Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

K. K. Mokrishchev; I. A. Černjavskaja

Об однозначной определённости некоторых классов поверхностей в пространстве Лобачевского

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 3, 447--462

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105245`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
10,3 (1969)

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО.

К.К. МОКРИЩЕВ и И.А. ЧЕРНЯВСКАЯ, Ростов на Дону

1. Вопросами однозначной определенности поверхностей в эллиптическом пространстве занимался А.В. Погорелов [1]. Для этого он построил специальные отображения эллиптического пространства на евклидово и евклидова пространства на эллиптическое. Позже аналогичными построениями для пространства Лобачевского занимался Г.Н. Гавбов [2].

В настоящей работе показывается как можно, рассматривая пространство Лобачевсково, ${}^1S_3$ как гиперсферу (с отождествленными диаметрально противоположными точками) мнимого радиуса $i\varkappa$ четырехмерного пространства Минковского ${}^1R_4$ [3] и используя метод внешних форм Картана [4], непосредственно получать многие результаты, относящиеся к однозначной определенности поверхностей в пространстве Лобачевского.

В дальнейшем предполагается знакомство читателя с работой [5].

2. Напомним здесь важнейшие формулы дифференциальной геометрии пространства Лобачевского, которые потребуются нам в дальнейшем [5].

Для кривой в пространстве ${}^1S_3$

$$\bar{x} = \bar{x}(t)\ , \quad (\bar{x}, \bar{x}) = -r^2$$

деривационные формулы можно представить в виде

$$(1)\quad \begin{cases} d\bar{x} = \sigma\bar{\tau}\ , \\ d\bar{p}_0 = \frac{\sigma}{r}\bar{\tau}\ , \\ d\bar{\tau} = \frac{\sigma}{r}\bar{p}_0 + \omega_3^0\bar{\nu}\ , \\ d\bar{\nu} = -\omega_3^0\bar{\tau} + \omega_1^0\bar{\beta}\ , \\ d\bar{\beta} = -\omega_1^0\bar{\tau}\ . \end{cases}$$

$\{\bar{x};\ \bar{p}_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ – сопровождающий репер кривой, $\frac{\omega_3^0}{\sigma} \geqslant 0$ – кривизна кривой, а $\frac{\omega_1^0}{\sigma}$ – кручение. Для поверхностей полосы

$$\bar{x} = \bar{x}(t), \quad (\bar{x}, \bar{x}) = -r^2\ ,$$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}_3(t), \quad |\tilde{a}_3| = 1, \quad (d\bar{x}, \tilde{a}_3) = 0$$

деривационные уравнения имеют вид

$$(2)\quad \begin{cases} d\bar{x} = \sigma\tilde{a}_0\ , \\ d\tilde{a}_0 = \frac{\sigma}{r}\tilde{a}_1\ , \\ d\tilde{a}_1 = \frac{\sigma}{r}\tilde{a}_0 + \check{\omega}_3\tilde{a}_2 - \check{\omega}_2\tilde{a}_3\ , \\ d\tilde{a}_2 = -\check{\omega}_3\tilde{a}_1 + \check{\omega}_1 a_3\ , \\ d\tilde{a}_3 = \check{\omega}_2\tilde{a}_1 - \check{\omega}_1\tilde{a}_2\ , \end{cases}$$

$\{\bar{x};\ \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3\}$ – фундаментальный репер полосы, $\frac{\check{\omega}_1}{\sigma}$ – геодезическое кручение, $\frac{\check{\omega}_2}{\sigma}$ – нормальная кривизна и $\frac{\check{\omega}_3}{\sigma}$ – геодезическая кривизна полосы.

Для поверхности

$$\bar{x} = \bar{x}(u, v), \quad (\bar{x}, \bar{x}) = -r^2$$

деривационные уравнения можно записать так

$$(3) \quad \begin{cases} d\bar{x} = r\,d\bar{a}_0 = \sigma_1 \bar{a}_1 + \sigma_2 \bar{a}_2, \\ d\bar{a}_1 = \frac{\sigma_1}{r}\bar{a}_0 + \omega_3 \bar{a}_2 - \omega_2 \bar{a}_3, \\ d\bar{a}_2 = \frac{\sigma_2}{r}\bar{a}_0 - \omega_3 \bar{a}_1 + \omega_1 \bar{a}_3, \\ d\bar{a}_3 = \omega_2 \bar{a}_1 - \omega_1 \bar{a}_2 \end{cases}$$

и уравнения структуры

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \mathfrak{D}\sigma_1 = [\omega_3 \sigma_2], & \mathfrak{D}\omega_1 = [\omega_3 \omega_2], \\ \mathfrak{D}\sigma_2 = -[\omega_3 \sigma_1], & \mathfrak{D}\omega_2 = [\omega_1 \omega_3], \\ 0 = [\omega_2 \sigma_1] - [\omega_1 \sigma_2], & \mathfrak{D}\omega_3 = \frac{1}{r^2}[\sigma_1 \sigma_2] - [\omega_1 \omega_2]. \end{array}$$

Гауссова кривизна K поверхности определяется по формуле

$$(5) \quad K = -\frac{\mathfrak{D}\omega_3}{[\sigma_1 \sigma_2]} = k + \frac{[\omega_1 \omega_2]}{[\sigma_1 \sigma_2]},$$

где $k = -\frac{1}{r^2}$ есть кривизна пространства ${}^1S_3$.

3. Первая интегральная формула. Предположим, что F и F^x обозначают две изометричные поверхности пространства Лобачевского. Их уравнения

$$\bar{x} = \bar{x}(u, v), \quad (\bar{x}, \bar{x}) = -r^2,$$

$$\bar{x}^x = \bar{x}^x(u, v), \quad (\bar{x}^x, \bar{x}^x) = -r^2.$$

Координатные сети на F и F^x соответствуют одна другой по изометрии, поэтому

$$\sigma_1 = \sigma_1^x, \quad \sigma_2 = \sigma_2^x, \quad \omega_3 = \omega_3^x.$$

Сопровождающие реперы F и F^x обозначим соответственно

$\{\bar{x};\ \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ и $\{\bar{x}^\times;\ \bar{a}_0^\times, \bar{a}_1^\times, \bar{a}_2^\times, \bar{a}_3^\times\}$.

Пусть $\bar{a}$ - произвольно выбранная точка пространства ${}^1S_3$, тогда $(\bar{a}, \bar{a}) = -\kappa^2$. Введем скалярные произведения

$$\left.\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{a}_k) &= p_k, \\ (\bar{a}, \bar{a}_k^\times) &= p_k^\times, \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Дифференцируя первые из этих равенств и используя (3), получим

$$\begin{aligned} dp_0 &= \frac{1}{\kappa}(p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2), \\ dp_1 &= \frac{1}{\kappa} p_0\sigma_1 + p_2\omega_3 - p_3\omega_2, \\ dp_2 &= \frac{1}{\kappa} p_0\sigma_2 - p_1\omega_3 + p_3\omega_1, \\ dp_3 &= p_1\omega_2 - p_2\omega_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как в силу изометрии F и $F^\times$

$$[\omega_1\omega_2] = [\omega_1^\times\omega_2^\times],$$

то используя (6), после несложных преобразований, найдем

$$\mathcal{D}(p_1\omega_1^\times + p_2\omega_2^\times) = \frac{1}{\kappa}p_0\{[\sigma_1\omega_1^\times] + [\sigma_2\omega_2^\times]\} + p_3\{[\omega_1\omega_2^\times] + [\omega_1^\times\omega_2]\},$$

$$\mathcal{D}(p_1\omega_1 + p_2\omega_2) = \frac{1}{\kappa}p_0\{[\sigma_1\omega_1] + [\sigma_2\omega_2]\} + p_3\{[\omega_1\omega_2] + [\omega_1^\times\omega_2^\times]\}.$$

Отсюда, если положить

$$\omega_1 - \omega_1^\times = \Omega_1, \quad \omega_2 - \omega_2^\times = \Omega_2, \tag{7}$$

непосредственно следует

$$\mathfrak{D}(p_1\Omega_1+p_2\Omega_2)=\frac{1}{k}p_0\{[\sigma_1\Omega_1]+[\sigma_2\Omega_2]\}+p_3[\Omega_1\Omega_2]\ , \quad (8)$$

и аналогично

$$(9)\quad -\mathfrak{D}(p_1\Omega_1+p_2\Omega_2)=-\frac{1}{k}p_0^x\{[\sigma_1\Omega_1]+[\sigma_2\Omega_2]\}+p_3^x[\Omega_1\Omega_2].$$

Введем еще формы Пфаффа

$$\Omega = p_0^x(p_1\Omega_1+p_2\Omega_2)\ ,$$

$$\Omega^x = -p_0(p_1^x\Omega_1+p_2^x\Omega_2)\ ,$$

тогда, учитывая (4),(8) и (9), найдем

$$(10)\quad \begin{aligned}\mathfrak{D}(\Omega+\Omega^x) &= (p_3p_0^x+p_3^xp_0)[\Omega_1\Omega_2] = \\ &= \mathfrak{D}\{(p_0^xp_1-p_0p_1^x)\Omega_1+(p_0^xp_2-p_0p_2^x)\Omega_2\}.\end{aligned}$$

Взяв на поверхности F односвязный кусок d, ограниченный простым гладким контуром Γ, получим по изометрии на F^x односвязный кусок d^x, ограниченный простым замкнутым контуром Γ^x, а на вспомогательной плоскости в декартовых координатах Ouv односвязную область σ, ограниченную простой замкнутой кривой γ.

Интегрируя теперь (10) по σ и используя формулу Грина, получим

$$(11)\quad \oint_\gamma\{(p_0^xp_1-p_0p_1^x)\Omega_1+(p_0^xp_2-p_0p_2^x)\Omega_2\} = \iint_\sigma(p_3p_0^x+p_3^xp_0)[\Omega_1\Omega_2]\ .$$

Это и есть нужная нам интегральная формула. Эту формулу можно рассматривать как аналог интегральной формулы К. Гротемейера [6] для поверхностей в пространстве Лобачевского. Она совпадает с формулой (7.14) в [5], названной там симметрированной формулой Герглотца; но можно показать, что при $k\to\infty$ из (11) получается упомянутая формула К. Гротемейера.

В последующем неоднократно используется

Лемма. Для регулярных изометричных поверхностей F и F^{x} с гауссовой кривизной $K > -\frac{1}{k^2}$ имеет место неравенство

$$[\Omega_1 \Omega_2] \leq 0 .$$

При этом, из равенства $[\Omega_1 \Omega_2] = 0$, следует обращение в нуль каждой из форм Ω_1 и Ω_2.

Доказательство этой леммы проводится также, как доказательство аналогичной леммы для поверхностей евклидова пространства.[7].

4. Некоторые приложения первой интегральной формулы.

Рассмотрим несколько теорем об однозначной определенности поверхностей в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. Трижды непрерывно дифференцируемый овалоид с гауссовой кривизной $K > -\frac{1}{k^2}$ есть поверхность однозначно определенная.

Доказательство не отличается от доказательства в [5].

Следующие теоремы являются аналогами соответствующих теорем К. Гротемейера [6].

Теорема 2. Пусть будут даны две изометричные трижды непрерывно дифференцируемые поверхности F и F^{x} с краями, отображающимися друг на друга. Пусть во внутренних точках этих поверхностей будет $K > -\frac{1}{k^2}$ и края удовлетворяют условиям:

1. Они - плоские кривые,

2. касательные плоскости к каждой из поверхностей вдоль ее края совпадают с плоскостью края. При этих условиях поверхности F и F^{x} или конгруентны, или симметричны.

<u>Доказательство</u>. Так как вдоль $R(F)$ имеем $\bar{a}_3 = const$, то согласно (3_4) имеем

$$\omega_2 \bar{a}_1 - \omega_1 \bar{a}_2 = 0,$$

отсюда следует, что вдоль $R(F)$ $\omega_1 = \omega_2 = 0$ и $K + \frac{1}{k^2} = 0$. Аналогично вдоль $R(F^{x})$ $\omega_1^{x} = \omega_2^{x} = 0$ и $K + \frac{1}{k^2} = 0$. Поэтому вдоль $R(F)$ и $R(F^{x})$ имеем

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0.$$

Интегральная формула (11) дает тогда

$$\iint_F (p_0^{x} p_3 + p_0 p_3^{x}) [\Omega_1 \Omega_2] = 0. \tag{12}$$

Как в [5] можно и здесь показать, что

$$p_0^{x} p_3 + p_0 p_3^{x} > 0$$

а в силу первой части леммы

$$[\Omega_1 \Omega_2] \leq 0$$

и стало быть в силу (12) имеет место

$$[\Omega_1 \Omega_2] = 0,$$

но тогда в силу второй части леммы $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, т.е. $\omega_1 = \omega_1^{x}$, $\omega_2 = \omega_2^{x}$. Таким образом для поверхностей F и F^{x} имеем

$$\sigma_1 = \sigma_1^{x}, \quad \sigma_2 = \sigma_2^{x}, \quad \omega_1 = \omega_1^{x}, \omega_2 = \omega_2^{x}, \omega_3 = \omega_3^{x};$$

следовательно, согласно основной теореме теории поверхностей пространства ${}^1S_3$ поверхности F и F^{x} или конгруентны, или симметричны.

<u>Замечание 1</u>. Как и в евклидовом пространстве условия вдоль $R(F)$: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ можно рассматривать

как обращение в нуль геодезического кручения и нормальной кривизны полосы с несущей кривой $R(F)$.

Замечание 2. Эту теорему можно рассматривать как теорему об однозначной определенности поверхности F с краем в ${}^1S_3$ в классе поверхностей, удовлетворяющих условиям теоремы.

Теорема 3. Пусть даны две изометричные трижды непрерывно дифференцируемые поверхности F и F^* в ${}^1S_3$ с гауссовой кривизной $K > \frac{1}{\kappa^2}$ и с замкнутыми границами $R(F)$ и $R(F^*)$, переходящими одна в другую при изометричном отображении. Пусть в соответственных точках $R(F)$ и $R(F^*)$ их геодезические кручения, а также нормальные кривизны совпадают. И пусть, наконец, для F и F^* существуют точки $\bar{a}$ и $\bar{a}^*$ такие, что

$$(\bar{a},\bar{a}_3) < 0 , \quad (\bar{a}^*, \bar{a}_3^*) < 0$$

для всех точек поверхностей. Тогда поверхности F и F^* или конгруентны, или симметричны.

Доказательство. По условию теоремы вдоль границ $R(F)$ и $R(F^*)$ имеем: $\omega_1 = \omega_1^*$ и $\omega_2 = \omega_2^*$, следовательно $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Поэтому применяя к F и F^* формулу (11), получим

$$(13) \qquad \iint_F (p_0^* p_3 + p_0 p_3^*)[\Omega_1 \Omega_2] = 0 \quad .$$

Не нарушая общности рассуждений можно считать поверхности F и F^* расположенными в ${}^1S_3$ так, что $\bar{a}^* \equiv \bar{a}$. Тогда [5] :

$$p_0 = (\bar{a},\bar{a}_0) = -\kappa ch\frac{\sigma}{\kappa} < 0, \quad p_0^* = (\bar{a},\bar{a}^*) = -\kappa ch\frac{\sigma^*}{\kappa} < 0 ,$$

где σ - расстояние точки $\kappa\bar{a}_0$ поверхности F от

точки $\bar{a}$; аналогичное значение имеет и σ^{x} .
И так как по условию

$$p_3 = (\bar{a}, \bar{a}_3) < 0, \quad p_3^{x} = (\bar{a}, \bar{a}_3^{x}) < 0,$$

то

$$p_0 p_3^{x} + p_0^{x} p_3 > 0 .$$

Но тогда (13) и лемма дают:

$$[\Omega_1 \Omega_2] = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0$$

что и требовалось.

<u>Теорема 4</u>. Пусть даны изометричные трижды непрерывно дифференцируемые поверхности F и F^{x} с $K > -\frac{1}{k^2}$ с соответственными краями. Пусть внутри минимальных выпуклых оболочек поверхностей F и F^{x} существуют точки: $\bar{a}$ для F и $\bar{a}^{x}$ для F^{x} такие, что

$$(\bar{a}, \bar{a}_3) \leq 0, \quad (\bar{a}^{x}, \bar{a}_3^{x}) \leq 0,$$

а все нормали к F (к F^{x}) в точках $R(F)$ (в точках $R(F^{x})$) проходят через $\bar{a}$ (через $\bar{a}^{x}$), тогда поверхности F и F^{x} или конгруентны, или симметричны.

<u>Доказательство</u>. В силу условия теоремы вдоль $R(F)$ и $R(F^{x})$ имеем

$$\bar{x} = \bar{a} + \rho \bar{a}_3 \qquad (\bar{a}, \bar{a}) = -k^2, \ (\bar{x}, \bar{x}) = -k^2,$$

$$\bar{x}^{x} = \bar{a}^{x} + \rho^{x} \bar{a}_3^{x}, \ (\bar{a}^{x}, \bar{a}^{x}) = -k^2, \ (\bar{x}^{x}, \bar{x}^{x}) = -k^2 .$$

Используя последние условия, найдем

$$\rho = -2(\bar{a}, \bar{a}_3), \quad \rho^{x} = -2(\bar{a}^{x}, \bar{a}_3^{x}) .$$

Не нарушая общности рассуждений можно считать поверхности F и F^{x} расположенными так, что $\bar{a}^{x} \equiv \bar{a}$.

Введем скалярные произведения

$$p_k = (\bar{a}, \bar{a}_k), \ p_k^{x} = (\bar{a}, \bar{a}_k^{x}), \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Тогда
$$\rho = -2p_3, \quad \rho^{*} = -2p_3^{*}.$$

Как известно [5], p_3, p_3^{*} вычисляются по формулам:
$$p_3 = \pm k \operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}, \quad p_3^{*} = \pm k \operatorname{sh}\frac{\rho_1^{*}}{k},$$
где ρ_1 и ρ_1^{*} - расстояния точки $\bar{a}$ до касательной плоскости E в точке $\bar{x}$ поверхности F и соответственно до касательной плоскости E^{*} в точке $\bar{x}^{*}$ поверхности F^{*}.

Так как
$$(\bar{a}, \bar{a}_3) \leq 0, \ (\bar{a}, \bar{a}_3^{*}) \leq 0,$$
то
$$\rho = 2k \operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}, \quad \rho^{*} = 2k \operatorname{sh}\frac{\rho_1^{*}}{k}.$$

Итак вдоль границ $R(F)$ и $R(F^{*})$ имеем соответственно:
$$\bar{x} = \bar{a} + 2k \operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\cdot \bar{a}_3, \quad \bar{x}^{*} = \bar{a} + 2k \operatorname{sh}\frac{\rho_1^{*}}{k}\cdot \bar{a}_3^{*}.$$

Дифференцируя первое из этих равенств и используя деривационные уравнения полосы (2) поверхности F вдоль кривой $R(F)$, получим
$$\rho_1 = const, \quad \check{\omega}_1 = \omega_1 = 0, \quad \frac{\check{\omega}_2}{\sigma_1} = \frac{\omega_2}{\sigma_1} = const.$$

Аналогично вдоль $R(F^{*})$
$$\rho_1^{*} = const, \quad \omega_1^{*} = 0, \quad \frac{\omega_2^{*}}{\sigma_1} = const.$$

Следовательно вдоль $R(F)$ будет
$$\Omega_1 = \omega_1 - \omega_1^{*} = 0.$$

Далее, вдоль $R(F)$ находим
$$p_2 = (\bar{a}, \bar{a}_2) = (\bar{x} - 2k \operatorname{sh}\frac{\rho_1}{k}\bar{a}_3, \bar{a}_2) = 0.$$

Аналогично вдоль $R(F^{*})$
$$p_2^{*} = (\bar{a}, \bar{a}_2^{*}) = 0.$$

Таким образом вдоль границы

$$(p_0^* p_1 - p_0 p_1^*)\Omega_1 + (p_0^* p_2 - p_0 p_2^*)\Omega_2 = 0$$

и потому применение формулы (11) к F дает

$$\iint_F (p_0 p_3^* + p_0^* p_3)[\Omega_1 \Omega_2] = 0 ;$$

при этом

$$p_0 p_3^* + p_0^* p_3 > 0 ,$$

так как p_3, p_3^* неположительны по условию теоремы, а p_0, p_0^* - всегда отрицательны. Поэтому $[\Omega_1 \Omega_2] = 0$ и стало быть $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, что и требовалось.

<u>Замечание</u>. Теоремы 1 - 4 при $k \to \infty$ обращаются в теоремы о глобальной жесткости овалоида евклидова пространства и соответствующие теоремы К. Гротемейера [6].

5. <u>Вторая интегральная формула</u>. Предположим, как в п. 3, что F и F^* - изометричные трижды непрерывно дифференцируемые поверхности и что на них введены общие по изометрии координаты u, v.

В силу изометрии

$$\sigma_1 = \sigma_1^*, \ \sigma_2 = \sigma_2^*, \ \omega_3 = \omega_3^*, \ [\omega_1 \omega_2] = [\omega_1^* \omega_2^*] .$$

Выполняя несложные вычисления, найдем

$$\mathcal{D}(\omega_1 \bar{a}_1 + \omega_2 \bar{a}_2) = \frac{1}{k}\bar{a}_0\{[\sigma_1 \omega_1] + [\sigma_2 \omega_2]\} + \bar{a}_3[\omega_1 \omega_2] + \bar{a}_3[\omega_1^* \omega_2^*]$$

и аналогично

$$\mathcal{D}(\omega_1^* \bar{a}_1 + \omega_2^* \bar{a}_2) = \frac{1}{k}\bar{a}_0\{[\sigma_1 \omega_1^*] + [\sigma_2 \omega_2^*]\} + \bar{a}_3[\omega_1 \omega_2^*] + \bar{a}_3[\omega_1^* \omega_2] .$$

Вычитывая последнее равенство из предпоследнего и полагая

$$\omega_1 - \omega_1^* = \Omega_1, \quad \omega_2 - \omega_2^* = \Omega_2 ,$$

получим

$$\mathcal{D}(\bar{a}_1 \Omega_1 + \bar{a}_2 \Omega_2) = \frac{\bar{a}_0}{k}\{[\sigma_1 \Omega_1] + [\sigma_2 \Omega_2]\} + \bar{a}_3[\Omega_1 \Omega_2] .$$

Интегрируя это равенство по односвязному куску Γ поверхности F с простым гладким контуром $R(F)$ и используя формулу Грина, найдем

$$\oint_{R(\Gamma)} (\bar{a}_1 \Omega_1 + \bar{a}_2 \Omega_2) = \frac{1}{k} \iint_{\Gamma} \bar{a}_0 \{[\sigma_1 \Omega_1] + [\sigma_2 \Omega_2]\} + \iint_{\Gamma} \bar{a}_3 [\Omega_1 \Omega_2] \ . \tag{14}$$

Это и есть искомая интегральная формула. При $k \to \infty$ эта формула дает одну из интегральных формул К. Гротемейера для поверхностей в евклидовом пространстве [6], [8].

6. Однозначная определенность шапочек в ${}^1S_3$.

Применим интегральную формулу (13) к доказательству однозначной определенности шапочек в пространстве Лобачевского. Введем следующее

Определение. Шапочкой F называют поверхность

$$\bar{x} = \bar{x}(u, v), \ (\bar{x}, \bar{x}) = -k^2 ,$$

удовлетворяющую следующим требованиям:

1. F односвязная и трижды непрерывно дифференцируема,

2. Граница $R(F)$ поверхности F есть плоская, выпуклая, дважды непрерывно дифференцируемая кривая,

3. F обладает кривизной $K > -\frac{1}{k^2}$,

4. F взаимно однозначно ортогонально проектируется на плоскость граничной кривой $R(F)$.

Пусть F есть шапочка с плоской границей $R(F)$. Ориентируем F единичным вектором $\bar{a}_3$ ее нормали, направленным внутри F . Пусть $\bar{e}$ - единичный вектор нормали плоскости края $R(F)$, направленный в полупространство, определяемое этой плоскостью, не содержащее точек F . Тогда на F

$$(\bar{e}, \bar{a}_3) \geqslant 0 .$$

Выберем на $R(F)$ направление обхода так, чтобы

$$\bar{e} = \bar{\beta} ,$$

где $\bar{\beta}$ - вектор бинормали края $R(F)$; $\{\bar{x}; \bar{n}_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ - его сопровождающий репер. Рассмотрим вдоль $R(F)$ поверхностную полосу на F ; ее сопровождающий репер $\{\bar{x}; \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3\}$ построим так, чтобы

$$\tilde{a}_1 = \bar{\tau} , \quad \tilde{a}_3 = \bar{a}_3 .$$

Учитывая это, деривационные формулы кривой (1) и деривационные формулы полосы (2), а также тождественно выполняющееся вдоль $R(F)$ равенство

$$\tilde{a}_0 = \bar{n}_0 ,$$

получим

$$\bar{\nu} = \frac{k_g}{k} \tilde{a}_2 - \frac{k_n}{k} \tilde{a}_3 ,$$

или

$$\bar{\nu} = \bar{a}_2 \cos\varphi + \bar{a}_3 \sin\varphi ,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{k_g}{k} , \quad \sin\varphi = -\frac{k_n}{k}$$

а φ - угол между главной нормалью кривой $R(F)$ и вектором $\tilde{a}_2$ тангенциальной нормали полосы. Нетрудно видеть, что вдоль $R(F)$

$$\bar{e} = \bar{\beta} = -\tilde{a}_2 \sin\varphi + \bar{a}_3 \cos\varphi = -\tilde{a}_2 \sin\varphi + \tilde{a}_3 \cos\varphi$$

и потому

$$(\bar{e}, \bar{a}_3) = \cos\varphi \geqslant 0 .$$

Нетрудно убедиться, что вдоль $R(F)$ имеет место неравенство

$$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

Справедлива следующая

Теорема. Две изометричные шапочки F и F^{x} с границами $R(F)$ и $R(F^{x})$ необходимо или конгруентны, или симметричны.

Доказательство. Применим к F и F^{x} интегральную формулу (14), предварительно умножив ее скалярно на $\bar{e}$, тогда, учитывая, что вдоль $R(F)$

$$(\bar{e}, \tilde{a}_1) = (\bar{e}, \bar{a}_1) = (\bar{\beta}, \bar{\tau}) = 0 ,$$

$$(\bar{e}, \tilde{a}_0) = (\bar{e}, \bar{a}_0) = (\bar{\beta}, \bar{p}_0) = 0 ,$$

$$(\bar{e}, \tilde{a}_2) = (\bar{e}, \bar{a}_2) = -\sin\varphi ,$$

получим

$$\iint_F (\bar{e}, \bar{a}_3)[\Omega_1 \Omega_2] = -\oint_{R(F)} \sin\varphi \cdot \Omega_2 .$$

Поменяв ролями F и F^{x}, найдем

$$\iint_F (\bar{e}^{x}, \bar{a}_3^{x})[\Omega_1 \Omega_2] = \int_{R(F)} \sin\varphi^{x} \cdot \Omega_2 .$$

Почленное сложение двух последних равенств, дает

$$\iint_F \{(\bar{e}, \bar{a}_3) + (\bar{e}^{x}, \bar{a}_3^{x})\}[\Omega_1 \Omega_2] =$$

$$= -\oint_{R(F)} (\sin\varphi - \sin\varphi^{x})(k_n - k_n^{x})\, ds .$$

Положив

$$L = (\sin\varphi - \sin\varphi^{x})(k_n - k_n^{x})$$

будем иметь

$$(15) \quad \iint_F \{(\bar{e}, \bar{a}_3) + (\bar{e}^{x}, \bar{a}_3^{x})\}[\Omega_1 \Omega_2] = \oint_{R(F)} L\, ds .$$

Далее рассуждая так как в [8, стр.286] убедимся, что и здесь $L \leq 0$. Но тогда из (15), получаем

$$(16) \quad \iint_F \{(\bar{e}, \bar{a}_3) + (\bar{e}^{x}, \bar{a}_3^{x})\}[\Omega_1 \Omega_2] \geq 0 .$$

Но так как

$$(\bar{e}, \bar{a}_3) \geq 0, \ (\bar{e}^*, \bar{a}_3^*) \geq 0$$

и по лемме

$$[\Omega_1 \Omega_2] \leq 0$$

то

$$\{(\bar{e}, \bar{a}_3) + (\bar{e}^*, \bar{a}_3^*)\} [\Omega_1 \Omega_2] \leq 0 .$$

Отсюда и из (16) следует $[\Omega_1 \Omega_2] = 0$ а по лемме $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, что и требовалось.

Замечание. Проведенные выше рассуждения без особого труда можно перенести и на эллиптическое пространство.

Литература

[1] А.В. ПОГОРЕЛОВ: Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве, Изд-во Харьковского у-та, 1960.

[2] Г.Н. ГАЮБОВ: а) Изометрическое преобразование поверхностей в гиперболическом пространстве, Труды ТашГУ 228(1963),

в) Некоторые вопросы теории поверхностей в гиперболическом пространстве, Труды ТашГУ 245(1964),

c) Однозначная определенность бесконечных выпуклых поверхностей в гиперболическом пространстве, Труды ТашГУ 228(1963),

d) О жесткости выпуклых поверхностей в гиперболическом пространстве, Докл.АН УзССР № 1(1965).

[3] Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД: Неевклидовы геометрии, Москва, 1955.

[4] С.П. ФИНИКОВ: Метод внешних форм Картана, Москва-Ленинград, 1948.

[5] Х. ФРАНК: Построение дифференциальной геометрии в пространстве Лобачевского методом внешних форм, Сибирский матем.журнал 2(1961),600-621.

[6] K.P. GROTHEMEYER: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform, Mathematische Zeitschrift 55(1952),253-268.

[7] В. БЛЯШКЕ: Введение в дифференциальную геометрию, Москва, 1957.

[8] K.P. GROTHEMEYER: Zur eindeutigen Bestimmtheit konvexer Mützen, Arch.Math. 6(1955),454-461.

Gos.Universitet
Rostov na Donu
SSSR

(Oblatum 2.6.1969)