Alexander Kratochvíl

Les méthodes approximatives de la solution des équations elliptiques non linéaires

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 3, 455--510

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105192

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9, 3 (1968)

LES MÉTHODES APPROXIMATIVES DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES

Alexander KRATOCHVÍL, Praha

Introduction. Les méthodes approximatives sont évidemment une partie indivisible de la théorie des équations de la physique des mathématiques. Elles n'ont pas été élaboré d'une manière satisfaisante pour les équations aux dérivées partielles jusqu'à présent; cet article concevoit nouvellement le questionnaire concernat la convergence des solutions approximatives, dont l'existence nous est connue d'une autre théorie. La méthode utilisée représente une méthode de la descente la plus rapide qui promet beaucoup pour le calcul numérique en son caractère algorithmique.

Ce travail est divisé à trois paragraphes: dans le premier, on expose une généralisation d'une méthode variationelle - de la méthode de la descente la plus rapide. L'idée principale de méthode et aussi les renvois riches à la bibliographie figurent dans [5]. La méthode mentionée était développée par M.M. Vajnberg (cf.[5]) pour le cas d'un opérateur $F: X \rightarrow X'$, X étant un espace de Banach. Dans cet article, M.M. Vajnberg considère le procès

$$x_{n+1} = x_n - t_n AF(x_n) ,$$

où $A: X' \rightarrow X$ est un opérateur non-linéaire qui réalise ces deux conditions

$$(Ay,y) \geq \| y \|^2 , \quad \| Ay \| \leq a \| y \| .$$

Au paragraphe 2 on définit le problème aux limites et on expose les théorèmes principaux de l'existence de leurs solutions.

Le paragraph 3 - c'est la base de cet article; on applique ici la méthode de la descente la plus rapide à la solution des équations elliptiques non linéaires aux dérivées partielles, ce qui forme de même le but principal de ce travail. La généralisation des théorèmes de Vajnberg [5], éxécutée par le présent auteur, a été nécessaire en raison de cette aplication.

Je me serve de cette occasion pour exprimer mes remercîments à M.Jindřich Nečas, dont les conseils précieux ont beaucoup contribué à la réalisation de l'article que voici.

§ 1. Méthode de la descente la plus rapide

Désignons par X l'espace de Banach réel. On écrit les normes des divers espaces simplement $\| \dots \|$ si l'on ne risque pas d'ambiguïté.

La boule fermée du centre $x_0 \in X$ et du rayon R sera indiquée par $D_{x_0,R}$. Au lieu de $D_{0,R}$ on écrira brièvement D_R .

Soient M et N deux ensembles non vides. Le symbole $F : M \longrightarrow N$ signifie que F est une application de M dans N . On désigne par $\mathcal{R}(F)$ l'ensemble de toutes les valeurs $F(x)$.

Pour simplifier l'écriture, on va désigner la dualité entre X, X', un espace de Banach et son adjoint par (x,f) , $x \in X$, $f \in X'$. La convergence faible est notée par le symbole $x_n \rightharpoonup x_0$.

Proposition 1.1. Soit $F: X \to X'$ un opérateur potentiel, hemicontinu sur X . Soit f une fonctionnelle telle que $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, $x \in X$. Alors quels que soient $x, x_0 \in X$ on a

$$(1.1)\quad f(x) = f(x_0) + \int_0^1 (x - x_0, F(x_0 + t(x - x_0)))\,dt \ .$$

Démonstration. Il suit de la hypothèse que

$$(1.2)\qquad (h, f'(x)) = (h, F(x)) \ ,$$

quels que soient $h, x \in X$. Soient $x, x_0 \in X$. Posons $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$, $t \in (0,1)$. Donc

$$\varphi'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} [f(x_0 + t(x - x_0) + \tau(x - x_0)) -$$

$$- f(x_0 + t(x - x_0))] = (x - x_0, f'(x_0 + t(x - x_0))) \ .$$

Il en suit en vertu de (1.2) que

$$\varphi'(t) = (x - x_0, F(x_0 + t(x - x_0))) \ .$$

D'après la hypothèse de la hemicontinuité de l'opérateur F , cette fonction de la variable t est intégrable. Alors

$$\int_0^1 (x - x_0, F(x_0 + t(x - x_0)))\,dt = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt =$$

$$= \varphi(1) - \varphi(0) = f(x) - f(x_0) \ , \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Théorème 1.1</u>. Soient X un espace vectoriel normé réel, réflexif, $F: X \to X'$ un opérateur potentiel hemicontinu sur X tel que:

1^o quel que soit $h \in X$,

$$(h, F(h)) \geq \lambda(\|h\|), \tag{1.3}$$

où $\frac{\lambda(s)}{s}$ est une fonction intégrable sur $(0,R)$ quel que soit $R > 0$ et

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s} ds = +\infty ; \tag{1.4}$$

2^o quels que soient $x \in X$ et $\ell > 0$, il existe une fonction réelle $\gamma_{x,\ell}$ de la variable réelle t, croissante, continue, définie sur $\langle 0, \ell \rangle$ telle que $\gamma_{x,\ell}(0) = 0$ et

$$(h, F(x+h) - F(x)) \geq \gamma_{x,\ell}(\|h\|_B) \tag{1.5}$$

quel que soit $\|h\|_B \leq \ell$, où B est un espace de Banach tel que $X \subset B$ algébriquement et topologiquement; cela signifie que chaque élément de X appartient à B et que pour $x \in X$: $\|x\|_B \leq c_1 \|x\|_X$;

3^o il existe $\varepsilon > 0$ tel que quels que soient $R > 0$ et $x, x+h \in D_R$,

$$(h, F(x+h) - F(x)) \leq M(R) \|h\|^{1+\varepsilon}, \tag{1.6}$$

où $M(t)$ est une fonction réelle, positive, définie sur $\langle 0, +\infty)$, bornée sur chaque $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, +\infty)$;

4^o il existe un opérateur injectif $A: X' \to X$ jouissant des propriétés suivantes:

a) l'opérateur AF est borné,

b) l'opérateur reciproqué A^{-1} est continu au point $0 \in \mathcal{R}(A)$,

c) il existe $\varepsilon' > 0$ et $c_0 > 0$ tel que quel que soit $z \in X'$,

$$(1.7) \qquad (Az, z) \geq c_0 \, \| Az \|^{1+\varepsilon'} .$$

Alors l'équation $F(x) = 0$ a une solution $x_0 \in X$; cette solution est unique et la suite

$$(1.8) \qquad x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n \, AF(x_n)$$

converge vers x_0 selon la norme de B, où x_1 est quelconque élément de X,

$$(1.9) \qquad R_n = \| x_n \| + \| AF(x_n) \| ,$$

les ε_n satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &\min\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \left(\frac{c_0}{4M(R_n)} \| AF(x_n) \|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon_n \leq \\ &\leq \min\left(1, \left(\frac{c_0}{2M(R_n)} \| AF(x_n) \|^{\varepsilon'-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) . \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>. La hypothèse 2^0 entraîne l'inégalité:

$$(1.11) \qquad (h, F(x+h) - F(x)) > 0$$

quelques soient $x, h \in X$, $h \neq 0$.

On va montrer que la solution de l'équation $F(x) = 0$ est unique. Soit f une fonctionnelle telle que $F(x) =$ $= \operatorname{grad} f(x)$ (cf.[6]). Il suit de la proposition 1.1 en vertu de (1.11) que

$$f(x)-f(x_0)=\int_0^1 (t(x-x_0), F(x_0+t(x-x_0))-F(x_0))\frac{dt}{t}+$$
$$+(x-x_0, F(x_0))\geq (x-x_0, F(x_0))=(x-x_0, f'(x_0)) \quad ,$$

donc la fonctionnelle f est continue faiblement, inférieurement (cela veut dire: $v_n \rightharpoonup v \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f(v_n) \geq f(v)$), car f satisfait à l'inégalité (8.5) de [6]. L'espace X étant réfléxif, alors la boule unitée, fermée est faiblement compacte d'après le théorème de Gantmacher, Eberlein, Šmuljan (cf.[1]). Du théorème 9.2 de [6] il suit que la fonctionnelle f est bornée inférieurement sur chaque boule $D_{x_0,R}$ et qu'elle atteint son minimum dans $D_{x_0,R}$.

On obtient de (1.1) et (1.3)

$$f(x) = f(0)+\int_0^1 (tx, F(tx))\frac{dt}{t} \geq f(0) + $$
$$+\int_0^1 \frac{\lambda(t\|x\|)}{t}\, dt \quad .$$

Posons $\|x\| = R$; alors

$$(1.12)\quad f(x)\geq f(0)+\int_0^1 \frac{\lambda(tR)}{t}\, dt = f(0)+\int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\, ds \quad .$$

Il en suit en vertu de (1.4) l'existence de $R > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ sur la sphère D_R . On a d'après le théorème 9.3 de [6]: il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $\|x_0\| \leq R$ et

$$0 = \operatorname{grad} f(x_0) = F(x_0) \ .$$

Cette solution est unique, car si l'on suppose l'existence de la solution $x_1 \neq x_0$, on obtient de (1.11):

$$0 = (x_1 - x_0, F(x_1) - F(x_0)) > 0 \ ,$$

ce qui n'est pas possible.

D'après (5.8) de [6] on a:

$$f(x_n)-f(x_{n+1})=(x_n-x_{n+1},F(x_{n+1}+\tau(x_n-x_{n+1})))=$$

$$=-(x_{n+1}-x_n,F(x_n))-\frac{1}{1-\tau}((1-\tau)(x_{n+1}-x_n),$$

$$F(x_{n+1}-\tau(x_{n+1}-x_n))-F(x_n)),$$

où $0<\tau<1$.

Il suit de (1.8),(1.9) et (1.10) que

$$\|x_{n+1}\|\le\|x_n\|+\varepsilon_n\|AF(x_n)\|\le\|x_n\|+\|AF(x_n)\|=R_n,$$

$$\|x_n+(1-\tau)(x_{n+1}-x_n)\|=\|x_{n+1}-\tau(x_{n+1}-x_n)\|\le$$

$$\le(1-\tau)\|x_{n+1}\|+\tau\|x_n\|\le(1-\tau)R_n+\tau R_n=R_n.$$

Alors d'après la hypothèse 3° et (1.7),(1.8),(1.9), (1.10) on a:

$$f(x_n)-f(x_{n+1})\ge\varepsilon_n(AF(x_n),F(x_n))-\frac{1}{1-\tau}M(R_n)\cdot$$

$$\cdot\|(1-\tau)(x_{n+1}-x_n)\|^{1+\varepsilon}\ge c_0\varepsilon_n\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}-$$

$$-M(R_n)(1-\tau)^{\varepsilon}\|x_{n+1}-x_n\|^{1+\varepsilon}=c_0\varepsilon_n\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}-$$

$$-M(R_n)(1-\tau)^{\varepsilon}\varepsilon_n^{1+\varepsilon}\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon}>$$

$$>c_0\varepsilon_n\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}-M(R_n)\varepsilon_n^{1+\varepsilon}\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon}=$$

$$=\varepsilon_n\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}\{c_0-M(R_n)\varepsilon_n^{\varepsilon}\|AF(x_n)\|^{\varepsilon-\varepsilon'}\}\ge$$

$$\ge\varepsilon_n\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}\{c_0-\frac{c_0}{2}\}=\frac{c_0}{2}\varepsilon_n\|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'}>0.$$

Pendant la démonstration et aussi dans la formulation de ce théorème on suppose $AF(x_n) \neq 0$ quel que soit n entier naturel. Si $AF(x_{n_0}) = 0$, puis $F(x_{n_0}) = 0$ en vertu de 4c). Il suit de l'unicité de la solution que $x_{n_0} = x_0$. On peut aussi supposer $x_{n+1} \neq x_n$. Si $x_{n_0+1} = x_{n_0}$, puis d'après (1.8) et (1.10) $AF(x_{n_0}) = 0$ et on démontre de la même façon que $x_{n_0} = x_0$.

Alors on supposera $x_{n+1} \neq x_n \neq x_0$. Posons $r_n = f(x_n) - f(x_0)$. En vertu de ces dernières inegalités on obtient

$$(1.13)\quad r_n - r_{n+1} = f(x_n) - f(x_{n+1}) > \frac{c_0}{2}\,\varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} > 0 .$$

Il suit de (5.8) de [6],(1.11) et de la relation $F(x_0) = 0$ que

$$r_n = f(x_n) - f(x_0) = \frac{1}{\tau}\left(\tau(x_n - x_0),\ F(x_0 + \tau(x_n - x_0)) - F(x_0)\right) > 0 .$$

Donc la suite $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$, formée d'éléments positifs,décroissante, converge vers un élément $r \geq 0$. Alors en vertu de (1.13) il existe $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n \|AF(x_n)\|^{1+\varepsilon'} = 0$.

D'après de (1.12) et (1.4) on a $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$ et on sait d'après (1.13) que la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante, donc la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, donc $\{AF(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée en vertu de 4a). D'après la définition des nombres positifs R_n la suite $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ est aussi bornée, c'est-à-dire il existe $R_0 > 0$ tel que pour chaque n : $0 \leq R_n \leq R_0$. Il en suit en vertu de la hypothèse 3^0 l'existence de $M_0 > 0$ tel que $0 < M(R_n) \leq M_0$ quel que soit n entier naturel.

Maintenant, on va construire deux sous-suites: $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ et $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ces n, pour lesquels on a
$\varepsilon_n^{\varepsilon} \geq \dfrac{c_0}{4M(R_n)} \|AF(x_n)\|^{\varepsilon'-\varepsilon}$,
on énumera n_k. Les autres n, c'est-à-dire pour lesquels on a dans (1.10)

$$\varepsilon_n^{\varepsilon} \geq \frac{1}{2} \quad ,$$

on énumera n_j .

Alors

$$\varepsilon_{n_k}^{\varepsilon} \geq \frac{c_0}{4M(R_{n_k})} \| AF(x_{n_k}) \|^{\varepsilon'-\varepsilon} \geq \frac{c_0}{4M_0} \| AF(x_{n_k}) \|^{\varepsilon'-\varepsilon} \quad ,$$

donc

$$\varepsilon_{n_k} \geq \left(\frac{c_0}{4M_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \| AF(x_{n_k}) \|^{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\varepsilon}} \quad .$$

Produissons cette inégalité par le nombre $\| AF(x_{n_k}) \|^{1+\varepsilon'}$:

$$\varepsilon_{n_k} \| AF(x_{n_k}) \|^{1+\varepsilon'} \geq \left(\frac{c_0}{4M_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \| AF(x_{n_k}) \|^{\varepsilon' + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \quad .$$

Alors $\lim\limits_{k \to \infty} AF(x_{n_k}) = 0$, donc d'après la hypothèse 4b): $\lim\limits_{k \to \infty} F(x_{n_k}) = 0$.

On sait que $\varepsilon_{n_j} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ quel que soit j entier naturel. Il suit de la convergence de la suite $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ en vertu de (1.13) $\lim\limits_{j \to \infty} AF(x_{n_j}) = 0$, donc $\lim\limits_{j \to \infty} F(x_{n_j}) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = 0$.

Pour finir la démonstration on utilisera la hypothèse 2^0. On a démontré que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Alors il existe un nombre $R_0 > 0$ tel que $x_0 \in D_{R_0}$ et $x_n \in D_{R_0}$ quel que soit n . Alors on a: $\| x_0 \|_B \leq c_1 \| x_0 \| \leq$ $\leq c_1 R_0$, $\| x_n \|_B \leq c_1 R_0$ pour tout n . De la hypothèse 2^0, il suit l'inégalité

$$\gamma_{x_0, 2c_1 R_0}(\| x_n - x_0 \|_B) \leq (x_n - x_0, F(x_n) - F(x_0)) =$$

$$= (x_n - x_0, F(x_n)) \leq \| x_n - x_0 \| \, \| F(x_n) \| \leq 2R_0 \| F(x_n) \| \quad .$$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \|_B = 0$, car $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = 0$.

Remarque 1.1. On a démontré

$$\gamma_{x_0, 2c_1 R_0}(\|x_n - x_0\|_B) \leq 2 R_0 \|F(x_n)\| ,$$

où R_0 est le rayon quelconque de la boule D_{R_0} telle que tous les points $x_n \in D_{R_0}$ et $x_0 \in D_{R_0}$.

La condition (1.5) du théorème 1.1 soit remplacée par

$$(1.14) \qquad (h, F(x+h) - F(x)) \geq \gamma_{x,\ell}(\|h\|) \cdot \|h\| ,$$

alors

$$\gamma_{x_0, 2R_0}(\|x_n - x_0\|) \leq \|F(x_n)\| .$$

En effet,

$$\|x_n - x_0\| \cdot \gamma_{x_0, 2R_0}(\|x_n - x_0\|) \leq (x_n - x_0, F(x_n) - F(x_0)) =$$

$$= (x_n - x_0, F(x_n)) \leq \|x_n - x_0\| \, \|F(x_n)\| .$$

La condition (1.14) est mieux que (1.5),car la fonction $\gamma_{x,\ell}$ est habituellement définie sur $\langle 0, +\infty)$ et ne dépend ni sur x ni ℓ , donc nous ne devons pas énumerer R_0 .

Remarque 1.2. La condition (1.5) du théorème 1.1 soit remplacée par (1.11). Alors il existe la solution unique $x_0 \in X$ de l'équation $F(x) = 0$, la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par la relation de récurrence (1.8) est bornée et $\lim_{n \to \infty} \|F(x_n)\| = 0$, c'est-à-dire c'est la suite minimisante pour la fonctionnelle $\varphi(x) = \|F(x)\|$.

En effet, on a utilisé la hypothèse 2° dans la démonstration du théorème 1.1 seulement pour vérifier que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x_0 selon la norme de B . Auparavant on a utilisé seulement la condition (1.11) qui est une conséquence de (1.5).

Remarque 1.3. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $F(x) = 0$, on utilise seulement la hypothèse 1°, la condition (1.11) et la hypothèse de la hemicontinuité de l'opérateur F. Pour démontrer la convergence de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par (1.8) vers x_0 on n'a pas utilisé la condition 1°, mais une conséquence, comme suit: $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 1.4. L'assertion du théorème 1.1 ne change pas si l'on remplacera la hypothèse 1° par la suivante:

Il existe $y_0 \in X$ tel que pour tout $h \in X$

$$(1.15) \qquad (h, F(y_0 + h) - F(y_0)) \geq \lambda(\|h\|) ,$$

où $\frac{\lambda(s)}{s}$ est une fonction intégrable sur $(0,R)$ quel que soit $R > 0$ et

$$(1.16) \qquad \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\, ds = \alpha ,$$

α quelconque de $(\|F(y_0)\|, +\infty\rangle$.

Démonstration. D'après la remarque 1.3 on sait qu'il suffit de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $F(x) = 0$ et l'assertion $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

De la même façon que dans le théorème 1.1 on montre que la fonctionnelle f est continue faiblement, inférieurement, bornée inférieurement sur chaque boule $D_{x_0,R}$ et elle atteint son minimum dans $D_{x_0,R}$. De la condition (1.15) et (1.1) il suit que

$$f(x)=f(y_0)+\int_0^1(x-y_0, F(y_0+t(x-y_0)))\,dt =$$
$$= f(y_0)+\int_0^1(t(x-y_0), F(y_0+t(x-y_0))-F(y_0))\frac{dt}{t} +$$
$$+(x-y_0, F(y_0)) \geq f(y_0)+(x-y_0, F(y_0))+\int_0^1\lambda(t\|x-y_0\|)\frac{dt}{t} .$$

Posons $\|x-y_0\| = R$, donc

$$f(x) \geq f(y_0) - R\|F(y_0)\| + \int_0^1 \lambda(tR)\frac{dt}{t} =$$
$$= f(y_0) - R\|F(y_0)\| + \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\,ds = f(y_0) +$$
$$+ R(-\|F(y_0)\| + \frac{1}{R}\int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\,ds) .$$

Il en suit en vertu de (1.16) que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$ et aussi que $f(x) > f(y_0)$ sur la sphère $D_{y_0,R}$ pour $R > 0$ assez grand, donc d'après le théorème 9.3 de [6] il existe $x_0 \in X$ tel que $\|x_0 - y_0\| < R$ et

$$0 = \operatorname{grad} f(x_0) = F(x_0) .$$

Cette solution est unique en vertu de la condition (1.11).

<u>Remarque 1.5</u>. Si l'opérateur F est borné, l'opérateur AF est aussi borné.

En effet, d'après la hypothèse 4c) on a:

$$\|Az\|^{1+\varepsilon'} \leq \frac{1}{C_0}(Az, z) \leq \frac{1}{C_0}\|Az\|\cdot\|z\| ,$$

alors

$$\|Az\| \leq (\frac{1}{C_0})^{\frac{1}{\varepsilon'}}\|z\|^{\frac{1}{\varepsilon'}} ,$$

donc l'opérateur A est borné.

Remarque 1.6. Supposons que pour tout $h \in X$

(1.17) $\quad (h, F(h)) \geq \|h\| \gamma(\|h\|)$,

il existe $y_0 \in X$ tel que quel que soit $h \in X$

(1.18) $(h, F(y_0+h)-F(y_0)) \geq \|h\| \cdot \gamma(\|h\|)$,

respectivement, où $\gamma(Rt)$ est une fonction intégrable sur $(0,1)$ quel que soit $R > 0$ et telle que

(1.19) $\lim_{R\to+\infty} R\int_0^1 \gamma(tR)dt = +\infty$,

(1.20) $\lim_{R\to+\infty} \int_0^1 \gamma(tR)dt = \alpha, \quad \alpha \in (\|F(y_0)\|, +\infty\rangle$,

respectivement. Alors les conditions (1.17) et (1.19) sont équivalentes aux conditions (1.3) et (1.4), (1.18) et (1.20) à (1.15) et (1.16), respectivement.

En effet, posons $\lambda(t) = t\gamma(t)$, $s = t \cdot R$,

alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s} ds = \lim_{R\to+\infty} R\int_0^1 \gamma(tR)dt = +\infty \quad ,$$

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s} ds = \lim_{R\to+\infty} \int_0^1 \gamma(tR)dt = \alpha \ ,$$

$\alpha \in (\|F(y_0)\|, +\infty\rangle$, respectivement.

Dans le théorème 1.1 on n'a supposé ni la continuité de l'opérateur F ni l'existence de la différentielle de Gâteaux de cet opérateur. Si l'opérateur F a la différentielle de Gâteaux, alors l'assertion du théorème 1.1 est valable en changeant ses hypothèses par les autres que nous pouvons vérifier plus facilement. Cela sera montré au théorème prochain:

<u>Théorème 1.2</u>. Soient X un espace vectoriel normé réel, réflexif, $F: X \to X'$ un opérateur potentiel, ayant une différentielle de Gâteaux au chaque point x de X tel que

1^o il existe $y_o \in X$ tel que quels que soient $h \in X$ et $\tau \in (0, 1)$,

$$(1.21) \qquad (h, F'(y_o + \tau h) h) \geq \lambda(\|h\|) ,$$

où $\frac{\lambda(s)}{s}$ est une fonction intégrable sur $(0,R)$ quel que soit $R > 0$ et

$$(1.16) \qquad \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s} ds = \alpha ,$$

α quelconque de $(\| F(y_o) \| , + \infty \rangle$;

2^o quels que soient $x \in X$ et $\ell > 0$, il existe une fonction réelle $\gamma_{x,\ell}$ de la variable réelle t, croissante et continue sur $\langle 0, \ell \rangle$ telle que $\gamma_{x,\ell}(0) = 0$ et

$$(1.22) \qquad (h, F'(x + \tau h) h) \geq \gamma_{x,\ell}(\|h\|_B)$$

quels que soient $0 < \tau < 1$ et $\|h\|_B \leq \ell$, où B est un espace de Banach tel que $X \subset B$ algébriquement et topologiquement;

3^o quels que soient $R > 0$, $x \in D_R$ et h_1, $h_2 \in X$, jouissant de la condition $h_1 = h_2$ ou $h_1 = \tau x$, où $0 < \tau < 1$, on a

$$(1.23) \qquad (h_2, F'(x) h_1) \leq M(R) \|h_1\| \|h_2\| ,$$

où $M(t)$ est une fonction réelle, positive, définie sur $\langle 0, +\infty)$, bornée sur chaque $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, +\infty)$;

4° il existe un opérateur injectif $A\colon X' \to X$ jouissant des propriétés suivantes:

a) l'opérateur reciproqué A^{-1} est continu au point $0 \in \mathcal{R}(A)$.

b) il existe $\varepsilon' > 0$ et $c_0 > 0$ tel que quel que soit $z \in X'$,

$$(1.7) \qquad (Az, z) \geq c_0 \, \| Az \|^{1+\varepsilon'} .$$

Alors l'équation $F(x) = 0$ a une solution $x_0 \in X$; cette solution est unique et la suite

$$(1.8) \qquad x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n \, A F(x_n)$$

converge vers x_0 selon la norme de B, où x_1 est un élément quelconque de X,

$$(1.9) \qquad R_n = \| x_n \| + \| AF(x_n) \|$$

et ces ε_n satisfont aux conditions suivantes:

$$(1.24) \qquad \begin{aligned} &\min \left(\frac{1}{2}, \frac{c_0}{4M(R_n)} \| AF(x_n) \|^{\varepsilon' - 1} \right) \leq \varepsilon_n \leq \\ &\leq \min \left(1, \frac{c_0}{2M(R_n)} \| AF(x_n) \|^{\varepsilon' - 1} \right) . \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>. On utilise la proposition (3.2) de [6] pour vérifier les hypothèses du théorème 1.1.

D'après une proposition de [6] (cf.page 63) on a que l'opérateur F est hemicontinu sur X.

Vérifions l'inégalité (1.15) de la remarque 1.4. Pour tout $h \in X$ on a:

$$(h, F(y_0 + h) - F(y_0)) = (h, F'(y_0 + \tau h) h) \geq \lambda (\| h \|) ,$$

où la fonction $\lambda(s)$ satisfait à la condition (1.16).

Quels que soient $x \in X$ et $\ell > 0$, il existe, d'après la hypothèse 2°, la fonction $\gamma_{x,\ell}$ croissante, continue sur $\langle 0, \ell \rangle$ telle que $\gamma_{x,\ell}(0) = 0$ et quel que soit $\|h\|_B \leq \ell$ on a

$$(h, F(x+h) - F(x)) = (h, F'(x+\tau h)h) \geq \gamma_{x,\ell}(\|h\|_B) .$$

Donc l'opérateur F satisfait à la hypothèse 2° du théorème 1.1.

Soient $x, x+h \in D_R$. Pour tout $0 < \tau < 1$ on a

$$\|x + \tau h\| = \|(1-\tau)x + \tau(x+h)\| \leq (1-\tau)\|x\| +$$
$$+ \tau\|x+h\| \leq (1-\tau)R + \tau R = R .$$

Alors de la hypothèse 3° il suit que

$$(h, F(x+h) - F(x)) = (h, F'(x+\tau h)h) \leq M(R)\|h\|^2 .$$

Donc l'inégalité (1.6) est vérifiée et la fonction M(t) satisfait aux conditions du théorème 1.1.

Il y reste à démontrer que l'opérateur AF est borné. D'après la remarque 1.5 il suffit de montrer que l'opérateur F est borné.

Il existe $h \in X$, $\|h\| = 1$ tel que

$$\frac{1}{2}\|F(x) - F(0)\| \leq (h, F(x) - F(0)) ,$$

car

$$\|F(x) - F(0)\| = \sup_{\|h\|=1} (h, F(x) - F(0)) .$$

D'après la proposition 3.2 de [6] il existe $0 < \tau < 1$ tel que

$$(h, F(x) - F(0)) = (h, F'(\tau x)x) .$$

De ces deux relations il suit l'inégalité

$$\|F(x)-F(0)\| \leq 2(h, F'(\tau x)x).$$

Alors

$$\|F(x)\| \leq \|F(x)-F(0)\| + \|F(0)\| \leq \|F(0)\| +$$

$$+ 2(h, F'(\tau x)x) \leq \|F(0)\| + 2M(R)\|x\|\,\|h\| =$$

$$= \|F(0)\| + 2M(R)\|x\| .$$

On reçoit l'assertion de ce théorème en vertu du théorème 1.1 et de la remarque 1.4.

Remarque 1.7. Si la fonction $\gamma_{x,\ell}$ de la hypothèse 2° du théorème 1.1 ou 1.2 est définie sur $\langle 0, +\infty)$ et ne dépend ni sur x ni ℓ, alors il suffit de supposer que $X \subset B$ seulement algébriquement.

§ 2. Problème aux limites

On utilisera souvent le lemme suivant:

Lemme 2.1. Soit s un entier naturel. Pour tout $i = 1,2,\ldots, s$ soit a_i le nombre réel positif. Alors

1° $\left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^{r} < s^{r-1} \sum_{i=1}^{s} a_i^{r}$ quel que soit $r > 1$;

2° $\sum_{i=1}^{s} a_i^{r} < s \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^{r}$ quel que soit $r > 0$.

Démonstration. 1° cf.[2], Théorème 65; 2° l'inégalité $a_i^{r} < \left(\sum_{j=1}^{s} a_j\right)^{r}$ entraîne la relation demandée.

On désigne par E_N l'espace euclidien réel de dimension N avec le point générique $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$; on pose $|x| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Par Ω nous désignons un domaine borné de l'espace E_N, à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne (cf. [4]). Le symbole $\overline{\Omega}$ signifie la fermeture de Ω.

$\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ signifie l'espace des fonctions réelles indéfiniment continûment différentiables dans Ω et continûment prolongeables ainsi que toutes leurs dérivées sur $\overline{\Omega}$.

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ des fonctions à support compact dans Ω.

Soit $i = (i_1, i_2, \ldots, i_N)$ un vecteur dont les composantes sont des entiers nonnégatifs. On pose

$$|i| = \sum_{n=1}^{N} i_n .$$

<u>Lemme 2.2</u>. Soient k un entier naturel, $\varkappa$ le nombre des multiindices $|i| \leq k$. Alors

$$\varkappa = \sum_{j=0}^{k} \binom{N+j-1}{j} . \tag{2.1}$$

En effet, l'assertion est une facile conséquence du théorème 4.2 de [4 bis], chap. 1, § 4.

On introduit comme d'habitude l'espace $W_m^{(k)}(\Omega)$, avec la norme

$$\|u\|_{W_m^{(k)}(\Omega)} \equiv \|u\|_{W_m^{(k)}} = \Big(\int_{\Omega} \sum_{|i|\leq k} |D^i u(x)|^m \, dx\Big)^{\frac{1}{m}} ,$$

où la notation usuelle

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}}$$

est utilisée.

On désigne encore par $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$

Nous avons, cf. par exemple J. Nečas [4]:

$\overline{\mathcal{E}(\bar{\Omega})} = W_m^{(k)}(\Omega)$, $1 \leq m < +\infty$. Si $km < N$, $W_m^{(k)}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ algébriquement et topologiquement avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{m} - \frac{k}{N}$. Pour $\frac{1}{q} > \frac{1}{m} - \frac{k}{N}$ la transformation identique de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans L_q est compacte. Si $km = N$, l'assertion est vraie pour chaque $\frac{1}{q} > 0$ et la transformation identique est compacte. Si $km > N$, $W_m^{(k)}(\Omega) \subset C^{(0)}(\bar{\Omega})$ ($C^{(0)}(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$) algébriquement et topologiquement et la transformation identique est compacte.

Une conséquence facile de ces théorèmes d'immersion de Sobolev sera l'assertion suivante:

La transformation identique de $W_m^{(k)}(\Omega)$ à $W_m^{(k-1)}(\Omega)$ est compacte.

Voici un théorème sur les normes équivalentes:

__Théorème 2.1.__ Soient $m \geq 1$ et k entier naturel. Quel que soit $u \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{W_m^{(k)}} \leq c \left(\sum_{|i|=k} \int_\Omega |D^i u(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} , \tag{2.2}$$

où

$$c = \left(1 + \sum_{j=0}^{k-1} (N + j)_j^{-1} (2a)^{(k-j)m}\right)^{\frac{1}{m}} , \tag{2.3}$$

a est une longueur d'une arète de quelconque cube contenant le domaine Ω.

__Démonstration.__ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Le domaine Ω étant borné, on peut placer Ω dans un cube $|x_i| < a$,

$i = 1,2,\dots, N$. On a

$$(2.4)\quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_N)\, d\xi_1 \ .$$

Si $m > 1$, donc par l'inégalité de Hölder on obtient

$$|\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^m \leq (2a)^{m-1} \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_N)\right|^m d\xi_1 \ .$$

En intégrant cette dernière inégalité en x_1 dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$, on obtient

$$\int_{-a}^{a} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^m dx_1 \leq (2a)^m \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_N)\right|^m dx_1 \ .$$

Par intégration de cette inégalité en variables x_2, $x_3, \dots, x_N$, dans chacun des intervalles $\langle -a, a\rangle$, on obtient

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^m dx \leq (2a)^m \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\right|^m dx \ .$$

De cette inégalité on déduit:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^m dx \leq (2a)^{km} \int_\Omega \left|\frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^k}\right|^m dx \leq$$

$$\leq (2a)^{km} \sum_{|i|=k} \int_\Omega |D^i \varphi(x)|^m dx \ .$$

En appliquant la dernière inégalité à $D^i \varphi$ pour $|i| \leq k$, on obtient (2.2).

Si $m = 1$, donc d'après (2.4) nous avons

$$|\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)| \leq \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_N)\right| d\xi_1 \ ,$$

d'où suit de la même façon l'inégalité (2.2).

Il faut rappeler que dans les paragraphes 2 et 3 le symbole $\varkappa$ signifie le nombre du lemme 2.2, k entier nonnégatif, $m > 1$ réel et $m' = \dfrac{m}{m-1}$.

Soit β un multiindex. On définit un vecteur $\xi \in E_{\varkappa}$ par $\xi = \{\xi_j \,;\, |j| \leq k\}$. Le vecteur $\xi(u)$ signifie $\xi(u) = \{D^j u \,;\, |j| \leq k\}$.

On suppose

1° les fonctions réelles $a_i(x, \xi)$ sont définies sur $\Omega \times E_{\varkappa}$ pour $|i| \leq k$, continues pour presque tous x de Ω en ξ, mesurables en x pour ξ fixé;

2° il existe $c > 0$, $m > 1$ tels que pour presque tous x de Ω et ξ quelconque de $E_{\varkappa}$ on a

(2.5) $\quad |a_i(x, \xi)| \leq c\,(1 + \sum_{|j| \leq k} |\xi_j|^{m-1})$.

<u>Lemme 2.3</u> (cf.[3],lemme 1.1). Pour $|i| \leq k$ l'opérateur $a_i(x, \xi)$ résulte continue de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_{m'}(\Omega)$.

On se donne:

a) Un ensemble linéaire $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{E}(\overline{\Omega})$ et désignons par $V = \overline{\mathcal{V}}$, la fermeture dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Alors on a $\mathring{W}_m^{(k)} \subset V \subset W_m^{(k)}(\Omega)$.

b) Soit Q un espace de Banach, contenant $\mathcal{D}(\Omega)$, avec $\mathcal{D}(\Omega)$ dense. Supposons que $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega) \subset Q$ algébriquement et topologiquement.

c) On se donne encore $u_0 \in W_m^{(k)}(\Omega)$ et une fonctionnelle $g \in V'$ (espace dual) telle que $g(v) = 0$ pour $v \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ et encore $f \in Q'$. Désignons

$$f(v) = \langle v, f \rangle_{\Omega}\,, \quad g(v) = \langle v, g \rangle_{\partial\Omega}\,.$$

Le problème aux limites: on cherche $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$ de sorte que

I) $u - u_0 \in V$,

II) $\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u)) dx = \langle v, f \rangle_\Omega + \langle v, g \rangle_{\partial\Omega}$

quel que soit $v \in V$.

Formellement, on obtient une équation non-linéaire dans Ω :

$$\sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_i(x, \xi(u))) = f(x)$$

dans la forme divergentielle.

Exemple 2.1. Soit $m > 1$; prenons pour $|i| \leq k$

$$a_i(x, \xi) = (1 + \sum_{|j|\leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1} \xi_i \quad . \tag{2.6}$$

Soient Q et V les espaces quelconques satisfaisant aux conditions a),b). Soient $\langle v, g \rangle_{\partial\Omega} \equiv 0$, $u_0 = 0$ et f quelconque de Q' .

Résoudre ce problème signifie de trouver une fonction $u \in V$ telle que quel que soit $v \in V$,

$$\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x) D^i u(x) (1 + \sum_{|j|\leq k} (D^j u(x))^2)^{\frac{m}{2}-1} dx = \langle v, f \rangle_\Omega \; . \tag{2.7}$$

Exemple 2.2. Soit $m > 1$; prenons pour $|i| \leq k$

$$a_i(x, \xi) = |\xi_i|^{m-1} \operatorname{sign} \xi_i \quad . \tag{2.8}$$

Soient Q et V les espaces quelconques satisfaisant aux conditions a),b). Soient $\langle v, g \rangle_{\partial\Omega} \equiv 0$, $u_0 = 0$ et f quelconque de Q' .

Résoudre ce problème signifie de trouver une fonction $u \in V$ telle que quel que soit $v \in V$,

$$\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x) |D^i u(x)|^{m-1} \operatorname{sign}(D^i u(x)) dx = \langle v, f \rangle_\Omega \, . \tag{2.9}$$

Définition 2.1. Soient V l'espace satisfaisant à la condition a), $a_i(x, \xi)$ satisfaisant (2.5) et la condition 2° . On définit l'opérateur $T: V \to V'$ par

(2.10) $$(v, Tu) = \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u+u_0))\, dx \quad ,$$

où $v, u \in V$ quelconques et u_0 est un élément de la définition du problème.

Définition 2.2. Nous dirons que l'opérateur T est totalement monotone strictement, si pour chaque $v, w \in$ $\in V$, $v \neq w$, la condition

(2.11) $$(w - v, Tw - Tv) > 0 ,$$

c'est-à-dire

(2.11) $$\int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i(w(x) - v(x)) [a_i(x, \xi(u_0 + w)) - a_i(x, \xi(u_0 + v))]\, dx > 0$$

est satisfaite.

Définition 2.3. Nous dirons que la condition de la coercitivité faible pour l'opérateur T est satisfaite, si pour chaque $v \in V$ on a:

(2.12) $$(v, Tv) \ge \lambda(\| v \|) ,$$

c'est-à-dire

(2.12) $$\int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + v))\, dx \ge \lambda(\| v \|) \quad ,$$

où $\frac{\lambda(s)}{s}$ est sommable sur chaque intervalle $(0,R)$, $R > 0$ et si

(2.13) $$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\, ds = +\infty \quad .$$

Définition 2.4. Nous dirons que la condition de symétrie pour les fonctions a_i est satisfaite, si presque partout dans Ω pour chaque fonction $\varphi \in \mathcal{D}(E_{\varkappa})$ on a

$$(2.14)\qquad (-1)^{|j|}\int_{E_{\varkappa}} \frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi_j}\, a_i(x,\xi)\,d\xi = (-1)^{|i|}\int_{E_{\varkappa}} \frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi_i}\, a_j(x,\xi)\,d\xi\,.$$

Lemme 2.4 (cf. [3], Remarque 2.1). Si pour $\xi, \eta \in E_{\varkappa}$, $\xi \neq \eta$,

$$(2.15)\qquad \sum_{|i|\leq k} (\xi_i - \eta_i)[a_i(x,\xi) - a_i(x,\eta)] > 0$$

presque partout dans Ω, alors T est totalement strictement monotone.

Lemme 2.5 (cf. [3], Remarque 2.1). Si a_i sont continûment différentiables en ξ, la condition

$$(2.16)\qquad \sum_{|i|,|j|\leq k} \frac{\partial a_i(x,\eta)}{\partial \xi_j}\, \xi_i\, \xi_j > 0$$

quels que soient $\xi, \eta \in E_{\varkappa}$, $\xi \neq 0$, pour presque tout x de Ω, entraîne la condition (2.15), alors T est totalement strictement monotone.

Lemme 2.6 (cf. [3], Remarque 2.1). La condition

$$(2.17)\qquad \lim_{\|v\|\to\infty} \frac{1}{\|v\|}(v, Tv) = +\infty\,,$$

c'est-à-dire

$$(2.17)\ \lim_{\|v\|\to\infty} \frac{1}{\|v\|}\int_{\Omega}\sum_{|i|\leq k} D^i v(x)\, a_i(x, \xi(u_0+v))\,dx = +\infty$$

entraîne la coercitivité faible de T. Nous dirons que pour l'opérateur T, la condition de coercitivité est satisfaite, si l'on a (2.17).

Lemme 2.7 (cf. [3], Remarque 2.1). Soient $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 \geq 0$ tels que quel que soit $\xi \in E_{\varkappa}$

presque partout dans Ω

$$(2.18)\quad \sum_{|i|\le k} a_i(x,\xi)\xi_i \ge c_1 \sum_{|i|=k} |\xi_i|^m + |\xi_{(0,0,\dots,0)}|^m - c_3 \ .$$

Alors la condition de coercitivité, donc la condition de la coercitivité faible est satisfaite pour l'opérateur T .

Pour le problème, où $V = \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_m(\Omega)$, il suffit $c_2 \ge 0$.

Lemme 2.8 (cf. [3], Remarque 2.1). Si les coefficients sont continûment différentiables en ξ pour presque tout x de Ω , la condition (2.14) équivaut à la condition

$$(2.19)\qquad \frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial a_j(x,\xi)}{\partial \xi_i}$$

presque partout dans Ω .

Théorème 2.2 (cf. [3], Théorème 2.1). Si (2.5) et (2.14) sont valables, la fonctionnelle

$$(2.20)\quad \begin{aligned}\Phi(v) = \int_0^1 dt \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0+tv))dx \ - \\ - \langle v, f\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

est continue sur V , ayant la différentielle de Gâteaux au chaque point v de V et

$$(2.21)\quad \begin{aligned}(\tilde v, \Phi'(v)) = \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i \tilde v(x) a_i(x,\xi(u_0+v))dx \ - \\ - \langle \tilde v, f\rangle_\Omega - \langle \tilde v, g\rangle_{\partial\Omega} \ .\end{aligned}$$

Théorème 2.3 (cf. [3], Théorème 2.2). Les conditions (2.5), (2.11) - (2.14) soient satisfaites. Alors il existe un minimum de la fonctionnelle $\Phi(v)$ de (2.20) dans V , soit v_0 . La fonction $u_0 + v_0$ est une solution du problème. Cette solution est unique.

Lemme 2.9. Le problème aux limites de l'exemple 2.1 a une solution unique pour chaque $f \in Q'$.

Démonstration. Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 2.3:

α) Quels que soient $|i| \leq k$ et $\xi \in E_{\varkappa}$ on a

$$|a_i(x,\xi)| = |(1+\sum_{|j|\leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1}| \, |\xi_i| \leq (\varkappa+1) \cdot$$

$$\cdot (1+\sum_{|j|\leq k} |\xi_j|)^{m-2}(1+\sum_{|j|\leq k} |\xi_j|) \leq (\varkappa+1)^2 (1+\sum_{|j|\leq k} |\xi_j|^{m-1}) .$$

β) Symétrie: pour $i \neq j$ on a

$$\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j} = 2\xi_i \xi_j (\frac{m}{2}-1)(1+\sum_{|l|\leq k} \xi_l^2)^{\frac{m}{2}-2} = $$

$$= \frac{\partial a_j(x,\xi)}{\partial \xi_i} ;$$

$$\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_i} = 2(\frac{m}{2}-1)\xi_i^2(1+\sum_{|j|\leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-2} +$$

$$+ (1+\sum_{|j|\leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1} .$$

γ) Pour $\xi, \eta \in E_{\varkappa}$, $\xi \neq 0$

$$\sum_{|i|,|j|\leq k} \frac{\partial a_i(x,\eta)}{\partial \xi_j} \xi_i \xi_j = \sum_{|i|,|j|\leq k} 2(\frac{m}{2}-1)\xi_i \xi_j \eta_i \eta_j$$

$$(1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-2} + \sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 (1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-1} > (1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-1}$$

$$\sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 - (1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-2} \sum_{|i|,|j|\leq k} \xi_i \xi_j \eta_i \eta_j =$$

$$= (1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-2} [(1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2) \sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 - \sum_{|i|,|j|\leq k} \xi_i \xi_j \eta_i \eta_j] \geq$$

$$\geq (1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-2} [\sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 + \sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 \sum_{|l|\leq k} \eta_l^2 - \sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 \sum_{|l|\leq k} \eta_l^2] =$$

$$= (1+\sum_{|l|\leq k} \eta_l^2)^{\frac{m}{2}-2} \sum_{|i|\leq k} \xi_i^2 > 0 .$$

D'après le lemme 2.5 T est totalement strictement monotone.

δ) Soit $\xi \in E_{\varkappa}$; alors pour $m \geq 2$

$$\sum_{|i| \leq k} a_i(x,\xi)\xi_i = \sum_{|i| \leq k} (1+\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1}\xi_i^2 > (\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|i| \leq k} \xi_i^2 = (\sum_{|i| \leq k} \xi_i^2)^{\frac{m}{2}} \geq \frac{1}{\varkappa} \sum_{|i| \leq k} |\xi_i|^m .$$

Si $1 < m < 2$, alors

$$\sum_{|i| \leq k} a_i(x,\xi)\xi_i = (1+\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1}(1+\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2 - 1) = (1+\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}} -$$

$$-(1+\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}-1} > (\sum_{|j| \leq k} \xi_j^2)^{\frac{m}{2}} - 1 \geq \frac{1}{\varkappa} \sum_{|j| \leq k} |\xi_j|^m - 1 .$$

Donc d'après le lemme 2.7 la condition de la coercitivité faible pour l'opérateur T est satisfaite.

Lemme 2.10. Le problème aux limites de l'exemple 2.2 a une solution unique pour chaque $f \in Q'$.

Démonstration. Vérifions les hypothèses du théorème 2.3:

α) $$|a_i(x,\xi)| = |\xi_i|^{m-1} \leq (1+\sum_{|j| \leq k} |\xi_j|^{m-1})$$

quels que soient $|i| \leq k$, $\xi \in E_{\varkappa}$.

β) Symmétrie: Pour $i \neq j$ on a

$$\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j} = 0 .$$

Pour $|i| \leq k$ on a

$$\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_i} = (m-1)|\xi_i|^{m-2} .$$

γ) Soient $\xi, \eta \in E_{\varkappa}$, $\xi \neq 0$, alors

$$\sum_{|i|,|j| \leq k} \frac{\partial a_i(x,\eta)}{\partial \xi_j} \xi_i \xi_j = \sum_{|i| \leq k} (m-1)|\eta_i|^{m-2} \xi_i^2 > 0 ,$$

donc d'après le lemme 2.5 T est totalement strictement monotone.

δ) Soit $\xi \in E_{\varkappa}$, alors

$$\sum_{|i|=k} a_i(x,\xi)\xi_i = \sum_{|i|=k} \xi_i |\xi_i|^{m-1} \operatorname{sign} \xi_i = \sum_{|i|=k} |\xi_i|^m ,$$

donc d'après le lemme 2.7 la condition de la coercitivité faible pour l'opérateur T est satisfaite.

Remarque 2.1. Si l'on résout les problèmes aux limites des exemples 2.1 et 2.2 pour $V = \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$, il suffit de définir les coefficients $a_i(x,\xi)$ par (2.6),(2.8), respectivement, seulement pour $|i| = k$. Pour $|i| \leq k-1$ posons $a_i(x,\xi) \equiv 0$. Alors tous les deux problèmes ont des solutions et ces solutions sont uniques pour chaque fonctionnelle f de Q'.

En effet, il suffit d'utiliser le lemme 2.7 avec $c_2 = 0$ pour vérifier la condition de la coercitivité faible et le lemme 2.5 pour vérifier que l'opérateur T est totalement strictement monotone, car si l'on résout un problème aux limites pour $V = \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ il suffit de supposer dans le lemme 2.5 au lieu de (2.16) seulement

$$\sum_{|i|,|j|=k} \frac{\partial a_i(x,\eta)}{\partial \xi_j} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq 0 .$$

Lemme 2.11. (La même idée de la démonstration comme chez J. Nečas - cf. [3], lemme 3.2.) Supposons les fonctions réelles $a_i(x,\xi)$ définies sur $\Omega \times E_\varkappa$ pour $|i| \leq k$, continues pour presque tous x de Ω en ξ, mesurables en x pour ξ fixé, satisfaisant aux conditions (2.5), (2.15), telles que pour chaque $\xi \in E_\varkappa$,

$$(2.22)\quad \lim_{\sum_{|i|=k}|\xi_i| \to \infty} \frac{1}{\sum_{|i|=k} |\xi_i|^{m-1} + \sum_{|i|=k} |\xi_i|} \Big(\sum_{|i|=k} a_i(x,\xi)\xi_i \Big) = +\infty$$

presque partout dans Ω.

Soient u, $u_0 \in W_m^{(k)}(\Omega)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_m^{(k)}(\Omega)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$. Soit presque partout dans Ω

(2.23) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 ,$$

où

(2.24) $$f_n(x) = \sum_{|i|\le k} (D^i u_n(x) - D^i u(x)) \cdot$$
$$\cdot [a_i(x, \xi(u_n + u_0)) - a_i(x, \xi(u + u_0))] .$$

Alors il existe une suite partielle $\{u_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{j\to\infty} D^i u_{n_j}(x) = D^i u(x)$$

presque partout dans Ω pour $|i| \le k$.

Démonstration. Dans cette démonstration on signifiera chaque sous-suite par le même symbole comme l'original.

La suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers u, alors elle est bornée dans $W_m^{(k)}(\Omega)$, donc elle est compacte dans $W_m^{(k-1)}(\Omega)$, c'est-à-dire, il existe une sous-suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ et un élément v de $W_m^{(k-1)}(\Omega)$ tels que $\lim_{n\to\infty} u_n = v$ selon la norme de $W_m^{(k-1)}(\Omega)$, donc $u_n \rightharpoonup v$ dans $W_m^{(k-1)}(\Omega)$. L'inclusion $W_m^{(k)}(\Omega) \subset W_m^{(k-1)}(\Omega)$ entraîne $(W_m^{(k-1)}(\Omega))' \subset$ $\subset (W_m^{(k)}(\Omega))'$ alors de la convergence faible $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ vers u dans $W_m^{(k)}(\Omega)$ il suit que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_m^{(k-1)}(\Omega)$, alors $u = v$ dans $W_m^{(k-1)}(\Omega)$. On a démontré $\lim_{n\to\infty} u_n = v$ selon la norme de $W_m^{(k-1)}(\Omega)$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ selon la norme de $W_m^{(k-1)}(\Omega)$. Il en suit en vertu de la relation

$$\| D^i(u_n - u)\|_{L_m} \le \| u_n - u \|_{W_m^{(k-1)}}$$

qu'il existe une sous-suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} D^i u_n(x) = D^i u(x)$$

presque partout dans Ω pour $|i| \leq k-1$.

Maintenant on va montrer pour une certaine sous-suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} D^i u_n(x) = D^i u(x)$$

presque partout dans Ω aussi pour $|i| = k$.

Soit x un point tel que

$$\max_{|i|\leq k} |D^i u(x)| < +\infty, \quad \max_{|i|\leq k} |D^i u_0(x)| < +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} D^i u_n(x) = D^i u(x) \quad \text{quel que soit } |i| \leq k-1$$

et encore tel que chaque fonction $a_i(x, \xi)$ $(|i| \leq k)$ est continue en ξ.

On peut trouver une sous-suite des u_n telle qu'il existe une limite de la suite $\{D^i u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pour chaque $|i| = k$. Soit $\lim_{n\to\infty} D^i u_n(x) = \chi_i$, $|i| = k$.

Il suit de (2.5) que

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{|i|\leq k} (D^i u_n(x) + D^i u_0(x))\, a_i(x, \xi(u_n + u_0)) - \\
&- \sum_{|i|\leq k} (D^i u_0(x) + D^i u(x))\, a_i(x, \xi(u_n + u_0)) - \\
&- \sum_{|i|\leq k} (D^i u_n(x) - D^i u(x))\, a_i(x, \xi(u + u_0)) \geq \\
&\geq \sum_{|i|\leq k} (D^i u_n(x) + D^i u_0(x))\, a_i(x, \xi(u_n + u_0)) - \\
&- c\,(1 + \sum_{|i|\leq k} |D^i u_n(x) + D^i u_0(x)|^{m-1}) \sum_{|i|\leq k} |D^i u_0(x) + D^i u(x)| - \\
&- c\,(1 + \sum_{|i|\leq k} |D^i u(x) + D^i u_0(x)|^{m-1}) \,\cdot \\
&\cdot \sum_{|i|\leq k} |D^i u_n(x) + D^i u_0(x) - D^i u_0(x) - D^i u(x)| \geq
\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{|i|\leq k} (D^i u_n(x) + D^i u_o(x)) a_i(x, \xi(u_n + u_o)) -$$

$$- c'(x)(1 + \sum_{|i|=k} |D^i u_n(x) + D^i u_o(x)|^{m-1} +$$

$$+ \sum_{|i|=k} |D^i u_n(x) + D^i u_o(x)|) \; .$$

En divisant cette inégalité par

$$\sum_{|i|=k} |\xi_i^n|^{m-1} + \sum_{|i|=k} |\xi_i^n| \quad ,$$

où

$$\xi_i^n = D^i u_n(x) + D^i u_o(x) \; ,$$

on obtient

$$\frac{1}{\sum_{|i|=k} |\xi_i^n|^{m-1} + \sum_{|i|=k} |\xi_i^n|} f_n(x) \geq \frac{1}{\sum_{|i|=k} |\xi_i^n|^{m-1} + \sum_{|i|=k} |\xi_i^n|} \cdot$$

$$\cdot (\sum_{|i|\leq k} \xi_i^n a_i(x, \xi^n)) - c'(x) (\frac{1}{\sum_{|i|=k} |\xi_i^n|^{m-1} + \sum_{|i|=k} |\xi_i^n|} + 1) \; .$$

Si $|\chi_i| = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} |\xi_i^n| = +\infty$, donc l'expression à droite converge vers $+\infty$ d'après (2.22) et l'expression à gauche converge vers zéro, ce qui n'est pas possible. Alors $|\chi_i| < +\infty$ quel que soit $|i| = k$.

Posons $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_i \; ; \; |i| \leq k\}$, où $\mathcal{Y}_i = D^i u(x)$ pour $|i| \leq k-1$ et $\mathcal{Y}_i = \chi_i$ pour $|i| = k$.

De la continuité $a_i(x, \xi)$ en ξ et de (2.23) il suit que

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{|i|\leq k} (\mathcal{Y}_i - D^i u(x)) \cdot$$

$$\cdot [a_i(x, \mathcal{Y} + \xi(u_o)(x)) - a_i(x, \xi(u + u_o)(x))] \; .$$

S'il existe $|i| = k$ tel que $\mathcal{Y}_i \neq D^i u(x)$ alors en vertu de (2.15) on a

$$0=\sum_{|i|\le k}(\mathcal{J}_i - D^i u(x))[a_i(x,\mathcal{J}+\xi(u_0)(x)) -$$
$$- a_i(x,\xi(u+u_0)(x))] > 0 \quad ,$$

ce qui n'est pas possible. Alors

$$\lim_{n\to\infty} D^i u_n(x) = D^i u(x)$$

presque partout dans Ω pour $|i| \le k$.

Lemme 2.12. Soient $2<p<m$, $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$. Alors

$$\|u\|_{W_p^{(k)}} \le \varkappa^{\frac{2}{p}} \|u\|_{W_m^{(k)}}^{1-\frac{\alpha}{p}} \quad \|u\|_{W_2^{(k)}}^{\frac{\alpha}{p}} \quad ,$$

où

$$\alpha = 2\,\frac{m-p}{m-2} \quad .$$

Démonstration. Posons $p' = \frac{2}{\alpha}$ et $q' = \frac{p'}{p'-1}$.

Alors $p' = \frac{m-2}{m-p} > 1$ et $q' = \frac{m-2}{p-2} = \frac{m}{p-\alpha}$.

L'inégalité de Hölder entraîne

$$\|u\|_{L_p}^{p} = \int_\Omega |u(x)|^{p-\alpha}\cdot |u(x)|^{\alpha} dx \le$$

$$\le \left(\int_\Omega |u(x)|^{(p-\alpha)\frac{m}{p-\alpha}} dx\right)^{\frac{p-\alpha}{m}} \left(\int_\Omega |u(x)|^{\alpha\frac{2}{\alpha}} dx\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \|u\|_{L_m}^{p-\alpha}\cdot \|u\|_{L_2}^{\alpha} \quad .$$

Il en suit que

$$\|u\|_{W_p^{(k)}}^{p} = \sum_{|i|\le k} \|D^i u\|_{L_p}^{p} \le \sum_{|i|\le k} \|D^i u\|_{L_m}^{p-\alpha}\cdot \|D^i u\|_{L_2}^{\alpha} \le$$

$$\le \sum_{|i|\le k} \|D^i u\|_{L_m}^{m\,\frac{p-\alpha}{m}} \cdot \sum_{|j|\le k} \|D^j u\|_{L_2}^{2\frac{\alpha}{2}} \le \varkappa \left(\sum_{|i|\le k} \|D^i u\|_{L_m}^{m}\right)^{\frac{p-\alpha}{m}} \cdot$$

$$\cdot\, \varkappa \left(\sum_{|j|\le k} \|D^j u\|_{L_2}^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \varkappa^2 \|u\|_{W_m^{(k)}}^{p-\alpha} \quad \|u\|_{W_2^{(k)}}^{\alpha} \quad .$$

§ 3. Application de la méthode de la descente la plus rapide

On résout un problème aux limites pour l'équation

$$\sum_{|i|\le k} (-1)^{|i|} D^i a_i(x,\xi(u)) = f_0(x)$$

et on cherche la solution faible dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Sous certaines conditions sur les coefficients $a_i(x, \xi)$ on peut appliquer la méthode de la descente la plus rapide à la solution de cette équation:

Définition 3.1. Sous les conditions de la définition 2.1 on définit l'opérateur $F : V \to V'$ par

(3.1) $(v, Fu) = (v, Tu) - \langle v, f_0 \rangle_\Omega - \langle v, g \rangle_{\partial\Omega}$

quels que soient $v, u \in V$, où T est défini par (2.10).

Lemme 3.1. Soient les conditions de la définition 2.1 satisfaites. Soit $a_i(x, \xi)$ continûment différentiable en ξ pour presque tout x de Ω et chaque $|i| \leq k$. Soit $c_1 > 0$ tel que quel que soit $\eta \in E_\varkappa$,

(3.2) $$\left| \frac{\partial a_i(x, \eta)}{\partial \xi_j} \right| \leq c_1 (1 + |\eta_j|)^{m-2}$$

presque partout dans Ω.

Alors pour $u, v \in V$ on a

(3.3) $$(v, F(u+v) - F(u)) \leq c_1 \varkappa^2 \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \|v\|^m$$

pour $1 < m < 2$;

(3.4) $(v, F(u+v) - F(u)) \leq c_1 \varkappa \|v\|^2$ pour $m = 2$;

(3.5) $$(v, F(u+v) - F(u)) \leq c_1 (\varkappa + 1)\varkappa^{1-\frac{1}{m}}((\varkappa \mu(\Omega))^{\frac{1}{m}} + \|u_0\| + \|u\| + \|v\|)^{m-2} \|v\|^2$$ pour $m > 2$.

Démonstration. Il suit des hypothèses que

$(v, F(u+v) - F(u)) = (v, T(u+v) - T(u)) =$

$= \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v(x) [a_i(x, \xi(u_0 + u + v)) - a_i(x, \xi(u_0 + u))] dx =$

$$= \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i v(x) \int_0^1 \sum_{|j|\le k} \frac{\partial a_i(x, \xi(u_0+u+\tau v))}{\partial \xi_j} D^j v(x)\, d\tau\, dx \le$$

$$\le c_1 \int_0^1 d\tau \int_\Omega \sum_{|i|\le k} |D^i v(x) \cdot \sum_{|j|\le k} (1+|D^j(u_0+u+\tau v)(x)|)^{m-2} \cdot$$

$$\cdot D^j v(x)|\, dx \quad .$$

Si $m = 2$, il en suit d'après l'inégalité de Hölder

$$(v, F(u+v) - F(u)) \le c_1 \int_0^1 d\tau \int_\Omega \sum_{|i|\le k} |D^i v(x)| \cdot$$

$$\cdot \sum_{|j|\le k} |D^j v(x)| dx = c_1 \int_\Omega (\sum_{|i|\le k} |D^i v(x)|)^2 dx \le$$

$$\le c_1 \varkappa \int_\Omega \sum_{|i|\le k} |D^i v(x)|^2 dx = c_1 \varkappa \|v\|^2 \quad .$$

Si $m > 2$, de l'inégalité de Hölder généralisée avec $p_1 = p_2 = m$, $p_3 = \dfrac{m}{m-2}$ on obtient

$$(v, F(u+v) - F(u)) \le c_1 \int_0^1 d\tau \left(\int_\Omega (\sum_{|i|\le k} |D^i v(x)|)^m\right)^{\frac{1}{m}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|j|\le k} \left(\int_\Omega (1+|D^j(u_0+u+\tau v)(x)|)^m dx\right)^{\frac{m-2}{m}} \cdot \left(\int_\Omega |D^j v(x)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \le$$

$$\le c_1 \varkappa^{\frac{m-1}{m}} \int_0^1 d\tau \left(\int_\Omega \sum_{|i|\le k} |D^i v(x)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \cdot (1+\varkappa) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_\Omega \sum_{|j|\le k} (1+|D^j(u_0+u+\tau v)(x)|)^m dx\right)^{\frac{m-2}{m}} \quad .$$

$$\cdot \left(\sum_{|j|\le k} \int_\Omega |D^j v(x)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} = c_1 \varkappa^{1-\frac{1}{m}} (\varkappa+1) \|v\|^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 ((\varkappa \mu(\Omega))^{\frac{1}{m}} + \|u_0+u+\tau v\|)^{m-2} d\tau \le c_1 (\varkappa+1) \varkappa^{1-\frac{1}{m}} \cdot$$

$$\cdot ((\varkappa \mu(\Omega))^{\frac{1}{m}} + \|u_0\| + \|u\| + \|v\|)^{m-2} \|v\|^2 \quad .$$

Soit $1 < m < 2$. On a démontré l'inégalité

$$(v, F(u+v) - F(u)) \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{1 \leq |i|, |j| \leq k} \int_\Omega \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 + |D^j w(x) + \tau D^j v(x)|)^{2-m}} |D^i v(x)| |D^j v(x)| dx ,$$

où $w = u_0 + u$. On estimera l'intégrale interne

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 + |D^j w(x) + \tau D^j v(x)|)^{2-m}}$$

pour x quelconque.

I) $0 \leq D^j w(x), \quad 0 < D^j v(x)$;

a) $D^j v(x) \leq 1 + D^j w(x)$; **alors**

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 + D^j w(x) + \tau D^j v(x))^{2-m}} \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{d\tau}{(D^j v(x) + \tau D^j v(x))^{2-m}} = (D^j v(x))^{m-2} \int_0^1 \frac{d\tau}{(1+\tau)^{2-m}} =$$

$$= |D^j v(x)|^{m-2} \frac{2^{m-1} - 1}{m-1} < \frac{1 + 2^{m-1}}{m-1} |D^j v(x)|^{m-2} .$$

b) $1 + D^j w(x) < D^j v(x)$;

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 + D^j w(x) + \tau D^j v(x))^{2-m}} =$$

$$= \frac{1}{m-1} \frac{1}{D^j v(x)} \left[(1 + D^j w(x) + \tau D^j v(x))^{m-1} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{m-1} \frac{1}{D^j v(x)} (1 + D^j w(x) + D^j v(x))^{m-1} -$$

$$- \frac{1}{m-1} \frac{1}{D^j v(x)} (1 + D^j w(x))^{m-1} <$$

$$< \frac{1}{m-1} \frac{1}{D^j v(x)} (2 D^j v(x))^{m-1} < \frac{1 + 2^{m-1}}{m-1} |D^j v(x)|^{m-2} .$$

II) $D^{\vartheta} w(x) \le 0$, $D^{\vartheta} v(x) < 0$;

a) $-D^{\vartheta} v(x) \le 1 - D^{\vartheta} w(x)$;

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 - D^{\vartheta} w(x) - \tau D^{\vartheta} v(x))^{2-m}} \le$$

$$\le \int_0^1 \frac{d\tau}{(-D^{\vartheta} v(x) - \tau D^{\vartheta} v(x))^{2-m}} =$$

$$= (-D^{\vartheta} v(x))^{m-2} \int_0^1 \frac{d\tau}{(1+\tau)^{2-m}} = \frac{2^{m-1}-1}{m-1} \cdot |D^{\vartheta} v(x)|^{m-2} <$$

$$< \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \, |D^{\vartheta} v(x)|^{m-2} .$$

b) $1 - D^{\vartheta} w(x) < -D^{\vartheta} v(x)$;

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 - D^{\vartheta} w(x) - \tau D^{\vartheta} v(x))^{2-m}} =$$

$$= -\frac{1}{m-1} \frac{1}{D^{\vartheta} v(x)} \left[(1 - D^{\vartheta} w(x) - \tau D^{\vartheta} v(x))^{m-1}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{m-1} \frac{1}{D^{\vartheta} v(x)} (1 - D^{\vartheta} w(x) - D^{\vartheta} v(x))^{m-1} +$$

$$+ \frac{1}{m-1} \frac{1}{D^{\vartheta} v(x)} (1 - D^{\vartheta} w(x))^{m-1} < \frac{1}{m-1} \frac{1}{(-D^{\vartheta} v(x))} \cdot$$

$$\cdot (-2 D^{\vartheta} v(x))^{m-1} + \frac{1}{m-1} \frac{1}{D^{\vartheta} v(x)} (-D^{\vartheta} v(x))^{m-1} <$$

$$< \frac{2^{m-1}}{m-1} (-D^{\vartheta} v(x))^{m-2} <$$

$$< \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \, |D^{\vartheta} v(x)|^{m-2} .$$

III) $D^{\vartheta} w(x) < 0 < D^{\vartheta} v(x)$;

a) $0 < D^{\vartheta} w(x) + D^{\vartheta} v(x)$;

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^{-\frac{D^{\vartheta} w(x)}{D^{\vartheta} v(x)}} \frac{d\tau}{(1 - D^{\vartheta} w(x) - \tau D^{\vartheta} v(x))^{2-m}} +$$

$$+\int_{-\frac{D^{\vartheta}w(x)}{D^{\vartheta}v(x)}}^{1} \frac{d\tau}{(1+D^{\vartheta}w(x)+\tau D^{\vartheta}v(x))^{2-m}}$$

Désignons la première intégrale par $J_1(x)$, la deuxième par $J_2(x)$.

$J_1(x)$: α) $D^{\vartheta}v(x) < 1-D^{\vartheta}w(x)$;

$$J_1(x) \leq \int_0^{-\frac{D^{\vartheta}w(x)}{D^{\vartheta}v(x)}} \frac{d\tau}{(D^{\vartheta}v(x)-\tau D^{\vartheta}v(x))^{2-m}} =$$

$$=(D^{\vartheta}v(x))^{m-2}\int_0^{-\frac{D^{\vartheta}w(x)}{D^{\vartheta}v(x)}} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{2-m}} =$$

$$=-\frac{1}{m-1}|D^{\vartheta}v(x)|^{m-2}\left(1+\frac{D^{\vartheta}w(x)}{D^{\vartheta}v(x)}\right)^{m-1}+$$

$$+\frac{1}{m-1}|D^{\vartheta}v(x)|^{m-2}<\frac{1}{m-1}|D^{\vartheta}v(x)|^{m-2}$$

β) $1-D^{\vartheta}w(x) \leq D^{\vartheta}v(x)$;

$$J_1(x)=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{D^{\vartheta}v(x)}\left[(1-D^{\vartheta}w(x)-\tau D^{\vartheta}v(x))^{m-1}\right]_0^{-\frac{D^{\vartheta}w(x)}{D^{\vartheta}v(x)}}=$$

$$=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{D^{\vartheta}v(x)}+\frac{1}{m-1}\frac{1}{D^{\vartheta}v(x)}(1-D^{\vartheta}w(x))^{m-1} \leq$$

$$\leq -\frac{1}{m-1}\frac{1}{D^{\vartheta}v(x)}+\frac{1}{m-1}\frac{1}{D^{\vartheta}v(x)}(D^{\vartheta}v(x))^{m-1} <$$

$$<\frac{1}{m-1}|D^{\vartheta}v(x)|^{m-2} .$$

$J_2(x)$: α) $D^{\vartheta}v(x) \leq 1+D^{\vartheta}w(x)$;

$$J_2(x) \leq \int_{-\frac{D^{\vartheta}w(x)}{D^{\vartheta}v(x)}}^{1} \frac{d\tau}{(D^{\vartheta}v(x)+\tau D^{\vartheta}v(x))^{2-m}} =$$

$$J(x) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1+D^\alpha w(x)+\tau D^\alpha v(x))^{2-m}} \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{d\tau}{(-D^\alpha v(x)+\tau D^\alpha v(x))^{2-m}} = (-D^\alpha v(x))^{m-2} \, .$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{2-m}} = \frac{1}{m-1} \, |D^\alpha v(x)|^{m-2} <$$

$$< \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \, |D^\alpha v(x)|^{m-2} \, .$$

b) $\quad D^\alpha w(x) + D^\alpha v(x) < 0$;

$$J(x) = \int_0^{-\frac{D^\alpha w(x)}{D^\alpha v(x)}} \frac{d\tau}{(1+D^\alpha w(x)+\tau D^\alpha v(x))^{2-m}} +$$

$$+ \int_{-\frac{D^\alpha w(x)}{D^\alpha v(x)}}^1 \frac{d\tau}{(1-D^\alpha w(x)-\tau D^\alpha v(x))^{2-m}} \, .$$

Désignons la première intégrale par $J_3(x)$, la deuxième par $J_4(x)$.

$J_3(x)$: $\quad \alpha)$ $\quad 1+D^\alpha w(x) \leq -D^\alpha v(x)$;

$$J_3(x) = \frac{1}{m-1}\frac{1}{D^\alpha v(x)} \left[(1+D^\alpha w(x)+\tau D^\alpha v(x))^{m-1}\right]_0^{-\frac{D^\alpha w(x)}{D^\alpha v(x)}} =$$

$$= \frac{1}{m-1}\frac{1}{D^\alpha v(x)} - \frac{1}{m-1}\frac{1}{D^\alpha v(x)} (1+D^\alpha w(x))^{m-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{m-1}\frac{1}{D^\alpha v(x)} + \frac{1}{m-1}\frac{1}{(-D^\alpha v(x))} (-D^\alpha v(x))^{m-1} <$$

$$< \frac{1}{m-1} \, |D^\alpha v(x)|^{m-2} \, .$$

$\beta)$ $\quad -D^\alpha v(x) < 1 + D^\alpha w(x)$;

$$J_3(x) < \int_0^{-\frac{D^\alpha w(x)}{D^\alpha v(x)}} \frac{d\tau}{(-D^\alpha v(x)+\tau D^\alpha v(x))^{2-m}} =$$

$$= (-D^{j}v(x))^{m-2}\int_{0}^{-\frac{D^{j}w(x)}{D^{j}v(x)}} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{2-m}} = -\frac{1}{m-1} \; \cdot$$

$$\cdot\, |D^{j}v(x)|^{m-2}\Big(1+\frac{D^{j}w(x)}{D^{j}v(x)}\Big)^{m-1} + \frac{1}{m-1}|D^{j}v(x)|^{m-2} <$$

$$< \frac{1}{m-1}|D^{j}v(x)|^{m-2} \; .$$

$\mathcal{J}_4(x)$: $\quad \alpha)\quad 1 - D^{j}w(x) \leq -D^{j}v(x)\,$;

$$\mathcal{J}_4(x) = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{D^{j}v(x)}\,\Big[(1-D^{j}w(x) -$$

$$-\,\tau D^{j}v(x))^{m-1}\Big]^{1}_{-\frac{D^{j}w(x)}{D^{j}v(x)}} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{D^{j}v(x)} \; \cdot$$

$$\cdot\,(1-D^{j}w(x)-D^{j}v(x))^{m-1} + \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{D^{j}v(x)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(-D^{j}v(x))}(-2D^{j}v(x))^{m-1} + \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{D^{j}v(x)} <$$

$$< \frac{2^{m-1}}{m-1}\,|D^{j}v(x)|^{m-2} \; .$$

$\beta)\quad -D^{j}v(x) < 1 - D^{j}w(x)\,$;

$$\mathcal{J}_4(x) \leq \int_{-\frac{D^{j}w(x)}{D^{j}v(x)}}^{1} \frac{d\tau}{(-D^{j}v(x) - \tau D^{j}v(x))^{2-m}} =$$

$$= (-D^{j}v(x))^{m-2}\int_{-\frac{D^{j}w(x)}{D^{j}v(x)}}^{1} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{2-m}} =$$

$$= \frac{2^{m-1}}{m-1}\,|D^{j}v(x)|^{m-2} - \frac{1}{m-1}\,|D^{j}v(x)|^{m-2} \; \cdot$$

$$\cdot\,\Big(1-\frac{D^{j}w(x)}{D^{j}v(x)}\Big)^{m-1} < \frac{2^{m-1}}{m-1}\,|D^{j}v(x)|^{m-2} \; .$$

On a démontré l'inégalité

$$\mathcal{J}(x) \leq \frac{1+2^{m-1}}{m-1} |D^j v(x)|^{m-2}$$

pour chaque $x \in \Omega$ tel que $|D^i w(x)| < +\infty$, $|D^j v(x)| < +\infty$, $|j| \leq k$.

Alors

$$(v, F(u+v)-F(u)) \leq c_1 \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \sum_{|i|,|j|\leq k} \int_\Omega |D^i v(x)| \cdot$$

$$\cdot |D^j v(x)|^{m-1} dx \leq c_1 \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \sum_{|i|,|j|\leq k} \|D^i v\|_{L_m} \|D^j v\|_{L_m}^{m-1} \leq$$

$$\leq c_1 \varkappa^2 \frac{1+2^{m-1}}{m-1} \|v\|^m .$$

<u>Théorème 3.1</u>. Soient $m \geq 2$, les fonctions $a_i(x,\xi)$ pour $|i| \leq k$ satisfaisant aux conditions (2.5),(2.14),(3.2), telles que

$$(3.6) \qquad \sum_{|i|,|j|\leq k} \frac{\partial a_i(x,\eta)}{\partial \xi_j} \xi_i \xi_j \geq c_2 \sum_{|i|\leq k} \xi_i^2$$

quels que soient ξ, $\eta \in E_\varkappa$ presque partout dans Ω . Supposons que l'opérateur T défini par (2.10) satisfait à la condition de la coercitivité faible.

Alors le problème aux limites a une solution $u_0 + v_0$; cette solution est unique et la suite

$$(3.7) \qquad v_{n+1} = v_n - \varepsilon_n w_n$$

converge vers v_0 selon la norme de $W_p^{(k)}(\Omega)$ (quelconque $p \in \langle 1, m)$ pour $m>2$, quelconque $p \in \langle 1,2 \rangle$ pour $m = 2$), où v_1 est un élément quelconque de V , ε_n satisfont aux conditions suivantes:

(3.8) $\quad \min\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \left(\frac{1}{4\varkappa M(R_n)}\|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \leq$

$$\leq \varepsilon_n \leq \min\left(1, \left(\frac{1}{2\varkappa M(R_n)}\|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

(3.9) $\quad \min\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{1}{4M(R_n)}\|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\Big) \leq$

$$\leq \varepsilon_n \leq \min\left(1, \frac{1}{2M(R_n)}\|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\Big),$$

respectivement, où

$$R_n = \|v_n\| + \|w_n\|,$$

$M(R_n) = c_1(\varkappa+1)\varkappa^{1-\frac{1}{m}}\, 2^{1-\varepsilon}((\varkappa(\mu(\Omega))^{\frac{1}{m}} + \|u_0\| + 3R_n)^{m-2} R_n^{1-\varepsilon}$

pour $m > 2$,

$M(R_n) = c_1 \varkappa\, 2^{1-\varepsilon} R_n^{1-\varepsilon}$ pour $m = 2$,

$0 < \varepsilon \leq 1$ quelconque

et la fonction w_n de V est telle que quel que soit v de V,

(3.10) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x) D^i w_n(x)\Big(1 + \sum_{|j|\leq k}(D^j w_n(x))^2\Big)^{\frac{m}{2}-1} dx =$

$$= \sum_{|i|\leq k}\int_\Omega D^i v(x)\, a_i(x, \xi(u_0+v_n))dx - \langle v, f_0\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega},$$

(3.11) $\displaystyle\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x)|D^i w_n(x)|^{m-1} \operatorname{sign}(D^i w_n(x))\, dx =$

$$= \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x)\, a_i(x, \xi(u_0+v_n))dx - \langle v, f_0\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega},$$

respectivement.

Démonstration. V est un espace de Banach réflexif comme un sousespace fermé d'un espace réflexif $W_m^{(k)}(\Omega)$ (cf. Lemme 2.3 de [4]).

Les fonctions $a_i(x, \xi)$ satisfont aux conditions (2.5) et (2.14), alors l'opérateur F, défini par (3.1), est potentiel d'après le théorème 2.2.

Du lemme 2.3 suit facilement que l'opérateur F est hemicontinu sur V : Soient $u, v, w \in V$, donc de (3.1) et de l'inégalité de Hölder suit que

$$\lim_{t\to\infty}(w, F(u+tv)-F(u)) = \lim_{t\to\infty}(w, T(u+tv) -$$

$$- T(u)) = \lim_{t\to 0}\sum_{|i|\le k}\int_\Omega D^i w(x)[a_i(x, \xi(u_0+u+tv)) -$$

$$- a_i(x, \xi(u_0+u))]dx \le \lim_{t\to 0}\|w\|\sum_{|i|\le k}\|a_i(x,\xi(u_0+u+tv)) -$$

$$- a_i(x, \xi(u_0+u))\|_{L_{m'}} = 0 ,$$

car $\lim_{t\to 0}(u_0+u+tv) = u_0+u$ selon la norme de V.

On démontrera que l'opérateur F satisfait aux conditions du théorème 1.1.

1° On suppose que l'opérateur T satisfait à la condition de la coercitivité faible, c'est-à-dire, il existe la fonction $\lambda_1(s)$ définie sur $\langle 0, +\infty)$ telle que quel que soit $v \in V$, $(v, Tv) \ge \lambda_1(\|v\|)$,

$$\int_0^R \frac{\lambda_1(s)}{s}\,ds < +\infty \quad \text{quel que soit } R > 0 \text{ et}$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R \frac{\lambda_1(s)}{s}\,ds = +\infty .$$

En vertu de (3.1) on a pour $v \in V$:

$$(v, Fv) = (v, Tv) - \langle v, f_0\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega} \ge$$

$$\geq \lambda_1(\|v\|) - (\|f_0\| + \|g\|)\,\|v\| \ .$$

Posons $\lambda(s) = \lambda_1(s) - c\cdot s$, $c = \|f_0\| + \|g\|$.
Alors la fonction $\lambda(s)$ satisfait aux conditions de la hypothèse 1° du théorème 1.1:

$$\int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\,ds = \int_0^R \frac{\lambda_1(s)}{s}\,ds - cR < +\infty \ ,$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\lambda(s)}{s}\,ds = \lim_{R\to+\infty} \Big(\int_0^R \frac{\lambda_1(s)}{s}\,ds - cR\Big) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} R\Big(\frac{1}{R}\int_0^R \frac{\lambda_1(s)}{s}\,ds - c\Big) = +\infty \ .$$

2° Les conditions (3.1) et (3.6) entraînent pour u, $v \in V$:

$$(v, F(u+v) - F(u)) = (v, T(u+v) - T(u)) =$$

$$= \sum_{|i|\leq k} \int_\Omega D^i v(x)\,[a_i(x, \xi(u_0+u+v)) - a_i(x, \xi(u_0+u))]\,dx =$$

$$= \int_0^1 d\tau \int_\Omega \sum_{|i|,|j|\leq k} \frac{\partial a_i(x, \xi(u_0+u+\tau v))}{\partial \xi_j}\, D^i v(x) D^j v(x)\,dx \geq$$

$$\geq c_2 \int_0^1 d\tau \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} (D^i v(x))^2\,dx = c_2\, \|v\|^2_{W_2^{(k)}} \ .$$

La fonction $\gamma(s) = c_2 s^2$ satisfait aux conditions de la hypothèse 2° du théorème 1.1. On a posé $B = W_2^{(k)}(\Omega)$.

3° En vertu du lemme 3.1 la condition (3.2) garantisse (1.6)

4° Le problème aux limites de l'exemple 2.1, 2.2 respectivement, définit, pour $f \in V'$, une fonction $u \in V$, représentée d'une manière unique, en vertu du lemme 2.9, 2.10 respectivement, par la solution de ce problème. On a défini ainsi $A_1 : V' \longrightarrow V$, $A_2 : V' \longrightarrow V$, respectivement.

On montrera que l'opérateur A_1, A_2, respectivement, est injectif. Soient f_1, $f_2 \in V'$. Posons $A_1 f_1 = A_1 f_2 = w$, $A_2 f_1 = A_2 f_2 = w$, respectivement. Alors d'après (2.7),(2.9) respectivement, on a quel que soit v de V,

$$\langle v, f_1 \rangle_\Omega = \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i v(x) D^i w(x) \Big(1 + \sum_{|j| \le k} (D^j w(x))^2\Big)^{\frac{m}{2}-1} dx =$$

$$= \langle v, f_2 \rangle_\Omega \quad ,$$

$$\langle v, f_1 \rangle_\Omega = \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i v(x) |D^i w(x)|^{m-1} \operatorname{sign}(D^i w(x)) dx =$$

$$= \langle v, f_2 \rangle_\Omega \; ,$$

respectivement.

Alors $0 = \langle v, f_1 - f_2 \rangle_\Omega$ quel que soit $v \in V$, donc $f_1 = f_2$.

On démontrera que l'opérateur A_1, A_2 respectivement satisfait aux conditions du théorème 1.1.

a) Démontrons que l'opérateur AF est borné. D'après la remarque 1.5 il suffit de montrer que l'opérateur F est borné.

Soit $u \in V$; il existe $v_u \in V$ tel que $\| v_u \| = 1$ et $|(v_u , F(u))| = \| Fu \|$. De l'inégalité de Hölder et (2.10) il suit que

$$\| Fu \| = |(v_u, Fu)| = |(v_u, Tu) - \langle v_u, f_o\rangle_\Omega - \langle v_u, g\rangle_{\partial\Omega}| =$$

$$= \Big|\int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i v_u(x) a_i(x, \xi(u_o+u))dx - \langle v_u, f_o\rangle_\Omega - \langle v_u, g\rangle_{\partial\Omega}\Big| \le$$

$$\le c \sum_{|i|\le k} \int_\Omega |D^i v_u(x)|(1 + \sum_{|j|\le k} |D^j(u_o+u)(x)|^{m-1})dx +$$

$$+ \| v_u \| (\|f_o\| + \|g\|) \le c \sum_{|i|\le k} (\int_\Omega |D^i v_u(x)|^m dx)^{\frac{1}{m}} \cdot$$

$$\cdot (\int_\Omega (1 + \sum_{|j|\le k} |D^j(u_o+u)(x)|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}} dx)^{\frac{m-1}{m}} + \| v_u \| \cdot$$

$$\cdot (\|f_o\| + \|g\|) \le c' \| v_u \| (1 + \|u_o\|^{m-1} + \|u\|^{m-1} + \|f_o\| + \|g\|) \le$$

$$\le c'(1 + \|u_o\|^{m-1} + \|u\|^{m-1} + \|f_o\| + \|g\|) .$$

b) Soit $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(A_1)$, $\mathcal{R}(A_2)$, respectivement. Alors les fonctions $f_n \in V'$ existent telles que w_n est la solution de l'exemple 2.1,2.2 respectivement pour f_n, c'est-à-dire $f_n = A_1^{-1} w_n$, $f_n = A_2^{-1} w_n$, respectivement. Soit

(3.12) $\qquad \lim_{n\to\infty} \| w_n \| = 0$,

On va démontrer que

(3.13) $\qquad \lim_{n\to\infty} \| f_n \| = 0$.

Soit $a_i(x, \xi)$ défini par (2.6),(2.8) respectivement.

Il existe $v_n \in V$ tels que $\| v_n \| = 1$ et $|\langle v_n, f_n\rangle_\Omega| = \| f_n \|$. De l'inégalité de Hölder et de (2.7) il suit que

$$\|f_n\| = |\langle v_n, f_n\rangle_\Omega| = |\sum_{|i|\le k}\int_\Omega D^i v_n(x)\, a_i(x,\xi(w_n))\,dx| \le$$

$$\le \sum_{|i|\le k}\left(\int_\Omega |D^i v_n(x)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_\Omega |a_i(x,\xi(w_n))|^{m'}dx\right)^{\frac{1}{m'}} \le$$

$$\le \|v_n\| \sum_{|i|\le k}\|a_i(x,\xi(w_n))\|_{L_{m'}} = \sum_{|i|\le k}\|a_i(x,\xi(w_n))\|_{L_{m'}} .$$

Du lemme 2.3 et de(3.12),(2.6) il suit que $\lim_{n\to\infty}\|a_i(x,\xi(w_n))\|_{L_{m'}} = 0$ quel que soit $|i| \le k$. La relation démontrée

$$\|f_n\| \le \sum_{|i|\le k}\|a_i(x,\xi(w_n))\|_{L_{m'}}$$

entraîne donc (3.13).

c) Soient $f \in V'$ et $A_1 f = w \in V$. Posons $v = w$ dans (2.7). Il en suit que

$$(A_1 f, f) = \langle w, f\rangle_\Omega = \int_\Omega \sum_{|i|\le k}|D^i w(x)|^2 \cdot$$

$$\cdot\left(1+\sum_{|j|\le k}(D^j w(x))^2\right)^{\frac{m}{2}-1}dx \ge \int_\Omega \left(\sum_{|i|\le k}|D^i w(x)|^2\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{|j|\le k}(D^j w(x))^2\right)^{\frac{m}{2}-1}dx = \int_\Omega\left(\sum_{|i|\le k}|D^i w(x)|^2\right)^{\frac{m}{2}}dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{\varkappa}\int_\Omega \sum_{|i|\le k}|D^i w(x)|^m dx = \frac{1}{\varkappa}\|w\|^m = \frac{1}{\varkappa}\|A_1 f\|^m .$$

Posons $A_2 f = w \in V$. La relation (2.9), utilisé pour $v = w$, entraîne

$$(A_2 f, f) = \langle w, f\rangle_\Omega = \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i w(x)\,|D^i w(x)|^{m-1} \cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{sign}(D^i w(x))\,dx = \int_\Omega \sum_{|i|\le k}|D^i w(x)|^m dx = \|w\|^m = \|A_2 f\|^m .$$

On a vérifié toutes les hypothèses du théorème 1.1.

Si $f_i \in L_{m'}(\Omega)$ $(|i| \le k)$, alors la fonctionnelle f définie par

$$\langle v, f\rangle_\Omega = \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i v(x) f_i(x)\,dx - \langle v, f_0\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega}$$

quel que soit $v \in V$, appartient à V'. Alors pour obtenir les fonctions w_n, il suffit de poser $f_i(x) = a_i(x, \xi(u_0 + v_n))$ et la fonction w_n est la solution d'un problème aux limites de l'exemple 2.1, 2.2, respectivement pour f défini par

$$\langle v, f\rangle_\Omega = \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + v_n))\,dx - \langle v, f_0\rangle_\Omega - \langle v, g\rangle_{\partial\Omega}.$$

Du théorème 1.1 suit que la suite (3.7) converge vers v_0 (v_0 est un élément de V tel que réalise le minimum de la fonctionnelle Φ de (2.20)) selon la norme de $W_2^{(k)}(\Omega)$. D'après la remarque 1.2 la suite $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Il en suit en vertu du lemme 2.12 que pour $2 < p < m$

$$\lim_{n\to\infty} \| v_n - v_0 \|_{W_p^{(k)}} = 0 .$$

Cette relation est vrai aussi pour $1 \le p \le 2$, car

$$\| v_n - v_0 \|_{W_p^{(k)}} \le c \, \| v_n - v_0 \|_{W_2^{(k)}} .$$

Remarque 3.1. Si l'on résout un problème aux limites pour $V = \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ sous les hypothèses du théorème 3.1, alors la suite de (3.7) converge vers $v_0 \in W_m^{(k)}(\Omega)$ (où $u_0 + v_0$ est la solution unique de ce problème) selon la norme de $W_p^{(k)}(\Omega)$ (p est le même comme dans le théorème 3.1), où v_1 est quelconque de V, ε_n satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\min\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \left(\frac{1}{4c^m \varkappa M(R_n)} \|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon_n \leq$$

$$\leq \min\left(1, \left(\frac{1}{2c^m \varkappa M(R_n)} \|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) ,$$

$$\min\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \left(\frac{1}{4c^m M(R_n)} \|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon_n \leq$$

$$\leq \min\left(1, \left(\frac{1}{2c^m M(R_n)} \|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) ,$$

respectivement, où

$$R_n = \|v_n\| + \|w_n\| ,$$

$$0 < \varepsilon \leq 1 \quad \text{quelconque},$$

les fonctions $M(R_n)$ sont les mêmes comme dans le théorème 3.1, la constante c est définie par (2.3) et la fonction w_n de V est telle que quel que soit v de V,

$$(3.14) \quad \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i v(x) D^i w_n(x) \left(1 + \sum_{|j|=k} (D^j w_n(x))^2\right)^{\frac{m}{2}-1} dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + v_n)) dx - \langle v, f_0 \rangle_\Omega ,$$

$$(3.15) \quad \int_\Omega \sum_{|i|=k} D^i v(x) |D^i w_n(x)|^{m-1} \operatorname{sign}(D^i w_n(x)) dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + v_n)) dx - \langle v, f_0 \rangle_\Omega ,$$

respectivement.

En effet, il suffit d'utiliser la remarque 2.1, le théorème 2.1 et la démonstration du théorème 3.1.

Remarque 3.2. Si $m = 2$, alors d'après la remarque 1.1 on a:

$$\|v_n - v_0\|_{W_2^{(k)}} \leq \frac{1}{C_2} \|F(v_n)\| ,$$

si $m > 2$ on a :

$$\| v_n - v_0 \|_{W_2^{(k)}} \le \sqrt{\tfrac{2}{C_2}}\, R \, \| F(v_n) \| \;,$$

où

$$\| F(v_n) \| = \sup_{v \in V,\ \|v\| \le 1} \Big| \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i v(x)\, a_i(x, \xi(u_0 + v_n))\, dx -$$

$$- \langle v, f_0 \rangle_\Omega - \langle v, q \rangle_{\partial\Omega} \Big| \;,$$

R est le rayon de la boule quelconque D_R, qui contient les éléments v_n et v_0.

Remarque 3.3. On a supposé $m \ge 2$ dans le théorème 3.1 à cause de la condition (3.6). Le reste dans la démonstration du théorème 3.1 était valable pour $m > 1$ (sauve la démonstration de l'inégalité $(A_1 f, f) \ge \ge \frac{1}{\varkappa} \| A_1 f \|^m$).

Si l'on suppose l'opérateur T strictement totalement monotone au lieu de (3.6) dans le théorème 3.1, alors de la remarque 1.1 il suit que pour $m > 1$ la suite $\{ v_n \}_{n=1}^{\infty}$ définie par (3.7) et bornée, $\lim_{n \to \infty} \| F(v_n) \| = 0$ (l'opérateur $F : V \to V'$ est défini par (3.1)); le problème a une solution unique $u_0 + v_0$.

Théorème 3.2. Soit $m > 1$. La condition de la coercitivité faible pour l'opérateur T (défini par (2.10)) et les conditions (2.5), (2.14), (2.15), (2.22), (3.2) soient satisfaites.

Alors le problème aux limites a une solution $u_0 + v_0$; cette solution est unique. Si $m \ge 2$, alors la suite (3.7) définie dans le théorème 3.1 converge faiblement vers $v_0 \in W_m^{(k)}(\Omega)$.

Si $1 < m < 2$, alors la suite

(3.7) $$v_{n+1} = v_n - \varepsilon_n \; w_n$$

converge faiblement vers v_o , où v_1 est un élément quelconque de V , ε_n satisfont aux conditions (3.9), où

$$R_n = \| v_n \| + \| w_n \| ,$$

$$0 < \varepsilon \leq m - 1 \quad \text{quelconque,}$$

$$M(R_n) = c_1 \varkappa^2 \frac{1 + 2^{m-1}}{m - 1} 2^{m-\varepsilon-1} R_n^{m-\varepsilon-1}$$

et la fonction w_n de V est telle que quel que soit v de V , la relation (3.11) est valable.

<u>Démonstration</u>. D'après le lemme 2.4 l'opérateur T est strictement totalement monotone, alors de la remarque 3.3 il suit qu'il existe la solution unique $u_o + v_o$ et la suite $\{ v_n \}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Alors un élément $w_o \in W_m^{(k)}(\Omega)$ et la sous-suite $\{ v_{n_j} \}_{j=1}^{\infty}$ existent tels que

(3.16) $$v_{n_j} \rightharpoonup w_o \quad .$$

C'est une conséquence du théorème de Gantmacher-Eberlein-Šmuljan.

Posons

$$f_j(x) = \sum_{|i| \leq k} (D^i v_{n_j}(x) - D^i w_o(x)) [a_i(x, \xi(v_{n_j} + u_o)) - - a_i(x, \xi(w_o + u_o))] \quad .$$

En vertu de (2.15) les fonctions $f_j(x)$ sont non-négatives quel que soit j entier naturel. Alors d'après (3.1) on a:

$$\int_\Omega |f_j(x)|dx = \int_\Omega f_j(x)dx = (v_{n_j} - w_o, T(v_{n_j}) - T(w_o)) =$$

$$= (v_{n_j} - w_o, F(v_{n_j}) - F(w_o)) = (v_{n_j} - w_o, F(v_{n_j})) -$$

$$-(v_{n_j} - w_o, F(w_o)) \leq \| v_{n_j} - w_o \| \, \| F(w_{n_j}) \| -$$

$$-(v_{n_j} - w_o, F(w_o)) .$$

L'expression dernière converge vers zéro, car $v_{n_j} \rightharpoonup w_o$, la suite $\{ v_{n_j} \}_{j=1}^{\infty}$ est bornée et

(3.17) $\quad \lim_{j\to\infty} \| F(v_{n_j}) \| = 0$

d'après la remarque 3.3.

Alors $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j(x)|dx = 0$, donc il existe une sous-suite, encore notée par f_n, telle que

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$$

presque partout dans Ω. Alors d'après le lemme 2.11 il existe une suite partielle, encore notée par v_{n_j}, telle que

$$\lim_{j\to\infty} D^i v_{n_j}(x) = D^i w_o(x)$$

presque partout dans Ω pour $|i| \leq k$.

Les fonctions $a_i(x, \xi)$ sont continues en ξ pour presque tout x de Ω, alors

$$\lim_{j\to\infty} a_i(x, \xi(u_o + v_{n_j})) = a_i(x, \xi(u_o + w_o))$$

presque partout dans Ω pour $|i| \leq k$. Soit $v \in \mathcal{E}(\overline{\Omega})$. On obtient facilement de l'inégalité de Hölder et de (2.5) que les fonctions $D^i v(x) a_i(x, \xi(u_o + v_{n_j}))$ sont absolument uniformément continues (les constantes positives seront désignées par le même symbole c):

Soient $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ quelconque pour l'instant, l'ensemble M mésurable, $M \subset \Omega$, $\mu(M) < \sigma$, alors

$$\int_M |D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + v_{n_j}))| dx \leq$$

$$\leq c \int_M |a_i(x, \xi(u_0 + v_{n_j}))| dx \leq c \int_M (1 + \sum_{|l| \leq k} |D^l(u_0 + v_{n_j})(x)|^{m-1}) dx$$

$$\leq c\,(\mu(M))^{\frac{1}{m}} (1 + \| u_0 + v_{n_j} \|^{m-1}) ,$$

donc il suffit de poser $\sigma = \left(\frac{\varepsilon}{c(1 + \| u_0 + v_{n_j} \|^{m-1})} \right)^{m}$.

Alors d'après le théorème de Tonneli on a pour $v \in \mathcal{E}(\overline{\Omega})$:

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + v_{n_j})) dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v(x) a_i(x, \xi(u_0 + w_0)) dx \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{j \to \infty} (v, Fv_{n_j}) = (v, Fw_0) .$$

Il en suit en vertu de (3.17) que $(v, Fw_0) = 0$ quel que soit v de $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$, alors $Fw_0 = 0$ et de l'unicité de la solution suit que $w_0 = v_0$. Alors d'après (3.16) nous avons

$$v_{n_j} \rightharpoonup w_0 .$$

On démontrera que la suite originale $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers v_0 . Supposons que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas faiblement vers v_0 . Alors $\varepsilon_0 > 0$, $f_0 \in V'$ et la sous-suite $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ existent tels que quel que soit k

(3.18) $\qquad |(v_{n_k} - v_0, f_0)| \geq \varepsilon_0$.

La suite $\{v_{n_k}\}$ est bornée, car $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, alors en vertu du théorème de Gantmacher-Eberlein-Šmuljan on peut trouver la suite partielle $\{v_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ telle que $v_{n_{k_j}} \rightharpoonup w$, où $w \in V$. De nouveau, on montrera que $w = v_o$, alors $\lim_{j \to \infty} (v_{n_{k_j}} - v_o, f_o) = 0$, ce qui n'est pas possible, car $\{v_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ satisfait (3.18).

<u>Théorème 3.3</u>. Soit $m > 1$. Les conditions (2.5), (2.14),(2.15),(2.18),(3.2) soient satisfaites. Alors l'assertion du théorème 3.2 est valable.

<u>Démonstration</u>. Du lemme 2.7 suit que l'opérateur T satisfait à la condition de la coercitivité faible.

Il suffit de montrer que la condition (2.18) entraîne (2.22).

$$\lim_{\sum_{|i|=k}|\xi_i|\to\infty} \frac{1}{\sum_{|i|=k}|\xi_i|^{m-1}+\sum_{|i|=k}|\xi_i|} \left(\sum_{|i|=k} a_i(x,\xi)\xi_i\right) \geq$$

$$\geq \lim_{\sum_{|i|=k}|\xi_i|\to\infty} \frac{1}{\sum_{|i|=k}|\xi_i|^{m-1}+\sum_{|i|=k}|\xi_i|} \left(c_1\sum_{|i|=k}|\xi_i|^m + c_2|\xi_{(0,0,\dots,0)}|^m - c_3\right) =$$

$$= +\infty .$$

Alors, les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites.

<u>Remarque 3.4</u> . Si l'on résout un problème aux limites pour $V = \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ sous les hypothèses du théorème 3.2 ou 3.3, alors la suite de la remarque 3.1 converge faiblement vers $v_o \in W_m^{(k)}(\Omega)$, où $u_o + v_o$ est la solution unique de ce problème.

C'était vrai pour $m \geq 2$.

Si $1 < m < 2$, alors la suite (3.7) converge faiblement vers v_o , où v_1 est quelconque de V , ε_m satisfont les conditions

$$\min\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{1}{4c^m M(R_n)} \|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon_n \leq \min\left(1, \left(\frac{1}{2c^m M(R_n)} \|w_n\|^{m-1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) ,$$

où $R_n = \|v_n\| + \|w_n\|$, $0 < \varepsilon \leq m-1$ quelconque,

$$M(R_n) = c_1 \varkappa^2 \frac{1+2^{m-1}}{m-1} 2^{m-\varepsilon-1} R_n^{m-\varepsilon-1} ,$$

c est défini par (2.3) et la fonction $w_n \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ est telle que quel que soit v de V , la relation (3.11) est valable.

B i b l i o g r a p h i e

[1] V.P. GANTMACHER, V.J. ŠMULJAN: O slaboj kompaktnosti v prostranstve Banacha,Matematičeskij sbornik (8)(50)(1940),489-492.

[2] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA: Inequalities, Cambridge 1934.

[3] J. NEČAS: Les équations elliptiques non linéaires.Cour d'été sur les équations aux dérivées partielles,Praha 1967.

[4] J. NEČAS: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,Praha 1967.

[4 bis] H.J. RYSER: Combinatorial mathematics,Moskva,1963.

[5] M.M. VAJNBERG: O schodimosti processa naiskorejšego spuska dlja nelinejnych uravnenij,Sibirskij matemat.žurn.2,II(1961),201-210.

[6] M.M. VAJNBERG: Variacionnyje metody issledovanija

nelinejnych operatorov, Moskva 1956.

(Received September 16, 1968)