\{u\}} \int_{Q_{2d}} |D_l u|^p dx ,$$

где $\mathcal{P}_{l-1}$ - множество полиномов Π степени, не превышающей $l-1$, нормированных равенством

$$d^{-n} \int_{Q_d} |\Pi|^p dx = 1 ,$$

а $\{u\}$ - множество функций из $C_0^\infty(Q_{2d})$, каждая из которых совпадает с многочленом $\Pi \in \mathcal{P}_{l-1}$ в некоторой окрестности компакта e. В дальнейшем почти всегда мы будем вместо $(p,l)-\gamma_{l-1}$ писать просто γ.

Очевидно, $cap(e, Q_{2d}) \geq \gamma(e, Q_{2d})$; в [3] приведен пример множества, для которого $cap(e, Q_{2d}) > 0$ и $\gamma(e, Q_{2d}) = 0$.

Следующее утверждение доказано в [3].

<u>Лемма 1.2</u>. Если e - компактное подмножество куба $\overline{Q}_d$ такое, что $\gamma(e, Q_{2d}) > 0$, то для всех функций $u \in C^\infty(\overline{Q}_d)$, каждая из которых равна нулю в окрестности множества e, выполнено неравенство

$$(1.2) \qquad \| u \|_{L_q(Q_d)} \leq A \| D_l u \|_{L_p(Q_d)} ,$$

в котором $1 \leq q \leq pn(n-pl)^{-1}$ при $n > pl$, $1 \leq q < \infty$ при $n = pl$, $1 \leq q \leq \infty$ при $n < pl$ и

$$A \leq c d^{n/q} [\gamma(e, Q_{2d})]^{-1/p} .$$

2) Если для всех функций $u \in C^\infty(\overline{Q}_d)$, каждая из которых равна нулю в окрестности множества e, выполнено неравенство (1.2) и если $\gamma(e, Q_{2d}) \leq c_0 d^{n-pl}$, где c_0 - достаточно малая постоянная, то

$$A \geq c d^{n/q} [\gamma(e, Q_{2d})]^{-1/p} .$$

Вернемся к неравенству (1.0). В случае $q < p$ мы получим не совпадающие, но в некотором смысле близкие достаточные и необходимые условия, которые означают, что с "малой" погрешностью множество Ω есть сумма последовательности непересекающихся кубов, длины ребер которых $\{d_i\}_{i \geq 1}$ удовлетворяют условию

$$(2.2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} d^{\,n+\frac{lpq}{p-q}} < +\infty .$$

В следующей теореме Q_i - открытый n-мерный куб с ребром d_i, cQ_i - куб с длиной ребра cd_i, расположенный подобно Q_i.

<u>Теорема 1.2</u>. 1) Пусть $p > q \geq 1$ и $\{Q_i\}_{i\geq 1}$ -последовательность открытых n-мерных кубов, такая что $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\bigcup_i \bar{Q}_i \supset \Omega$ и

$$(3.2) \qquad \gamma(Q_i \cap C\Omega, 2Q_i) \geq \alpha d_i^{\,n-pl} ,$$

где $\alpha = const$. Допустим, что ряд (2.2) сходится. Тогда для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верно неравенство (1.0).

2) Пусть $\{Q_i\}_{i\geq 1}$ - последовательность непересекающихся n-мерных кубов, удовлетворяющих условию

$$(4.2) \qquad \gamma(\bar{Q}_i \cap C\Omega, 2Q_i) \leq \beta d_i^{\,n-pl} ,$$

где β - достаточно малая постоянная. Тогда для справедливости неравенства (1.0), где $p > q \geq 1$, необходимо, чтобы ряд (2.2) сходился.

<u>Доказательство</u>. 1) Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Очевидно,

$$\int |u|^q dx = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\,q/p} \gamma_i^{\,-q/p} \int_{Q_i} |u|^q dx ,$$

где $\gamma_i = d_i^{\,-pn/q} \gamma(\bar{Q}_i \cap C\Omega, 2Q_i)$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int |u|^q dx \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\frac{q}{q-p}}\Big)^{\frac{p-q}{p}} \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Big(\int_{Q_i} |u|^q dx\Big)^{\frac{p}{q}}\Big]^{\frac{q}{p}} .$$

В силу леммы 1.2

$$c\gamma_i \left(\int_{Q_i} |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \leq \int_{Q_i} |D_\ell u|^p dx \quad .$$

Отсюда получаем

$$\int |u|^q dx \leq c \left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int |D_\ell u|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \quad ,$$

что вместе с условием (3.2) дает:

$$(5.2) \qquad \| u \|_q \leq c \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i^{\,n+\frac{\ell p q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}} \| D_\ell u \|_p \quad .$$

2) В силу леммы 1.2, каково бы ни было $\varepsilon_i > 0$, сущест- вует такая функция $v_i \in C^\infty(\overline{Q}_i)$, что

$dist\,(supp\, v_i, Q_i \cap C\Omega) > 0$ и

$$\int_{Q_i} |D_\ell v_i|^p dx \leq [c d_i^{-n} \gamma(\overline{Q}_i \cap C\Omega, 2Q_i) + \varepsilon_i] \int_{Q_i} |v_i|^p dx \quad .$$

Будем считать, что $\varepsilon_i = \beta d_i^{-p\ell}$. Тогда в силу (4.2)

$$(6.2) \qquad \int_{Q_i} |D_\ell v_i|^p dx \leq c\beta d_i^{-p\ell} \int_{Q_i} |v_i|^p dx \quad .$$

Из теоремы С.Л. Соболева об эквивалентных нормировках простран- ства W_p^ℓ следует неравенство

$$(7.2) \qquad \| v_i \|_{L_p(Q_i)} \leq c d_i^\ell \| D_\ell v_i \|_{L_p(Q_i)} + c d_i^{\,n\frac{q-p}{pq}} \| v_i \|_{L_q(\frac{1}{2}Q_i)} \quad .$$

Подставляя эту оценку в (6.2) и используя малость постоянной β приходим к оценке

$$(8.2) \qquad \int_{Q_i} |D_\ell v_i|^p dx \leq c d_i^{\,n\frac{q-p}{q}} \| v_i \|^p_{L_q(\frac{1}{2}Q_i)} \quad .$$

Пусть $\eta_i \in C_0^\infty(Q_i)$, $\eta_i = 1$ в $\frac{1}{2} Q_i$, $|D_k \eta_i| \le c d_i^{-k}$. Рассмотрим функцию $u_i = \eta_i v_i$. Применяя (7.2), получим

$$\| D_\ell u_i \|_{L_p(Q_i)} \le c \| D_\ell v_i \|_{L_p(Q_i)} + c d^{n\frac{q-p}{pq} - \ell} \| v_i \|_{L_q(\frac{1}{2} Q_i)} .$$

Отсюда и из (8.2) следует, что

$$(9.2) \qquad \| D_\ell u_i \|_{L_p(Q_i)} \le c d_i^{n\frac{q-p}{pq}} \| u_i \|_{L_q(Q_i)} .$$

По условию для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верно неравенство (1.0). Нормируем функцию u_i:

$$(10.2) \qquad \| u_i \|_{L_q(Q_i)} = d_i^{\frac{n}{q} - \frac{p\ell}{q-p}}$$

и положим в (1.0) $u = \sum_{i=1}^{N} u_i$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|^q_{L_q(Q_i)}\right)^{p/q} = \left(\int |u|^q dx\right)^{p/q} \le C^p \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |D_\ell u_i|^p dx .$$

В силу (9.2)

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|^q_{L_q(Q_i)}\right)^{p/q} \le c\, C^p \sum_{i=1}^{N} d_i^{n\frac{q-p}{q} - p\ell} \| u_i \|^p_{L_q(Q_i)} ,$$

что, вместе с (10.2), дает:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{n - \frac{pq\ell}{q-p}}\right)^{\frac{p}{q} - 1} \le c\, C^p .$$

Теорема доказана.

В работе автора [6] приведена близкая теорема для случая $p = 2$, $\ell \ge 1$, формулируемая в терминах $(2, \ell)$-емкости. К сожалению, доказательство ее первой части, посвященой достаточному условию, корректно только при $\ell = 1$.

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть e – компакт, содержащийся в кубе $\bar{Q}_d$. Тогда

$$(11.2)\quad (p,l)-\gamma(e,Q_{2d}) \ge c\, d^{n(1-l)}[(p,1)-cap(e,Q_{2d})]^{l}.$$

В частности, при $p > n$

$$(12.2)\qquad (p,l)-\gamma(e,Q_{2d}) \ge c\, d^{n-pl}.$$

Доказательство. В силу леммы 1.1

$$(p,1)-cap(e,Q_{2d}) \le c\,\inf\{\int_{Q_d}|Du|^p dx : \|u\|_{L_p(Q_d)} = d^{\frac{n}{p}},\ dist(supp\, u, e) > 0\}.$$

Так как согласно тому же следствию при $j < l$

$$\int_{Q_d}|D_j u|^p dx \le \frac{c\,d^n}{(p,1)-cap(e,Q_{2d})}\int_{Q_d}|D_{j+1}u|^p dx,$$

то

$$\int_{Q_d}|Du|^p dx \le c\left(\frac{d^n}{(p,1)-cap(e,Q_{2d})}\right)^{l-1}\int_{Q_d}|D_l u|^p dx.$$

Значит,

$$(13.2)\quad c\,d^{n(1-l)}[(p,1)-cap(e,Q_{2d})]^{l} \le \inf\{\int_{Q_d}|D_l u|^p dx : \|u\|_{L_p(Q_d)} = d^{n/p},\ dist(supp\, u, e) > 0\}.$$

Достаточно рассмотреть случай $(p,l)-\gamma(e,Q_{2d}) < c_0 d^{n-pl}$, где c_0 - постоянная из леммы 1.2. В этом случае из второй части леммы 1.2 получаем

$$\inf\{\int_{Q_{2d}}|D_l u|^p dx : \|u\|_{L_p(Q_d)} = d^{\frac{n}{p}},\ dist(supp\, u, e) > 0\} \le c\,(p,l)-\gamma(e,Q_{2d}).$$

Отсюда и из (13.2) следует утверждение леммы.

Из (12.2) и теоремы 1.2 получаем

Следствие 1.2. Пусть $p > n$ и $\{Q_i\}_{i\geq 1}$ - последовательность непересекающихся n-мерных кубов, каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с $C\Omega$, и замыкания которых покрывают Ω. Если ряд (2.2) сходится, то для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верно неравенство (1.0).

Очевидным следствием второй части теоремы 1.2 является следующее необходимое условие.

Следствие 2.2. Пусть $\{Q_i\}_{i\geq 1}$ - последовательность непересекающихся кубов, расположенных в Ω. Тогда для справедливости неравенства (1.0) при $q < p$ необходимо, чтобы ряд (2.2) сходился.

Пример 1.2. Рассмотрим область $\Omega : \{x = (x', x_n),\ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) : x_n > 0, |x'| < \varphi(x_n)\}$, где φ - ограниченная убывающая функция. Используя теорему 1.2, покажем здесь, что для справедливости неравенства (1.0) при $p > q$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\infty \varphi^\alpha(t)\, dt < \infty \quad , \tag{14.2}$$

где $\alpha = n - 1 + \dfrac{\ell p q}{p - q}$.

Обозначим через $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ числовые последовательности, определяемые соотношениями

$$a_0 = 0\,,\quad a_{i+1} - a_i = 2\varphi(a_i)\,,\qquad i \geq 1\ ;$$

$$b_0 = 0\,,\quad b_{i+1} - b_i = \frac{2}{\sqrt{n-1}}\,\varphi(b_i)\,,\quad i \geq 1\ .$$

Ясно, что $a_i, b_i \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$ и что разности $a_{i+1} - a_i$, $b_{i+1} - b_i$ не возрастают. Построим две последовательности кубов:

$$Q_i^{(ext)} = \{a_i \le x_m \le a_{i+1}, 2|x_\nu| \le a_{i+1} - a_i, 1 \le \nu \le n-1\},$$

$$Q_i^{(int)} = \{b_i \le x_m \le b_{i+1}, 2|x_\nu| \le b_{i+1} - b_i, 1 \le \nu \le n-1\}.$$

Кубы $Q_i^{(ext)}$ покрывают область Ω. Все $(n-1)$ - мерные грани $Q_i^{(ext)}$ за исключением двух, полностью лежат в $C\Omega$ и, значит, $(p,1)-cap(Q_i^{(ext)} \cap C\Omega, 2Q_i^{(ext)}) \ge c\,(b_{i+1} - b_i)^{n-p}$. Отсюда и из леммы 2.2 следует, что условие (3.2) выполнено. Допустим, что интеграл (4.2) сходится, и покажем, что сходится ряд (2.2). Действительно,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)^{\alpha+1} \le \sum_{i=1}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)^{\alpha}(a_i - a_{i-1}) + a_1^{\alpha+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\varphi^{\alpha}(a_i)(a_i - a_{i-1}) + \varphi^{\alpha+1}(0).$$

Так как функция φ не возрастает, то

$$\varphi^{\alpha}(a_i)(a_i - a_{i-1}) \le \int_{a_{i-1}}^{a_i}\varphi^{\alpha}(t)\,dt.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)^{\alpha+1} \le \varphi^{\alpha+1}(0) + \int_0^{\infty}\varphi^{\alpha}(t)\,dt$$

и достаточное условие теоремы 1.2 выполнено.

Докажем необходимость условия (14.2). Допустим, что

$$\int_0^{\infty}\varphi^{\alpha}(t)\,dt = \infty$$

и для любой последовательности расположенный в Ω кубов ряд (2.2) сходится.

В силу монотонности функции φ

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - b_{i-1})^{\alpha+1} \ge \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - b_{i-1})^{\alpha}(b_{i+1} - b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\varphi^{\alpha}(b_i)(b_{i+1} - b_i) \ge \sum_{i=1}^{\infty}\int_{b_i}^{b_{i+1}}\varphi^{\alpha}(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - b_{i-1})^{\alpha+1} \geq \int_{b_i}^{\infty} \varphi^{\alpha}(t)\,dt = \infty \quad .$$

Внутрь каждого куба $Q_i^{(int)}$ поместим куб с ребром $2^{-1}(b_{i+1} - b_i)$. Ясно, что для построенной таким образом последовательности кубов ряд (2.2) расходится. Мы пришли к противоречию. Остается воспользоваться следствием 2.2.

§ 3. Полная непрерывность оператора вложения $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

В этом параграфе получено необходимое и достаточное условие полной непрерывности оператора вложения $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ при $q \geq p$ формулируемое в терминах (p,l)-емкости. Это условие в случае $l = 1$, $p = 2$ было найдено А.М. Молчановым в [7], и затем при $l > 1$, $p = 2$ автором [2],[6]. Наше доказательство (для любого $p \geq 1$) в существенном повторяет приведенное в [6]. Описываемый в других терминах критерий компактности вложения $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ дан в [8].

<u>Теорема 1.3</u>. Пусть $p \geq 1$ и $q \in [p, \frac{pn}{n-pl})$ при $n \geq pl$, $q \in [p, \infty]$ при $lp > n$. Для того, чтобы любое множество функций $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, ограниченное в метрике $\| D_l u \|_{L_p(\Omega)}$ было относительно компактным в $L_q(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

1) Для любого $d > 0$

$$(1.3)\qquad \lim_{\rho\to\infty}\ \inf_{Q_d\subset CB_\rho} \operatorname{cap}(\overline{Q}_d\cap C\Omega) > k d^{n-pl},$$

если $n > pl$. Здесь и далее B_ρ - замкнутый шар радиуса ρ с центром в начале координат, $CB_\rho = R^n\setminus B_\rho$ и k - положительная постоянная, не зависящая от d.

2) Для любого $d > 0$

$$(2.3)\qquad \lim_{\rho\to\infty}\ \inf_{Q_d\subset CB_\rho} \operatorname{cap}(\overline{Q}_d\cap C\Omega, Q_{2d}) > k,$$

если $n = pl$.

3) Множество Ω не содержит бесконечной последовательности непересекающихся кубов, если $n < pl$.

Если $n = pl$ и $C\Omega$ связно, то последнее условие также является необходимым и достаточным.

<u>Доказательство</u>. Достаточность. Прежде всего заметим, что в силу оценок (7.1) и (8.1) условия теоремы эквивалентны неравенству

$$(3.3)\qquad \lim_{\rho\to\infty}\ \inf_{Q_d\subset CB_\rho} \operatorname{cap}(\overline{Q}_d\cap C\Omega, Q_{2d}) > k d^{n-pl}.$$

Из последнего условия и первой части теоремы 1.1 получаем оценку

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le C\,\|D_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Так как при любом $\rho > 0$ всякое ограниченное подмножество $W^l_p(\Omega)$ компактно в $L_q(\Omega, B_\rho)$, то достаточно доказать оценку

$$(4.3)\qquad \|u\|_{L_q(\Omega\cap CB_\rho)} \le \varepsilon\,\|u\|_{W^l_p(\Omega)},$$

где ε – любое положительное число и ρ – достаточно велико.

Пусть $\eta \in C^{\infty}(R^n)$, $\eta = 0$ в $B_{\rho/2}$, $\eta = 1$ в CB_{ρ} и $|D_j \eta| \le c\rho^{-j}$ $(j = 1, \dots, l)$. Обозначим через d зависящее от ε достаточно малое число, степень малости которого будет уточнена ниже. По условию существует столь большой радиус $\rho(d)$ что при $\rho > \rho(d) > 1$ для всех кубов Q_d, $Q_d \subset CB_{\rho/4}$,

$$d^{pl-n} \operatorname{cap}(\bar{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) > \varkappa d^{n-pl} .$$

Поэтому из оценки (6.1), примененной к $\Omega \cap CB_{\rho/2}$, следует:

$$\|u\eta\|_{L_q(\Omega \cap CB_{\rho/2})} \le c\varkappa^{-l} d^{lp-n+\frac{np}{q}} \|D_l(u\eta)\|_{L_p(\Omega \cap CB_{\rho/2})} .$$

Мы могли заранее выбрать число d так, чтобы выполнялось неравенство

$$c\varkappa^{-l} d^{lp-n+\frac{np}{q}} < \varepsilon .$$

Тогда

$$\|u\|_{L_q(\Omega \cap CB_{\rho})} \le c\,\varepsilon \sum_{j=0}^{l} \rho^{j-l} \|D_j u\|_{L_p(\Omega)} \le$$
$$\le c\,\varepsilon \|u\|_{W_p^l(\Omega)} ,$$

что доказывает первую часть теоремы.

Необходимость. Пусть d – любое положительное число и $\varepsilon = \gamma^{-1} d^{\,l-n\frac{q-p}{pq}}$, где γ – достаточно большая постоянная, зависящая только от q, n, l, p. Допустим, что всякое ограниченное в $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ множество функций из $C_0^{\infty}(\Omega)$ относительно компактно в $L_q(\Omega)$. Тогда существует столь большое $\rho = \rho(d)$, что для всех функций

$u \in C_0^\infty(\Omega \setminus B_\rho)$

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le \varepsilon \|D_\ell u\|_{L_p(\Omega)} .$$

Обозначим через Q_d любой куб с ребром d, расположенный вне шара B_ρ. В доказательстве второй части теоремы 1.2 показано, что либо

$$cap(\bar{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) \ge c_0 d^{n-p\ell} ,$$

где c_0 - постоянная из теоремы 1.1, либо

$$cap(\bar{Q}_d \cap C\Omega, Q_{2d}) \ge c d^{n\frac{p}{q}}(\varepsilon + d^{\ell+n\frac{p-q}{pq}})^{-p} = c d^{n-p\ell} ,$$

то есть условие (3.3) выполнено всегда. Теорема доказана.

<u>Теорема 2.3</u>. Если выполнены условия первой части теоремы 1.2, то оператор вложения $\overset{\circ}{L}{}_p^\ell(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ вполне непрерывен.

<u>Доказательство</u>. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$, любого достаточно большого $\rho = \rho(\varepsilon)$ и для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедлива оценка (4.3). Пусть номер N столь велик, что

$$(5.3) \qquad \sum_{i=N+1}^{\infty} d^{n+\frac{\ell p q}{p-q}} < \varepsilon^{\frac{pq}{p-q}} ,$$

и ρ -радиус некоторого шара $B_\rho = \{x : |x| \le \rho\}$, такого что $CB_{\rho/4}$ не пересекается с кубами $Q_1, \dots, Q_N$; $\rho > 1$.

Из оценки (5.2), примененной к $\Omega \cap CB_{\rho/2}$, получаем

$$\|u\eta\|_{L_q(\Omega \cap CB_{\rho/2})} \le$$
$$\le c\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} d_i^{n+\frac{\ell p q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \|D_\ell(u\eta)\|_{L_p(\Omega \cap CB_{\rho/2})} ,$$

где $\eta \in C^\infty(R^n)$, $\eta = 0$ в $B_{\rho/2}$, $\eta = 1$ в CB_ρ и $|D_j \eta| \le c\rho^{-j}$. Отсюда и из (5.3) немедленно следует (4.3).

Теорема доказана.

Литература

[1] В.Г. МАЗЬЯ: Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения, Сб."Теоремы вложения и их приложения" (Труды симпозиума по теоремам вложения, Баку), 1966, М., 142-159, 1970

[2] В.Г. МАЗЬЯ: О задаче Дирихле для эллиптических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях, Докл.АН СССР, 150(1963), 1221-1224.

[3] В.Г. МАЗЬЯ: О (p,ℓ)-емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора, Известия АН СССР 3(1973)(в печати).

[4] С.Л. СОБОЛЕВ: Об одной теореме функционального анализа, Матем.сб.4(1938), 471-497.

[5] В.П. ИЛЬИН: Теорема вложения в случае максимального показателя, Докл.АН СССР 96(1954), 905-908.

[6] В.Г. МАЗЬЯ: Полигармоническая емкость в теории первой краевой задачи, Сиб.матем.журн.2б(1964), 127-148.

[7] А.М. МОЛЧАНОВ: Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, Труды Моск.матем.о-ва, 2(1953), 169-200.

[8] R.A. ADAMS: Capacity and compact imbeddings, J.Math.Mech. 19(1969/70), 923-929.

Ленинград 194257
Гражданский проспект, дом 73, кв.36
СССР

(Oblatum 20.6.1972)