Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jindřich Nečas

Sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques non linéaires

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 3, 365--413

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105189`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9, 3 (1968)

SUR LA RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES

Jindřich NEČAS, Praha

(Conférences, tenues au collège de France, mars 1968)

§ 1. Introduction.

Considérons un système elliptique des équations aux dérivées partielles pour le vecteur inconnu $u = (u_1, u_2, \dots u_\nu)$ et cherchons une solution faible appartenant au produit W des espaces de Sobolev: $W = \prod_{r=1}^{\nu} W_m^{(\varkappa_r)}(\Omega)$, $1 < m < \infty$, Ω étant un domaine borné de l'espace euclidien E_N. Comme d'habitude, on note $D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}$.

Le système soit de la forme

$$(1.1) \quad \sum_{|i| \le \varkappa_r} (-1)^{|i|} D^i a_i^r (x, D^j u_s) = f_r, \quad r = 1, 2, \dots \nu,$$

ou dans la forme intégrale

$$(1.2.) \quad \int_\Omega \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{|i| \le \varkappa_r} D^i \varphi_r \, a_i^r (x, D^j u_s) \, dx = \int_\Omega \varphi_r f_r \, dx, \quad \varphi_r \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Considérons le problème de Dirichlet: on se donne encore $u^0 \in W$ et on cherche u de W satisfaisant (1.1) ou dans la forme intégrale (1.2), tel que $\frac{\partial^\ell u_r}{\partial n^\ell} = \frac{\partial^\ell u_r^0}{\partial n^\ell}$ sur la frontière $\partial\Omega$ pour $\ell = 0, 1, \dots \varkappa_r - 1$, $\frac{\partial}{\partial n}$ étant la derivée selon la normale extérieure.

Les problèmes fondamentaux sont

I. Existence, unicité, dépendance continue des données.

II. Régularité de la solution faible.

III. Existence des solutions très faibles et leur régularité.

En ce qui concerne la question I, il est résolu d'une manière satisfaisante, la partie concernant l'existence et l'unicité, cf. par exemple M.I. Višik [1], F.E. Browder [2], J. Leray-J.L. Lions [3].

Pour la question II, dont nous nous occuperons, on peut la considérer comme une question classique, formulée par D. Hilbert comme son 19 problème et étroitement liée avec la position du problème et par là avec la question I. Si nous nous bornerons au point de vue des solutions faibles, nous pouvons faire l'aperçu suivant de la résolution de ce problème, à savoir de la démonstration que la solution appartient à $\prod_{k=1}^{\nu} C^{(\varkappa_k),\mu}(\Omega)$ s'il s'agit de la régularité dans l'intérieure du domaine ou à $\prod_{k=1}^{\nu} C^{(\varkappa_k),\mu}(\overline{\Omega})$ s'il s'agit de la régularité jusqu'à la frontière:

[5] Ch.B. Morrey, 1939, $N = 2$, $\nu \geq 1$ (pratiquement $\nu = 1$), $\varkappa_k = 1$, $1 < m < \infty$,

[4] E. De Giorgi, 1957, $N \geq 2$, $\nu = 1$, $\varkappa = 1$, $m = 2$,

[7] O.A. Ladyženskaja-N.N. Uralceva 1959, $N \geq 2$, $\nu = 1$, $\varkappa = 1$, $1 < m < \infty$,

[7] " $N \geq 2$, $\nu \geq 1$ (pratiquement $\nu = 1$), $\varkappa_k = 1$, $m = 2$,

[6] Ch.B. Morrey, 1960, $N \geq 2$, $\nu = 1$, $\varkappa = 1$, $1 < m < \infty$,

[8] J. Nečas 1966, $N = 2$, $\nu = 1$, $\varkappa \geq 1$, $m = 2$,

[9] J. Nečas 1967, $N = 2$, $\nu = 1$, $\varkappa \geq 1$, $1 < m < \infty$.

Le succès de la résolution du problème pour une équation du deuxième ordre est basé sur le théorème de De Giorgi-Nash, cf. E.De Giorgi [4]; voici la généralisation de ce théorème par G. Stampacchia, cf.[18]: si u est une solution faible de l'équation linéaire $-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = f$ avec $c|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j$, $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_n$, $n > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^{(0),\mu}(\Omega)$.

Revenons au système (1.1). Formellement, on obtient de (1.1) en dérivant:

$$(1.3)\sum_{|i|\leq \varkappa_k}\sum_{s=1}^{\nu}\sum_{|j|\leq \varkappa_s}(-1)^{|i|}D^i\left(\frac{\partial a_i^k}{\partial D^j u_s}D^j\frac{\partial u_s}{\partial x_\ell}\right)=\frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}-\sum_{|i|\leq \varkappa_k}(-1)^{|i|}D^i\frac{\partial a_i^k}{\partial x_\ell}$$

ce qui est un système linéaire pour $\frac{\partial u_s}{\partial x_\ell}$. Pour $m = 2$, on a $\frac{\partial a_i^k}{\partial D^j u_s} \in L_\infty$, alors dans le cas $\nu = 1$, $\varkappa = 1$, on peut utiliser le théorème de De Giorgi-Nash. Si $m \neq 2$, il suffit de savoir que les premières dérivées sont bornées. Ceci, on peut obtenir de (1.2) pour $m \geq 2$ en y posant pour $\varphi = |\frac{\partial u}{\partial x_\ell}|^\lambda \sigma$ avec σ indéfiniment différentiable, $\sigma \geq 0$, et de faire tendre $\lambda \to \infty$; pour les détailles cf. E.R. Buley [20] ou J. Nečas [19].

La méthode utilisée par Ch.B. Morrey dans son travail [5] est basée sur l'estimation suivante: si $dist\,(K_\kappa(x_0), \partial\Omega) \geq d > 0$ *), alors sous les hypothèses du travail en question, l'intégrale

$\int_{K_\kappa(x_0)}\sum_{|i|=2}\sum_{s=1}^{\nu}(D^i u_s)^2 dx \leq c(d)\kappa^\lambda$, $0 < \lambda$; d'ici suit facilement que $u \in C^{(1),\mu}(\Omega)$ avec $\mu = \frac{\lambda}{2}$.

La même idée est utilisée au travail de l'auteur [8]; dans nos conférences, nous reviendrons aux espaces L_p, $p > 2$ et utiliserons un analogue du théorème de De Giorgi-Nash valable au cas $\nu = 1, \varkappa \equiv k \geq 1$: si $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation

$$(1.4) \quad \sum_{|i|=|j|=k} D^i (A_{ij} D^j u) = \sum_{|i|=k} D^i f_i \quad , \quad \text{avec}$$

$$f_i \in L_p, \quad p > 2 ,$$

si $\gamma_1 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leq \sum_{|i|=|j|} A \quad \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \sum_{|i|=k} \xi_i^2$ (et ici pour simplifier si $A_{ij} = A_{ji}$), alors $u \in$ $\in W_{p_1}^{(k)}(\Omega')$, $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ avec p_1 satisfaisant $2 < p_1 \leq p$. Malheureusement, on ne peut pas démontrer que $p_1 > N$ pour $N \geq 3$, il existe un contreexemple, cf. N.G. Meyers [22]. On voit, que le cas $m = 2$, si l'on considère la régularité dans l'intérieure du domaine, est résolu par ce théorème. Si $1 < m < \infty$, on peut démontrer une estimation "a priori" pour $C^{(k)}(\Omega')$ et d'ici on revient à l'équation (1.4).

Nous nous occuperons dans nos conférences du cas $N = 2$, $\nu = 1$, $k \geq 1$, $1 < m < \infty$. Pour les autres cas, cf. les livres déjà cités de Ch.B. Morrey [6] et de O.A. Ladyženskaja-N.N. Uralceva [7].

Après avoir rédigé ces conférences, j'ai pris connaissance des travaux de E.De Giorgi [23], E. Giusti - M. Mi-

---

*) $K_r(x_0) \equiv \{x, |x - x_0| < r\}$

randa [24], Ch.B. Morrey [25], tous encore non publiés, qui complètent d'une manière essentielle l'aperçu ci-dessus.

E. De Giorgi montre que la fonction $u = x\,|x|^{\alpha}$, avec $\alpha = -\frac{N}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(2N-2)^2+1}}\right]$, $N \geq 3$, est une extrémale appartenant à $[W_2^{(1)}]^N$ de la fonctionnelle

$$\int_{\Omega}\Big[\Big((N-2)\sum_{h=1}^{N}\frac{\partial u_h}{\partial x_h} + N\sum_{h,k=1}^{N}\frac{x_h x_k}{|x|^2}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\Big)^2 + \sum_{h,k=1}^{N}\Big(\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\Big)^2\Big]dx$$

et satisfait alors au système elliptique linéaire

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{rs}\frac{\partial u^s}{\partial x_j}\Big) = 0\,, \qquad r = 1, 2, \ldots N$$

pour lequel la condition d'éllipticité

$$\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{r,s=1}^{N} a_{ij}^{rs}\,\xi_i^r\,\xi_j^s \geq c\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i^s)^2$$

est valable. Le vecteur $x\,|x|^{\alpha}$ n'est pas borné dans l'origine.

On voit aisément, comme c'est remarqué au travail, que la fonction $f(x) = |x|^{\alpha+2}$ de $W_2^{(2)}$ n'est pas dans $C^{(1),\mu}$ au voisinage de l'origine, quoique elle soit une extrémale de la fonctionnelle

$$\int_{\Omega}\Big[\Big((N-2)\Delta f + N\sum_{h,k=1}^{N}\frac{x_h x_k}{|x|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_h\partial x_k}\Big)^2 + \sum_{h,k=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_h\partial x_k}\Big)^2\Big]dx\,.$$

$f(x)$ satisfait alors à une équation du quatrième ordre

$\sum_{|i|=|j|=2} D^i (a_{ij} D^j f) = 0$, où la condition d'ellipticité $\sum_{|i|=|j|=2} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c \sum_{|i|=2} \xi_i^2$ est valable.

Les contreexemples de E. De Giorgi montrent que le procédé de linéarisation audessus mentioné, n'est pas applicable pour $\nu = 1$, $N \geq 3$ ou $\nu \geq 1, k \geq 2, N \geq 3$.

Une réponse partielle à ce qui se passe au cas non linéaire pour $\nu > 1$, $N \geq 3$ et $\nu = 1$, $k \geq 2$ est contenue au contreexemple de E. Giusti - M. Miranda: le vecteur $u = \frac{x}{|x|}$ est une extrémale pour $N \geq 3$, appartenat à $[W_2^{(1)}]^N$, de la fonctionnelle

$$\int_\Omega [\sum_{i,j=1}^{N} (\frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2 + \{\sum_{i,j=1}^{N} (\delta_{ij} + \frac{4}{N-2} \frac{v_i v_j}{1+|v|^2}) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\}^2] \, dx$$

et si l'on considère le problème de Dirichlet pour une boule $K_r(0)$ et pour $u^0 = \frac{x}{|x|}$, le vecteur en question est sa solution unique pour N assez grand. L'extrémale u satisfait au système non linéaire

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^r (u, \frac{\partial u_s}{\partial x_j}) + a_r (\frac{\partial u_s}{\partial x_j}) = 0, \quad r = 1, 2, \dots N ,$$

où la condition d'ellipticité

$$\sum_{r,s=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i^r}{\partial (\frac{\partial u_s}{\partial x_j})} \xi_i^r \xi_j^s \geq c \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} (\xi_i^r)^2$$

est valable. D'autre part, on a

$$\left| \frac{\partial a_i^r}{\partial u_\ell} \right| \leq c \sum_{s=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right|$$

qui est une condition plus faible que les notres, cf.§ 2 et le livre [6].

En vertu des contreexemples cités, il faut chercher une autre définition du problème de la régularité pour qu'on obtient un résultat affirmatif dans le cas $\nu > 1$, $N \geq 3$ (ou $k > 1$, $\nu \geq 1$, $N \geq 3$). Ceci est fait dans le travail de Ch.B. Morrey [25], où l'auteur considère les systèmes généraux audessus mentionés.

Le résultat principale sous les conditions de croissance pour a_i^k , correspondantes aux notres et sous la condition d'ellipticité:

$$\sum_{i,j=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\varkappa_i} \sum_{|\beta|=\varkappa_j} \frac{\partial a_\alpha^i}{\partial \xi_\beta^j}(x,\xi_j^\ell)\, \xi_\alpha^i\, \xi_\beta^j \geq$$

$$\geq c\, V^{m-2} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\varkappa_i} (\xi_\alpha^i)^2 \quad ,$$

où $V = 1 + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=\varkappa_i} |\xi_\alpha^i|$,

Ch.B.Morrey démontre pour la solution faible de (1.1) avec $f_k = 0$ que $u_i \in C^{(\varkappa_i)}(D)$ avec $D = \Omega - Z$; Z est un sousensemble localement compacte et de mesure zéro.

§ 2. Les hypothèses

Le domaine Ω en question soit à frontière lipschitzienne. Pour les estimations au voisinage de la frontière, on supposera la frontière $\partial\Omega$ indéfiniment continûment différentiable; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ On désigne par $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles, indéfiniment continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$ et par $\mathcal{D}(\Omega)$ le sousespace de $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ des fonctions à support compact. La notation usuelle $D^i = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_N^{i_N}}$ est utilisée. On introduit $W_m^{(k)}(\Omega)$, l'espace des fonctions réelles, dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont de m-ème puissance sommable sur Ω, muni de la norme $\|u\|_{W_m^{(k)}} \equiv$ $\equiv \left(\int_\Omega \sum_{|i| \le k} |D^i u(x)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}}$.

On note par $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$. Désignons par $W_p^{(k)}(\Omega)$ pour k un entier, négatif, le dual de $\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{(-k)}(\Omega)$ (toujours $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ dans la suite) avec la norme du dual. On désigne par $C^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω et par $C^{(k)}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$ avec la norme habituelle. On note encore par $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions, dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont μ-holdériennes dans $\overline{\Omega}$, $0 < \mu \le 1$, muni de la norme $\|u\|_{C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}}$

$$\sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha u(x)| + \sup_{x \ne y,\, x, y \in \overline{\Omega}} \sum \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\mu} .$$

Nous utiliserons les théorèmes de Sobolev d'immersion: pour un exposé complet, cf. par exemple le livre [12] de l'auteur.

<u>Lemme 2.1.</u> Soit $\Omega \subset E_N$, $N \ge 2$, un domaine à frontière lipschitzienne. Alors $\overline{\mathcal{E}(\overline{\Omega})} = W_m^{(k)}(\Omega)$. Si $km < N$, $W_m^{(k)}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ algébrique-

ment et topologiquement pour chaque q, $1 \leq q < \infty$ et l'application identique de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_q(\Omega)$ est complètement continue. Si $km > N$ et: $\mu = k - N/m$ si $k - N/m < 1$, $\mu < 1$ si $k - N/m = 1$ et $\mu = 1$ si $k - N/m > 1$, alors $W_m^{(k)}(\Omega) \subset C^{(0),\mu}(\overline{\Omega})$ algébriquement et topologiquement.

Désignons par $a_i(x, \xi_j)$ les fonctions continues pour $x \in \overline{\Omega}$, $-\infty < \xi_j < \infty$, $|j| \leq k$. Nous supposerons toujours dans la suite:

(2.1) $|a_i(x, \xi_j)| \leq c(1 + \sum_{j \in M} |\xi_j|)^{m-1}$, $1 < m < \infty$,

où M est un sousensemble des indices $|j| \leq k$, contenant les indices $|j| = k$. Soit pour $m \geq 2$:

(2.2) $$u_0 \in W_m^{(k)}(\Omega),$$

pour $1 < m < 2$:

(2.3) $$u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega),$$

pour $m \geq 2$, $|i| \leq k$;

(2.4) $$f_i \in L_2(\Omega),$$

pour $1 < m < 2$,

(2.5) $f_i \in L_{m'}(\Omega)$, $1/m' + 1/m = 1$.

Désignons par $\rho(x) \equiv dist(x, \partial\Omega)$. Pour les estimations dans l'intérieure du domaine, nous supposerons encore: si $m \geq 2$, alors

(2.6) $$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right|^{p_0} \rho^{k p_0} dx < c, \quad 2 < p_0 < \frac{2N}{N-2},$$

et pour $1 < m < 2$:

(2.7) $$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right|^{m'} \rho^{k m'} dx < c.$$

Pour les estimations jusqu'à la frontière, nous supposerons si $m \geq 2$:

(2.8) $$f_i \in W_{p_0}^{(1)}(\Omega), \quad p_0 > 2 ,$$

(2.9) $u_0 \in C^{(k),\mu_0}(\bar{\Omega}) \cap W_m^{(k+1)}(\Omega) \cap W_{p_1}^{(k+1)}(\Omega), \quad p_1 > p_0$

et si $1 < m < 2$:

(2.10) $$f_i \in W_{m'}^{(1)}(\Omega)$$

et (2.9).

Une fonction u de $W_m^{(k)}(\Omega)$ sera la solution faible du problème de Dirichlet

(2.11a) $$\sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i a_i(x, D^j u) = \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i f_i$$

dans Ω ,

(2.11b) $$\frac{\partial^j u}{\partial n^j} = \frac{\partial^j u_0}{\partial n^j}, \; j = 0,1,\dots k-1 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

(où $\frac{\partial^j}{\partial n^j}$ signifie la j-ème dérivée selon la normale extérieure à $\partial\Omega$) si pour chaque $v \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$:

(2.12) $$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v \, a_i(x, D^j u) dx = \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v \, f_i \, dx$$

et si

(2.13) $$u - u_0 \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega) .$$

Désignons par $V = 1 + \sum_{\alpha \in M} |\xi_\alpha|$. Si $m = 2$, on supposera

(2.14) $$\sum_{|i| \leq k} \xi_i \, a(x, \xi_j) \geq c_1 \sum_{i \in M} \xi_i^2 - c_2 ,$$

(On désigne les constantes positives par le même symbole c . Au cas nécessaire, on utilisera les indices. Les constantes avec la signification pour tout le travail, seront indiquées par $\gamma_1, \gamma_2, \dots$.) et encore l'existence des dérivées $\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}$, $\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \equiv a_{ij}$ continues pour $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi_j| < \infty$. On supposera

(2.15) $$\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, \xi_j) \leq c V ,$$

(2.16) $$|a_{ij}(x, \xi_\alpha)| \leq c ,$$

(2.17a) $$\gamma_1 \sum_{1 \leq |i| \leq k} \xi_i^2 \leq \sum_{1 \leq |i|, |j| \leq k} a_{ij}(x, \xi_\alpha) \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \sum_{1 \leq |i| \leq k} \xi_i^2 ,$$

(2.17b) $$\Big|\sum_{1 \leq |i| = |j| = k} \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \xi_i \eta_j\Big| \leq \theta \gamma_1 \Big(\sum_{1 \leq |i| \leq k} \xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{1 \leq |i| \leq k} \eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta < 1 .$$

Si $m \neq 2$, nous supposons pour les coefficients $a_i(x, \xi_j)$ une certaine propriété qui rendra possible de considérer une classe homotopique des opérateurs non-linéaires. Pour ceci, désignons par $V_{\lambda_\tau} = 1 + \lambda_\tau \sum_{\alpha \in M} |\xi_\alpha|$ et en posant

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\sigma) : \quad V_\lambda = \prod_{i=1}^{\sigma} V_{\lambda i} .$$

Le cas $m > 2$, régularité dans l'intérieure du domaine: posons $\sigma = [\frac{m}{2}]$, $h = \frac{m-2}{\sigma}$. Nous supposerons l'existence des fonctions $a_i(x, \xi_j, \lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\sigma)$, définies pour $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi_j| < \infty$, $0 \leq \lambda_\tau \leq 1$, continues au domaine de définition avec les dérivées $\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}$, $\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \equiv a_{ij}$ et telles que $a_i(x, \xi_j, 0) = a_i(x, \xi_j)$. Enfin, on supposera:

(2.18) $$\sum_{1 \leq |i| \leq k} a_i(x, \xi_j, \lambda) \xi_i \geq c_1 V_\lambda^{-h} \sum_{i \in M} |\xi_i|^m - c_2 ,$$

(2.19) $$|a_i(x, \xi_j, \lambda)| + \Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, \xi_j, \lambda)\Big| \leq c V^{m-1} V_\lambda^{-h} ,$$

(2.20) $$|a_{ij}(x, \xi_\alpha, \lambda)| \leq c V^{m-2} V_\lambda^{-h} ,$$

(2.21a) $\gamma_1 V^{m-2} V_\lambda^{-h} \sum_{|i|=h} \xi_i^2 \leq \sum_{|i|,|j|=h} a_{ij}(x,\xi_\alpha,\lambda)\xi_i\xi_j \leq$

$$\leq \gamma_2 V^{m-2} V_\lambda^{-h} \sum_{|i|=h} \xi_i^2 ,$$

(2.21b) $|\sum \quad \frac{1}{2}(a_{ij}(x,\xi_\alpha,\lambda)-a_{ji}(x,\xi_\alpha,\lambda))\xi_i\eta_j| \leq$

$$\leq \gamma_1 \theta (\sum_{|i|=h} \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{|i|=h} \eta_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta < 1 .$$

Exemple 1. Si nous cherchons minimum de la fonctionnelle $\int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha|=h} (D^\alpha u)^2)^{\frac{m}{2}} dx$ dans la classe des fonctions satisfaisant à (2.13), nous obtenons pour la solution, la condition (2.12) avec $f_i \equiv 0$ et avec $a_i(x,\xi_j) = m(1 + \sum_{|\alpha|=h} \xi_\alpha^2)^{\frac{m}{2}-1} \xi_i$. Si nous posons $a_i(x,\xi_j,\lambda) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}[(1+\sum_{|\alpha|=h} \xi_\alpha^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{6} (1+\lambda_i^2 \sum_{|\alpha|=h} \xi_\alpha^2)^{\frac{h}{2}}]$, nous obtenons les conditions (2.13)-(2.21).

Le cas $1 < m < 2$, régularité dans l'intérieure du domaine: nous supposons l'existence des fonctions $a_i(x, \xi_j, \lambda)$ définies pour $x \in \bar{\Omega}$, $|\xi_j| < \infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$, continues au domaine de définition avec les dérivées

$\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}$, $\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \equiv a_{ij}$, telles que $a_i(x,\xi_j,0) = a(x,\xi_j)$ et telles que

(2.22) $\sum_{|i|=h} \xi_i a_i(x,\xi_j,\lambda) \geq c_1 V_\lambda^{2-m} \sum_{i\in M} |\xi_i|^m - c_2$,

(2.23) $|a_i(x,\xi_j,\lambda)| + |\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x,\xi_j,\lambda)| \leq c V^{m-1} V_\lambda^{2-m}$,

(2.24) $|a_{ij}(x,\xi_\alpha,\lambda)| \leq V^{m-2} V_\lambda^{2-m}$,

(2.25a) $\gamma_1 V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|=h} \xi_i^2 \leq \sum_{|i|,|j|=h} a_{ij}(x,\xi_\alpha,\lambda)\xi_i\xi_j \leq \gamma_2 \cdot$

(2.25a)

$$\cdot V^{m-2}\, V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|\le k} \xi_i^2 \quad ,$$

(2.25b) $a_{ij} = a_{ji}\ , \quad |i| = |j| = k$.

Exemple 2. $a_i(x, \xi_j)$ de l'exemple 1. Si nous posons $a_i(x, \xi_j, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} [(1 + \sum_{|\alpha|=k} \xi_\alpha^2)^{\frac{m}{2}}$.

$\cdot (1 + \lambda^2 \sum_{|\alpha|=k} \xi_\alpha^2)^{1-\frac{m}{2}}]$, nous obtenons (2.22) - (2.25).

Pour la régularité de la solution jusqu'à la frontière, nous remplaçons les conditions sur les $a_i(x, \xi_j, \lambda)$ par les suivantes: nous supposerons encore l'existence des fonctions $a_i(x, \xi_j, \mu)$, définies pour $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi_j| < \infty$, $2 \le \mu \le m$ (ou $m \le \mu \le 2$ au cas $1 < m < 2$), continues au domaine de définition avec les dérivées $\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}$, $\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \equiv a_{ij}$, telles que $a_i(x, \xi_j, m) = a_i(x, \xi_j)$ et telles que

(2.26) $\sum_{|i|\le k} \xi_i\, a_i(x, \xi_j, \mu) \ge c_1 \sum_{|i|=k} |\xi_i|^\mu - c_2$,

(2.27) $|a_i(x, \xi_j, \mu)| + |\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, \xi_j, \mu)| \le c\, V^{\mu-1}$,

(2.28) $|a_{ij}(x, \xi_j, \mu)| \le c\, V^{\mu-2}$,

(2.29a) $\gamma_1 V^{\mu-2} \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \le \sum_{|i|,|j|\le k} a_{ij}(x, \xi_\alpha, \mu) \xi_i \xi_j \le \gamma_2 V^{\mu-2} \sum_{|i|\le k} \xi_i^2$,

(2.29b) $|\sum_{|i|=|j|=k} \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \xi_i \eta_j| \le \theta_1 \gamma_1 (\sum_{|i|=k} \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{|j|=k} \eta_i^2)^{\frac{1}{2}}$,

$\theta_1 < 1$, $m \ge 2$ ($a_{ij} = a_{ji}$ pour $|i| = |j| = k$, $m < 2$).

Exemple 3. On prend a_i de l'exemple 1. Évidemment, il suffit de poser $a_i(x, \xi_i, \mu) = \mu(1 + \sum_{|\alpha|=k} \xi_\alpha^2)^{\frac{\mu}{2}-1} \xi_i$.

En ce qui concerne l'existence de la solution du problème (2.12), (2.13), on peut utiliser le théorème de Leray-Lions ou de F. Browder, cf. [3] et [2]. Pour notre but, il suffit le théorème suivant, cas particulier du théorème de Leray-Lions:

Lemme 2.2. Soit V un espace de Banach, réflexif, séparable, $A(v)$ un opérateur borné de V dans V' (son dual), continu de tout sousespace de V de dimension fini dans V' faible. On suppose la coercitivité:

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{(v, A(v))}{\|v\|} = \infty \tag{2.30}$$

où (,) désigne la dualité entre V et V'. Alors si $A(v)$ est monoton: $(v-u,\ A(v)-A(u)) \geq 0$ (strictement monoton: $(v-u,\ A(v)-A(u)) > 0$ pour $u \neq v$), l'opérateur A est surjectif (biunivoque et A^{-1} est borné).

Pour compléter les résultats de Leray-Lions, nous démontrerons leur théorème sans supposer la séparabilité de V.

Théorème 1 (Leray-Lions). Soit V un espace de Banach réel, réflexif, $A(v)$ un opérateur borné de V dans V', continu de tout sousespace de V de dimension fini dans V' faible. On suppose (2.30). Alors s'il existe une application bornée de $V \times V$ dans V', soit $A(v, u)$, telle que $A(u, u) = A(u)$ pour $u \in V$ et vérifie les conditions:

(i) pour chaque v de V l'application $v \to A(v, u)$ est continue de toute droite de V dans V' faible et pour $u, v \in V$: $(u-v,\ A(u,u)-A(v,u)) \geq 0$,

(ii) si $u_n \rightharpoonup u$ dans V et si $(u_n - u, A(u_n, u_n) - A(u, u_n)) \to 0$ alors pour v de $V: A(v, u_n) \rightharpoonup A(v,u)$ dans V',

(iii) si $u_n \rightharpoonup u$ et $A(v, u_n) \rightharpoonup v'$ dans V', alors $(u_n, A(v, u_n)) \to (u, v')$,

alors A est surjectif.

<u>Démonstration</u>. Soit $F \subset V$ un sousensemble de dimension fini, F' son adjoint et désignons par $(v, f)_F$ la dualité entre F,F'. Définissons A_F de F dans F' par $u, v \in F: (u, A_F v)_F = (u, A_F v)$. Si l'on introduit dans F et F' une base biorthogonale, soit e_i, e'_j, $i, j = 1, 2, \dots \varkappa$, alors $u = \sum_{i=1}^{\varkappa} x_i e_i$, $f = \sum_{j=1}^{\varkappa} y_j e'_j$ et on peut identifier F,F' avec l'espace euclidien $E_\varkappa$ et A_F avec un opérateur T, continue de $E_\varkappa$ dans $E_\varkappa$. On voit que $(x, Ty)_{E_\varkappa} = (u, A_F v)_F$, d'où

$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(x, Tx)}{\|x\|} = \infty$. Soit $f \in V', (v, f_F)_F = (v, f)$ et $\eta \in E_\varkappa$, engendré par f_F. Il suit de la coercitivité de T l'existence de $R > 0$, tel que pour $\|x\| \geq R$: $(x, Tx) - (x, \eta) > 0$. Il en suit que la boule $\|x\| \leq 2R$ se transforme dans elle même par la transformation $x - \varepsilon(Tx - \eta)$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit. D'après le théorème de Brower, il existe un point fixe, soit x_F, alors $Tx_F = \eta$. Désignons par u_F le point correspondant dans F. Nous avons alors pour v de F:

(2.31) $$(v, Au_F) = (v, f).$$

Il suit de (2.30) que $\|u_F\| \leq c$. Désignons par Λ l'ensemble de tous les sousespaces de V, de dimension finie et par $V_{F_0} = \bigcup_{F_0 \subset F \in \Lambda} u_F$ et par $\overline{V_{F_0}}$ la fermeture dans la topologie faible. Évidemment, la famille des V_{F_0} possède la propriété des intersections finies. L'espace V étant réflexif, la boule unité est faiblement compacte d'après le théorème de Eberlein-Šmuljan. Il en suit que $\bigcap_{F_0 \in \Lambda} \overline{V_{F_0}}$ n'est pas vide, donc il existe

$u_0 \in \bigcap_{F_0 \in \Lambda} \overline{V_{F_0}}$. Soit $v \in V$ et $F_0 \in \Lambda$, l'ensemble contenant v et u_0 . D'après un théorème de Kaplansky, V_{F_0} étant faiblement précompacte, il existe une suite u_n de V_{F_0} , telle que $u_n \rightharpoonup u_0$. Comme u_n est une suite bornée, $A(u_0, u_n)$ l'est aussi, alors on peut supposer que $A(u_0, u_n) \rightharpoonup u'$. Vérifions que

$$(2.32) \qquad (u_n - u_0, A(u_n, u_n) - A(u_0, u_n)) \to 0 \ .$$

En effet, $(u_n, A(u_n, u_n)) = (u_n, f) \to (u_0, f)$, $(u_0 A(u_n, u_n)) = (u_0, f)$. D'après (iii): $(u_n, A(u_0, u_n)) \to (u_0, u')$ et enfin $(u_0, A(u_0, u_n)) \to (u_0, u')$; tout cela entraîne (2.32). Alors pour v en question: $A(v, u_n) \rightharpoonup A(v, u_0)$ et d'après (iii): $(u_n, A(v, u_n)) \to (u_0, A(v, u_0))$. On a $c_n = (u_n - v, A(u_n, u_n) - A(v, u_n)) \to (u_0 - v, f - A(v, u_0))$.

Mais d'après (i) $c_n \geq 0$, donc

$$(2.33) \qquad (u_0 - v, f - A(v, u_0)) \geq 0$$

pour chaque v de V . Si nous posons $v = u_0 - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, il suit de (2.33) que $(w, f - A(u_0 - \lambda w, u_0)) \geq 0$ et en faisant tendre λ vers 0 , il en suit $(w, f - A(u_0)) \geq 0$ pour chaque w de V , d'où l'assertion.

Il suit aisément, sous nos hypothèses, l'existence unique de la solution du problème (2.12),(2.13). En effet, définissons T(w) de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)} \longrightarrow (\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)})'$ en posant

$(v, T(w)) = \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v\, a_i(x, D^j u_0 + D^j w)\, dx$.

Posons $(v, f) = \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v f_i \, dx$. L'opérateur T est continu de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(K)}$ dans $(\overset{\circ}{W}{}_m^{(K)})'$ et en vertu de (2.17) ou (2.21) ou (2.25), où l'on pose $\lambda = 0$, est strictement monotone et en vertu de (2.14) ou (2.18) ou (2.22), coercitif. Nous avons utilisé:

Remarque 2.1 $(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^m dx$ est une norme équivalente dans $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}$.

Remarquons que beaucoup d'estimations et d'énoncés qui suivront sont valables pour la dimension $N > 2$ quoique le but du travail soit N = 2 ; nous les démontrerons dans ce cas pour le N général.

§ 3. Lemmes auxiliaires et lemmes sur la solution faible des équations linéaires

Considérons σ , un domaine borné à frontière $\partial\sigma$ indéfiniment différentiable, A_{ij} , $|i| = |j| = k$ des fonctions de L_∞ réelles, telles que

(3.1) $$\gamma_1 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leq \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij}\, \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 ,$$

(3.2) $$\left|\sum \tfrac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}) \xi_i \eta_j\right| \leq \gamma_1 \theta \left(\sum_{|i|=k} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|i|=k} \eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta < 1 .$$

Soient $f_i \in L_p(\sigma)$, $|i| = k$, $p > 2$ et $\omega \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(K)}(\sigma)$, une solution faible de l'équation

$$(3.3) \quad \sum_{|i|=|j|=k} (-1)^k D^i (A_{ij} D^j \omega) = (-1)^k \sum_{|i|=k} D^i f_i \quad .$$

Soit $\rho > 0$. Nous avons

Théorème 2. Soit ω une solution faible de (3.3), ω de $\overset{\circ}{W}{}_2^{(K)}(\sigma)$. Alors il existe deux constantes $\gamma_3(\rho) > 1$, $\gamma_4(\rho) > 1$ telles que pour p satisfaisant

$$(3.4) \quad p[1-(\log(2\gamma_2-(1-\theta)\gamma_1)-\log(2\gamma_2-2(1-\theta)\gamma_1))/\log\gamma_3] \leq 2 \, ,$$

on a

$$(3.5) \qquad \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |D^i \omega|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2}{(1-\theta)\gamma_1} \gamma_4^{1-\frac{2}{p}} \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Démonstration. Supposons d'abord $A_{ij} \in \mathcal{E}(\overline{\sigma})$ et soit $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $|i| = |j| = k$ et $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\sigma)$ une solution faible de l'équation

$$(3.6) \qquad \sum_{|i|=k} (-1)^k D^i (\delta_{ij} \quad D^j w) = \sum_{|i|=k} (-1)^k D^i g_i$$

avec $g_i \in L_p(\sigma)$, $p = 2 + \rho$. Nous avons d'après un théorème du travail [10]:

$$(3.7) \qquad \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |D^i w|^{2+\rho} dx\right)^{\frac{1}{2+\rho}} \leq c_1(\rho) \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |g_i|^{2+\rho} dx\right)^{\frac{1}{2+\rho}} .$$

On a trivialement

$$(3.8) \qquad \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} (D^i w)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} g_i^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

d'où, d'après le théorème de Riesz-Thorin, cf. par exemple A. Zygmund [11], nous obtenons pour $2 \leq p \leq 2 + \rho$:

$$(3.9) \quad \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |D_i w|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1(\rho)^{\frac{1-\frac{2}{p}}{1-\frac{2}{2+\rho}}} \left(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |g_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

En supposant pour le moment $A_{ij} \in \mathcal{E}(\overline{\sigma})$, la solution ω de (3.6) appartient à $W_p^{(k)}(\sigma)$ d'après le travail [10] déjà cité. Nous avons pour φ de $\mathcal{D}(\sigma)$:

$$(3.10)\quad \int_\sigma \sum_{|i|=|j|=k} \sigma_{ij}\, D^i\varphi\, D^j\omega\, dx = \int_\sigma \sum_{|i|=|j|=k} (\sigma_{ij} - \gamma_2^{-1} A_{ij}) D^i\varphi\, D^j\omega\, dx + \gamma_2^{-1} \int_\sigma \sum_{|i|=k} D^i\varphi\, f_i\, dx \,.$$

Nous avons

$$\Big(\int_\sigma \sum_{|i|=k} \Big|\sum_{|j|=k} (\sigma_{ij} - \gamma_2^{-1} A_{ij}) D^j\omega\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\sum_{|i|=k} \|h_i\|^{p'}_{L_{p'}(\sigma)} = 1}$$

$$\int_\sigma \sum_{|i|=|j|=k} (\sigma_{ij} - \gamma_2^{-1} A_{ij}) h_i D^j\omega\, dx \le \Big(1 - \frac{1-\theta}{\gamma_2}\gamma_1\Big) \sup \int_\sigma \Big(\sum_{|i|=k} h_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\Big(\sum_{|i|=k} (D^i\omega)^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx \le \Big(1 - \frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2}\Big) \sup \Big(\int_\sigma \Big(\sum_{|i|=k} h_i^2\Big)^{\frac{p'}{2}} dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_\sigma \Big(\sum_{|i|=k} (D^i\omega)^2\Big)^{\frac{p}{2}} dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(1 - \frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2}\Big) \cdot c_2^{\frac{p-2}{p}} \Big(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} ,$$

alors on en tire, en tenant compte de (3.9)

$$(3.11)\quad \Big(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le c_1(\rho)^{\frac{1-\frac{2}{p}}{1-\frac{2}{2+\rho}}} \gamma_2^{-1} \Big(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + c_1(\rho)^{\frac{1-\frac{2}{p}}{1-\frac{2}{2+\rho}}} c_2^{1-\frac{2}{p}} \cdot \Big(1 - \frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2}\Big) \Big(\int_\sigma \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Si nous posons $\gamma_3 = c_1(\rho)^{\frac{1}{1-\frac{2}{2+\rho}}} \cdot c_2$, $\gamma_4 = c_1(\rho)^{\frac{1}{1-\frac{2}{2+\rho}}}$, nous obtenons pour $2 \le p \le 2+\rho$, p satisfaisant (3.4):

$$\gamma_3^{1-\frac{2}{p}} \Big(1 - \frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2}\Big) \le 1 - \frac{1}{2} \frac{(1-\theta)\gamma_1}{\gamma_2} ,$$

d'où (3.5). Nous pouvons maintenant trouver $A^n_{ij} \le \mathcal{E}(\overline{\sigma})$ de sorte que $A^n_{ij} \longrightarrow A_{ij}$ en mesure, $|A^n_{ij}| \le c$, et que la condition (3.1),(3.2) est satisfaite. Soit ω_n la solution correspondant à A^n_{ij}. Il suit du théorème, démontré au livre de l'auteur [12] que $\omega_n \to \omega$ dans $W_2^{(k)}(\sigma)$, d'où la démonstration.

<u>Lemme 3.1</u>. Soit $1 < q < \infty$, $0 \le l \le k-1$. Alors

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\sigma)$ et $|i| = \ell$ on a: $\int_\sigma D^i \varphi\, g\, dx =$
$= \int_\sigma \sum_{|j|=k} D^j \varphi\, g_j\, dx$ avec

(3.12) $$\| g \|_{L_p} \leq c \| g \|_{L_q} ,$$

où $1/p \geq 1/q - (k-\ell)/N$ si $(k-\ell)q < N$ et $1 \leq p$ si $(k-\ell)q > N$.

Démonstration. Soit $u \in \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_q(\sigma) \cap W^{(2k)}_q(\sigma)$ la solution de l'équation $\sum_{|i|=2k} D^{2i} u = g$ dans σ . On a d'après le travail [10]: $\|u\|_{W^{(2k)}_q(\sigma)} \leq c \| g \|_{L_q(\sigma)}$; si nous posons $(-1)^{k-\ell} D^{i+j} u = g_j$, nous obtenons en vertu du lemme 2.1 l'assertion.

Lemme 3.2. Soit $u \in W^{(1)}_p(\sigma)$, $p > N$. Alors
$$\|u\|_{C(\overline{\sigma})} \leq c \cdot \left(\frac{p-1}{p-N}\right)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^N \left(\int_\sigma \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + c \int_\sigma |u(x)|\, dx .$$

Démonstration. En vertu du lemme 2.1, nous pouvons supposer u de $\mathcal{E}(\overline{\sigma})$. Par la partition de l'unité et les transformations régulières des cartes, tout se ramène au cas, où $\sigma = \{x , |x| < 1 , x_N > 0\} \equiv P_1$ et à l'estimation
$$|u(0)| \leq c \left(\frac{p-1}{p-N}\right)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^N \left(\int_{P_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + c \int_{P_1} |u(x)|\, dx .$$
Nous avons $u(y) - u(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(ty)\, y_i\, dt$, d'où

(3.12) $$\left|u(0) - (\operatorname{mes} P_1)^{-1} \int_{P_1} u(y)\,dy\right| \leq (\operatorname{mes} P_1)^{-1} \int_{P_1} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(ty)\right| |y_i|\, dt\right) dy .$$

Posons ty = z ; nous obtenons de (3.12): $|u(0) - (\operatorname{mes} P_1)^{-1} \cdot$
$$\cdot \int_{P_1} u(y)\,dy| \leq (\operatorname{mes} P_1)^{-1} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+N}} \int_{P_t} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right| |z|\, dz =$$
$$= (\operatorname{mes} P_1)^{-1} \sum_{i=1}^N \int_{P_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right| |z|\, dz \int_{|z|}^1 \frac{dt}{t^{1+N}} \leq \frac{2}{N \operatorname{mes} P_1} \sum_{i=1}^N \int_{P_1} .$$

$$\cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| |x|^{1-N} dx \le c \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_{P_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^1 r^{[(1-N)p/(p-1)]+N-1} dr \Big)^{1-\frac{1}{p}},$$

d'où la démonstration.

Nous utiliserons dans la suite une inégalité, démontrée au travail de l'auteur [13]:

Lemme 3.3. Soit Ω à $\partial\Omega$ lipschitzienne, $f \in W_p^{(\ell)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, ℓ un entier (aussi négatif), ν un entier positif. Alors $\|f\|_{W_p^{(\ell)}} \le c \sum_{|\alpha| = \nu} \|D^\alpha f\|_{W_p^{(\ell-\nu)}} + c\,\|f\|_{W_p^{(\ell-\nu)}}$.

§ 4. Les estimations des dérivées d'ordre $k+1$ dans L_2

Nous démontrerons un lemme étroitement lié aux théorèmes sur la régularité, du travail de l'auteur [14]; cf. aussi M.I. Višik [1] etc. Considérons dans ce paragraphe $m \ge 2$. Pour Ω, un domaine à la frontière lipschitzienne, il est démontré aux travaux de l'auteur [15], [16] l'existence d'une fonction $\sigma(x)$ de $\mathcal{E}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, équivalente à la $dist\,(x, \partial\Omega)$ et d'une suite croissante des sous-domaines Ω_n de Ω, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$, telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, chaque $\partial\Omega_n$ étant indéfiniment continûment différentiable et d'une suite des fonctions $\sigma_n \in \mathcal{E}(\Omega_n) \cap C(\bar{\Omega}_n)$ équivalentes à la $dist\,(\Omega_n, \partial\Omega_n)$, telle que $\sigma_n(x) \longrightarrow \sigma(x)$ pour $x \in \Omega$ et $|D^i \sigma_n| \le c\,|\sigma_n|^{1-|i|}$ avec c indépendant de n. Désignons par $h = (0, \dots 0, \tau, 0, \dots)$ avec τ sur ℓ-ème place. Désignons par $\Delta_h u(x) = \tau^{-1} u(x+h) - \tau^{-1} u(x)$. Nous avons, cf. J. Nečas

[12] ou L. Nirenberg [17]:

Lemme 4.1. Soit Ω un domaine borné, $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, $k \geq 1$, $p \geq 1$. On a $u \in W_p^{(k)}(\Omega) \Longleftrightarrow \Delta_h u \in W_p^{(k-1)}(\Omega')$ pour chaque Ω' avec $|h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$ et avec $\| \Delta_h u \|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} \leq c$. De plus:

$$\| \Delta_h u \|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} \leq c \, \| u \|_{W_p^{(k)}(\Omega)} ,$$

$$\| u \|_{W_p^{(k)}(\Omega)} \leq c \, (\sup_{\Omega} \| \Delta_h (u \|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} + \| u \|_{W_p^{(k-1)}(\Omega)}) ,$$

$$\lim_{r \to \infty} \Delta_h u = \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \quad \text{dans } W_p^{(k-1)}(\Omega') .$$

Voici

Théorème 3. Les conditions (2.18) - (2.21) avec $\lambda = 0$ soient satisfaites. Supposons encore (2.2),(2.5),

$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} (\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}) \rho^{2k} dx \leq c$, $m \geq 2$. Alors pour la solution u du problème (2.12),(2.13) nous avons

$$(4.1) \quad \int_\Omega \rho^{2k} (1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x)|)^{m-2} \sum_{|i| \leq k+1} (D^i u(x))^2 dx \leq c .$$

Démonstration. Posons pour $x \in \Omega_n$: $v(x) = \sigma_m^{2k} \Delta_h u(x)$ et pour $x \notin \Omega_n$: $v(x) \equiv 0$. On a $v \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$. Soit $w \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ avec $dist(supp\, w, \partial\Omega) > 0$. Il suit de (2.12)

$$(4.2) \quad \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} (\int_0^1 a_{ij}(x+th, (1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)) dt) \cdot$$

$$\cdot D^i w(x) D^j \Delta_h u(x) dx + \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} (\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} (x+th, (1-t)D^\alpha u(x) +$$

$$+ tD^\alpha u(x+h)) dt) D^i w(x) dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i w(x) \Delta_h f_i (x) dx .$$

Posons $w = v$,

$$J = \int_\Omega \sigma_m^{2k} \sum_{|i| \le k} \left(\int_0^1 \left(1 + \sum_{\alpha \in M} |(1-t) D^\alpha u(x) + t D^\alpha u(x+h)|\right)^{m-2} dt \right) \cdot (D^i \Delta_h u(x))^2 \, dx \, .$$

Il suit de (4.2) l'inégalité:

$$(4.3) \quad J \le c_1 J^{\frac{1}{2}} \left(\|u\|^{\frac{m}{2}}_{W^{(k)}_m} + \|u\|_{W^{(k)}_m} \right) + c_2 \|u\|^m_{W^{(k)}_m} + c_3 \left(\int_\Omega \sigma_m^{2k} \cdot \sum_{|i| \le k} (\Delta_h f_i(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(J^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{W^{(k)}_m} \right) ,$$

d'où suit

$$(4.4) \quad J^{\frac{1}{2}} \le c_4 \left(\|u\|^{\frac{m}{2}}_{W^{(k)}_m} + \left(\int_\Omega \sigma^{2k} \sum_{|i| \le k} (\Delta_h f_i(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{W^{(k)}_m} \right) .$$

Il en suit, en vertu du lemme de Fatou et du lemme 4.1:

$$\int_\Omega \sigma_m^{2k} \left(1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x)|\right)^{m-2} \sum_{|i| \le k+1} (D^i u(x))^2 dx \le c(n) \, .$$

Si nous laissons tendre $|h| \to 0$ dans (4.4) et après $n \to \infty$, nous obtenons le résultat.

<u>Conséquence 4.1</u>. Sous les conditions du théorème 3 :

$$\int_\Omega \sum_{|i| \le k} \sigma^{\frac{2kN}{N-2}} |D^i u|^{\frac{mN}{N-2}} dx \le c, \quad N \ge 3 ,$$

$$\int_\Omega \sum_{|i| \le k} \sigma^{\frac{2kp}{m}} |D^i u|^p dx \le c, \quad 1 \le p < \infty, \quad N = 2 \, .$$

<u>Conséquence 4.2</u>. On conserve les hypothèses du théorème 3. Alors $\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$, $\ell = 1, 2, \dots, N$, satisfait à l'équation linéaire différentielle:

$$(4.5) \quad \int_\Omega \sum_{|i|, |j| \le k} a_{ij}(x, D^\alpha u) D^i \varphi \, D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell} dx = \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i \varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell} dx - \int_\Omega \sum_{|i| \le k} \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}(x, D^\alpha u) D^i \varphi \, dx \, .$$

En effet, il suffit de faire tendre $\tau \to 0$ dans (4.2): on peut trouver une telle suite $\tau_m \to 0$ que toutes les fonctions sous l'intégrale dans (4.5) convergent presque partout. Si nous tenons compte de ce que les intégrales en question sont équicontinues, ce qui suit de (4.4), nous pouvons faire le passage à la limite dans (4.2).

§ 5. Régularité dans l'intérieure du domaine, le cas m = 2

Désignons par $K_d = \{x, |x| < d\}$, $K(x_0) = \{x, |x-x_0| < d, 2d = dist(x_0, \partial\Omega)\}$, $L(x_0) = \{x, |x-x_0| < 1/2d, d = dist(x_0, \partial\Omega)\}$.

Nous supposons dans ce paragraphe partout (2.1),(2,2),(2,4), (2.6),(2.14),(2.15),(2.16),(2.17a),(2.17b).

Tirons d'abord quelques conséquences des énoncés démontrés au paragraphe 3;

Lemme 5.1. Pour $u \in W_p^{(1)}(K_d)$, $p > N$, on a

$$(5.1)\quad |u(0)| \leq c\, d^{1-\frac{N}{p}} \left(\frac{p-1}{p-N}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{K_d} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + c\, d^{-N} \int_{K_d} |u(x)|\, dx .$$

En effet, nous prenons pour σ de lemme 3.2, la boule unité K_1 ; (5.1) s'obtient par homotétie.

Lemme 5.2. Soit $g \in L_q(K_d)$, $1 < q < \infty$, $0 \leq \ell \leq k-1$. Alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $|i| = \ell$ on a

$$\int_\Omega D^i \varphi\, g\, dx = \int_{K_d} \sum_{|j|=k} D^j \varphi\, g_j\, dx \quad \text{avec}$$

$$(5.2)\quad \|g_j\|_{L_p(K_d)} \leq c\, d^{k-\ell+N/p-N/q} \|g\|_{L_q(K_d)} ,$$

où $1/p \geq 1/q - (k-\ell)/N$ pour $(k-\ell)q < N$ et $1 \leq p < \infty$ pour $(k-\ell)q \geq N$. En effet, on prend de nouveau pour σ du lemme 3.1, la boule unité K_1.

(5.2) s'obtient par homotétie.

<u>Lemme 5.3</u>. Soit $\omega \in W_2^{(K)}(K_d)$, une solution faible de l'équation (3.3) dans K_d. Alors sous les conditions (3.1),(3.2) avec les notations du théorème 2, on a

$$(5.3)\quad \Big(\int_{K_{\frac{d}{2}}} \sum_{|i|=k} |D^i\omega|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2}{(1-\theta)\gamma_1}\gamma_4^{1-\frac{p}{2}}\, c\,\cdot$$

$$\cdot\Big[\Big(\int_{K_d}\sum_{|i|=k}|f_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \gamma_2\Big(\int_{K_d}\sum_{|i|\leq k} d^{2|i|}(D^i\omega)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot d^{-k+N/p-N/2}\Big]$$

pour $2 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$, p satisfaisant à (3.4).

<u>Démonstration</u>. Il suffit de démontrer (5.3) pour d = = 1 et après d'utiliser la transformation x/d = y . Pour ce but, on pose $w = \chi\omega$ avec $\chi \in \mathcal{D}(K_1)$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1/2$. Il suit du lemme 5.2 que w satisfait à l'équation (3.3) avec $g_i \in L_p(K_1)$, pour lesquels $\Big(\int_{K_1}\sum_{|i|=k}|g_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c\Big[\Big(\int_{K_1}\sum_{|i|=k}|f_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} +$

$+\,\gamma_2\Big(\int_{K_1}\sum_{|i|\leq k}(D^i\omega)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]$, d'où et de (3.5) pour K_1 suit l'assertion.

Nous sommes maintenant capables de démontrer aisément:

<u>Lemme 5.4</u>. Soit $\varphi \in D(K(x_0))$, u la solution du problème (2.12),(2.13), alors

$$(5.4)\quad \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(x, D^\alpha u) D^i\varphi\, D^j \frac{\partial u}{\partial x_2} dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i\varphi\, g_i\, dx$$

avec

$$(5.5)\qquad \|g_i\|_{L_{p_0}(K(x_0))} \leq c\, d^{-k} \,,$$

où $dist(x_0, \partial\Omega) = 2d$.

En effet, on part de (4.5), utilise (2.6) et (5.2) pour exprimer $\int_{K(x_o)} \sum_{|i| \leq k} D^i \varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell} dx$ moyenant g_i^* satisfaisant à (5.5). Pour les membres $\int_{K(x_o)} \sum_{|i| = k} \cdot$ $\cdot \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} D^i \varphi \, dx$, on utilise l'estimation (2.15), la conséquence 4.1 et encore une fois (5.2). Pour les membres $\int_{K(x_o)} \sum_{|i|,|j| \leq k} a_{ij} D^i \varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell} dx$, c'est la même chose: on utilise (2.16), la conséquence 4.1 et (5.2). Pour les membres $\int_{K(x_o)} \sum_{|i|,|j| \leq k, |j|=k, |i|<k} a_{ij} D^i \varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_2} dx$, on utilise (2.16),(4.1) et (5.2).

Théorème 4. Sous les conditions mentionnées, pour $N = 2$ et pour la solution u du problème (2.12),(2.13), il existe $p_1 > 2$ de sorte que

(5.6) $\|u\|_{W_{p_1}^{(k+1)}(K(x_o))} \leq c\, d^{-k-1}$, $d = 1/2 \, dist\,(x_o, \partial\Omega)$.

La fonction $D^i u$, $|i| \leq k$ est μ höldérienne avec $\mu = 1 - 2/p_1$ sur chaque compacte de Ω .

Démonstration. L'inégalité (5.6) suit du lemme 5.4, du théorème 2, de l'appartenance de $\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$ dans $W_2^{(k)}(\Omega)$ et du lemme 5.3, utilisé pour p_1 satisfaisant à (3.4), compte tenu de (2.17a),(2.17b). Il faut encore tenir compte du lemme 2.1.

On désigne par $C_\varkappa^{(k)}(\Omega) = \{ u \in C^{(k)}(\Omega)$, $\sup_{d>0} d^\varkappa \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega_d)} < \infty \}$, où $\Omega_d = \{x \in \Omega, dist(x, \partial\Omega) > d\}$.

On a

Conséquence 5.1. Sous les hypothèses du théorème 4,

$u \in C^{k}_{(1+k)}(\Omega)$.

En effet, il suffit de tenir compte de (5.6), de l'appartenance de u dans $W_2^{(k)}(\Omega)$ et de (5.1).

§ 6. Régularité dans l'intérieure du domaine, le cas m>2

Nous obtenons immédiatement:

Lemme 6.1. Soit $f(d)$ une fonction réelle, nonnégative, définie pour $0 < d < d_0$ et telle que pour $d \geq 0$, $\sup_{0<d<d_0} d^{\alpha} f(d) < \infty$. Soit pour $\varkappa \geq 0$, $0 \leq \lambda < 1$, $\alpha \leq \frac{\varkappa}{1-\lambda}$: $f(2d) \leq c_1 d^{-\varkappa} f(d)^{\lambda} + c_2 d^{-\varkappa}$.
Alors pour $\beta \geq \frac{\varkappa}{1-\lambda}$, on a
$\sup_{0<d<d_0} d^{\beta} f(d) \leq c(\beta, \varkappa, \lambda, c_1)$.

Soit $u(\lambda) \in W^{(k)}_{m-\tau k}(\Omega)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau, 0, \ldots, 0)$, $\lambda_1 > 0, \ldots \lambda_\tau > 0$, la solution unique du problème (2.12), (2.13), correspondant aux fonctions $a_i(x, \xi_j, \lambda)$. Supposons dans ce paragraphe: (2.1), (2.2), (2.4), (2.6), (2.18) - (2.21).

Nous avons avec les notations du paragraphe 2:

Lemme 6.2. Pour $u(\lambda)$:

(6.1a) $\int_\Omega V^{m-(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k} dx \leq c(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau-1})$,

(6.1b) $\int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|)^{m-(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k} dx \leq c(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1}), N = 2$.

En effet, pour $u(\lambda)$, on a $\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i(u - u_0) f_i \, dx = \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i(u - u_0) a_i(x, D^j u, \lambda) dx$, d'où et de (2.18) suit

$$(6.2)\int_\Omega V^{-(r-1)h} V_{\lambda_r}^{-h} \sum_{i\in M} |D^i u|^m dx \le c(\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1})(\|u\|^m_{W_m^{(k)}} + 1 +$$

$$+\|u_0\|_{W_m^{(k)}} (\int_\Omega V^{-(r-1)h} V_{\lambda_r}^{-h} \sum_{i\in M} |D^i u|^m dx)^{1-\frac{1}{m}} + \|u-u_0\|_{W_2^{(k)}} \sum_{|i|\le k} \|f_i\|_{L_2});$$

maintenant, il faut utiliser la remarque 2.1, d'où et de (6.2) suit, compte tenu de l'inégalité de Young: $ab = \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{p'}(\varepsilon^{-1} b)^{p'}$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$: $\int_\Omega V^2 dx \le c(\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1})(1 + \|u_0\|^m_{W_m^{(k)}} + (\int_\Omega V^2 dx)^{\frac{1}{2}} \sum_{|i|\le k} \|f_i\|_{L_2} + \sum_{|i|\le k} \|f_i\|_{L_2} \|u_0\|_{W_2^{(k)}})$,

d'où $(\int_\Omega V^2 dx)^{\frac{1}{2}} = c(\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1})$, alors il suit de (6.2) l'assertion.

On obtient encore

Lemme 6.3. Pour $u(\lambda)$, $N = 2$:

$$(6.3)\int_\Omega \rho^{2k} V^{m-2-(r-1)h} V_{\lambda_r}^{-h} \sum_{|i|\le k+1} (D^i u(\lambda))^2 dx \le c(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{r-1}).$$

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du théorème 3. On sait d'après ce théorème que (6.3) est valable avec $c(\lambda)$. Maintenant, on pose avec $u = u(\lambda)$:

$$J = \int_\Omega 6_m^{2k} (\int_0^1 (1 + \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|)^{m-2-(r-1)h} \cdot$$

$$\cdot (1 + \lambda_r \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|)^{-h} dt \sum_{|i|\le k} (D^i \Delta_h u(x))^2 dx.$$

Si nous notons dans cette démonstration $V = 1 + \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|$ et $V_{\lambda_r} = 1 + \lambda_r \sum_{\alpha\in M} |(1-t)D^\alpha u(x) + tD^\alpha u(x+h)|$, nous obtenons pour J l'inégalité

$$(6.4)\quad J \le c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})[J^{\frac{1}{2}}\int_{\Omega_m}(\int_0^1 V^{m-2-(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k}dt)\sum_{|\alpha|\le k+1}\cdot$$

$$\cdot(D^\alpha\Delta_h u)^2dx)^{\frac{1}{2}}+\int_{\Omega_m}(\int_0^1 V^{m-2(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k}dt)\sum_{|\alpha|\le k-1}(D^\alpha\Delta_h u)^2dx+$$

$$+J^{\frac{1}{2}}(\int_{\Omega_m}(\int_0^1 V^{m-(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k}dt)dx)^{\frac{1}{2}}+(\int_{\Omega}(\int_0^1 V^{m-2-(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k}dt)\cdot$$

$$\cdot\sum_{|\alpha|\le k-1}(D^\alpha\Delta_h u)^2dx)^{\frac{1}{2}}\cdot\int_{\Omega_m}(\int_0^1 V^{m-(\tau-1)k} V_{\lambda_\tau}^{-k}dt)dx+$$

$$+J^{\frac{1}{2}}(\int_{\Omega_m}\sum_{|i|\le k}(\Delta_h f_i)^2dx)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+(\int_{\Omega_m}\sum_{|\alpha|\le k-1}(D^\alpha\Delta_h u)^2dx)^{\frac{1}{2}}\cdot(\int_{\Omega_m}\sum_{|i|\le k}(\Delta_h f_i)^2dx)^{\frac{1}{2}}]\ .$$

Après avoir utilisé $2ab \le \varepsilon^2a^2+\frac{1}{\varepsilon^2}b^2$, nous obtenons de 6.4 une estimation pour J . On peut faire tendre $\tau \to 0$, ($h = (0,\dots,\tau,0,\dots,0)$) et l'on obtient en vertu du lemme de Fatou et du lemme 6.2, du lemme 2.1 et de (6.1b) finalement (6.2) avec σ_m . Après, il suffit de faire tendre $m \to \infty$.

Désignons par $W^{(k)}_{\infty,\varkappa} = \{u, \sup_{d>0}\|u\|_{W^{(k)}_\infty(\Omega_d)}\cdot d^{\varkappa}<\infty\}$.

__Lemme 6.4__. Supposons $u(\lambda)\in W^{(k)}_{\infty,\varkappa}(\Omega)$ et désignons par $A_d = 1+\|u\|_{W^{(k)}_\infty(\Omega_d)}$. Alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$, on a

$$(6.5)\int_{K(x_0)}\sum_{|i|\le|j|\le k} a_{ij}(x,D^\alpha u,\lambda)D^i\varphi D^j\frac{\partial u}{\partial x_\ell}dx = \int_{K(x_0)}\sum_{|i|\le k} D^i\varphi\, q_i\, dx$$

avec $\|q_i\|_{L_{p_0}(K(x_0))} \le c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})d^{-k}A^{m-2}$.

__Démonstration__. Partons de (4.5). On raisonne maintenant comme dans la démonstration du lemme 5.4: pour l'intégrale $\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\le k} D^i \varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\, dx$, c'est la même chose. Pour $\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\le k} \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} D^i \varphi\, dx$; on estime $\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\right| \le c A_d^{m-2} V$, utilise la conséquence 4.1 avec m = 2 , ce qui découle de (6.3) et l'inégalité (5.2). Pour les autres intégrales, on procède comme dans la démonstration du lemme 5.4, tenant compte de (6.3), et utilisant l'estimation $|a_{ij}| \le c V^{m-2}$, c.q.f.d.

Lemme 6.5. Si $u(\lambda) \in W^{(k)}_{\varkappa,\infty}(\Omega)$, il existe $\gamma_5(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) > 0$ de sorte que pour $p = 2 + \gamma_5 A_d^{2-m+(\tau-1)k}$:

(6.6) $$\|u(\lambda)\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \le c(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-k-1} A_d^{m-2} .$$

En effet, cela suit du lemme précédent et du lemme 5.3, appliqué sur $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \cdot A_d^{m-2-(\tau-1)k}$, compte tenu du lemme 6.2 et 6.3 et de la conséquence 4.1.

Lemme 6.6. Supposons $u(\lambda) \in W^{(k)}_{\varkappa,\infty}(\Omega)$ avec $\varkappa = \frac{2(1+k)}{1-\frac{k}{2}}$, N = 2 . Alors en posant $\|u\|_{W^{(k)}_{\varkappa,\infty}(\Omega)} = \sup_{0<d} d^{\varkappa} \|u\|_{W^{(k)}_{\infty}(\Omega_d)}$ on a

(6.7) $$\|u(\lambda)\|_{W^{(k)}_{\varkappa,\infty}(\Omega)} \le c(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\tau-1}) .$$

Démonstration. Posons $m(x) = (1 + \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha(u(\lambda)))^2)^{\frac{m}{4} - \tau\frac{k}{4}}$. Il suit de (6.3) et (6.1):

(6.8) $$\|m\|_{W_2^{(1)}(K(x_0))} \le c(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-k} .$$

Maintenant, on tire de (6.6):

(6.9) $$\left(\int_{L(x_0)} \left(\left|\frac{\partial m}{\partial x_1}\right|^p + \left|\frac{\partial m}{\partial x_2}\right|^p\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} \le c(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-k-1} A_d^{3(\frac{m}{2}-1)}$$

Soit $1/p_1 = a/p + b/2$, $a+b=1$, $0 < a < 1$. Nous obtenons de (6.8),(6.9):

$$(6.10)\ \Big(\int_{L(x_0)} \big(\big|\frac{\partial m}{\partial x_1}\big|^{p_1} + \big|\frac{\partial m}{\partial x_2}\big|^{p_1}\big)dx\Big)^{\frac{1}{p_1}} \leq c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})d^{-k-1}A_d^{2a(\frac{m}{2}-1)} .$$

Nous avons avec γ_5 du lemme 6.5:

$$(6.11)\qquad p_1 \geq 2 + a\gamma_5 A_d^{2-m+(\tau-1)k} .$$

Il suit de (6.1)

$$(6.12)\qquad \frac{1}{d^2}\int_{L(x_0)} |m(x)|dx \leq c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})d^{-1} ,$$

alors il s'ensuit de l'inégalité (5.1), utilisée pour $L(x_0)$ et de (6.10) - (6.12):

$$(6.13)\ |m(x_0)| \leq c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})a^{-1}d^{-k-1}A_d^{3a(\frac{m}{2}-1)+(m-2-(\tau-1)k)\frac{1}{2}} .$$

Maintenant, il suit de (6.8) et du lemme 2.1:

$$(6.14)\qquad \Big(\int_{K(x_0)} |m(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})d^{-k+\frac{2}{q}-1} .$$

Avec un $q > 2$ fixé. Il en suit avec $\mu = m/2 - \tau k/2$:

$$(6.15)\ \Big(\int_{K(x_0)} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^{\mu q}dx\Big)^{\frac{1}{\mu q}} \leq c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})d^{(-k+\frac{2}{q}-1)\frac{1}{\mu}} .$$

Etant évidemment, en vertu du lemme 2.1:

$$(6.16)\ \Big(\int_{K(x_0)} \sum_{|\alpha|\leq k-1} |D^\alpha u(x)|^s dx\Big)^{\frac{1}{s}} \leq c(s,\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})$$

pour $1 \leq s < \infty$, on tire de (6.15),(6.16) et de (5.1) finalement

$$(6.17)\quad \big(1 + \sum_{|\alpha|\leq k-1} |D^\alpha u(x_0)|\big)^{\mu} \leq c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{\tau-1})d^{-(1+k)} .$$

(6.17) étant évident pour $|\alpha| < k-1$, en vertu du lemme 2.1, on obtient de (6.13),(6.17) finalement:

$$A_{2d}^{\frac{m}{2}-\tau\frac{h}{2}} \leq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})a^{-1}d^{-k-1}A_d^{\frac{m}{2}-(\tau-1)\frac{h}{2}-1+2a(m-2)} ,$$

d'où $A_{2d} \leq c(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})a^{-\frac{1}{\mu}}d^{-\frac{1+k}{\mu}}A_d^{1-(1-\frac{h}{2})\frac{1}{\mu}+\frac{2a(m-2)}{\mu}}$, $\mu = \frac{m}{2}-\tau\frac{h}{2}$.

Si nous prenons a tel que $1 - h/2 + 2a(m-2) =$ $= (1/2)(1-h/2)$, nous obtenons du lemme 6.1 l'assertion.

<u>Théorème 5</u>. Soit $m > 2$, $N = 2$, u la solution du problème (2.12),(2.13). On suppose (2.1),(2.2),(2.4),(2.6), (2.18) - (2.21). On pose $\sigma = [\frac{m}{2}]$, $h = \frac{m-2}{\sigma}$, $d = 1/2$ $dist(x_0, \partial\Omega)$, $L(x_0) = \{x, |x-x_0| < (1/2)d\}$, $A_d = 1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega_d)}$, $\Omega_d = \{dist(x,\partial\Omega) > d\}$. Alors

$$\|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega_d)} \leq c\, d^{-\frac{2(1+k)}{1-\frac{h}{2}}} , \tag{6.18}$$

il existe $c_1 > 0$ de sorte que si $p = 2 + c_1 A_d^{2-m}$, alors

$$\|u\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leq c\, d^{-k-1-\frac{2(1+k)(m-2)}{1-\frac{h}{2}}} , \tag{6.19}$$

et

$$u \in C^{(k),\mu}(\bar\Omega_d), \quad \mu = 1 - 2/p . \tag{6.19'}$$

<u>Démonstration</u>. Prenons $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\sigma)$ avec $\lambda_1 > 0,\dots,\lambda_\sigma > 0$. On a $m - \sigma h = 2$, alors d'après la conséquence 5.1, $u(\lambda) \in W_{\infty,\varkappa}^{(k)}(\Omega)$ avec $\varkappa = \frac{2(1+k)}{1-\frac{h}{2}}$. Faisons tendre $\lambda_{\sigma,m} \to 0$. En vertu de (6.1),(6.3), de la remarque 2.1 et du lemme 2.1, l'en-

semble $u(\lambda_1,\dots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma,n})$ est compact dans $W_m^{(k)}(\Omega')$ pour chaque $\bar{\Omega}'\subset\Omega$. Nous pouvons alors trouver une soussuite (on la note encore λ_{σ_n} et on pose $\lambda^n=(\lambda_1,\dots,\lambda_{\sigma_n})$, $u_n=u(\lambda_1,\dots,\lambda_{\sigma_n})$) convergeant vers un w dans $W_m^{(k)}(\Omega')$ et $D^\alpha u_n\to$ $\to D^\alpha w$, $|\alpha|\le k$ presque partout dans Ω. Nous avons pour $M\subset\Omega'$:

$$\int_M |a_i(x,D^\gamma u_n,\lambda^n)|\,dx\le c\int_M V^{m-1}dx\le c(\Omega')\mu(M)^{\frac{1}{m}}\ .$$

Nous pouvons alors faire le procédé limite dans (2.12), Mais il suit de (6.1) et du lemme de Fatou que $w\in$ $\in W^{(k)}_{m-(\tau-1)h}$ et encore il suit de (6.1) qu'on peut supposer $u_n\rightharpoonup w$ (la convergence faible dans $W^{(K)}_{m-\tau h}$). Cela entraîne 2.13. En vertu de l'unicité de la solution du problème u en question, $w=u(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{\sigma-1},0)$. Mais il suit de 6.7 que $u(\lambda_1,\dots,\lambda_{\sigma-1},0)\in W^{(K)}_{\infty,\varkappa}(\Omega)$. Il suffit maintenant appliquer notre raisonnement à $u(\lambda_1,\dots,\lambda_{\sigma-1,n},0)$ et l'on obtient finalement pour la solution u

$$\|u\|_{W^{(K)}_{\infty,\varkappa}}\le c\ . \tag{6.20}$$

Pour u, on a (4.5) et le lemme (6.4), d'où (6.6). Mais il suit de (6.6) et de (6.20) l'inégalité (6.19); d'autre part, en vertu du lemme 2.1: $u\in C^{(K)}_{\varkappa}(\Omega)$, d'où (6.18) et (6.19)'.

§ 7. Régularité dans l'intérieure du domaine, le cas $1 < m < 2$.

Soit $u(\lambda) \in W_2^{(K)}(\Omega)$, $0 < \lambda \leq 1$, la solution unique du problème (2.12),(2.13), correspondant aux coefficients $a_i(x, \xi_j, \lambda)$. Nous supposerons dans ce paragraphe les conditions (2.1).(2.3),(2.5),(2.7), (2.22) - (2.25).

Lemme 7.1. Pour $u(\lambda)$:

(7.1a) $$\int_\Omega V^m V_\lambda^{2-m} dx \leq c ,$$

(7.1b) $$\int_\Omega (1+\sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|)^m V_\lambda^{2-m} dx \leq c ,$$

(7.2) $$\int_\Omega \varphi^{2k} V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|=k+1} (D^i u(\lambda))^2 dx \leq c , \quad N = 2 .$$

Démonstration. On a $\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i(u - u_0) f_i \, dx =$

$= \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i(u-u_0) a_i(x, D^j u, \lambda) \, dx$, d'où et de (2.22) il suit: $\int_\Omega V_\lambda^{2-m} V^m dx \leq c(1+\|u_0\|_{W_2^{(K)}} (\int_\Omega V_\lambda^{2-m} V^m dx)^{\frac{1}{2}} +$

$+\|u_0\|_{W_m^{(K)}} \sum_{|i|\leq k} \|f_i\|_{L_{m'}} + (\int_\Omega V_\lambda^{2-m} V^m dx)^{\frac{1}{m}} \sum_{|i|\leq k} \|f_i\|_{L_{m'}} + (\int_\Omega V^m V_\lambda^{2-m} dx)^{\frac{2-m}{2}})$,

d'où, compte tenu de l'inégalité de Young et de la remarque 2.1, suit (7.1). Pour obtenir (7.1b), il faut tenir compte de l'inégalité, valable pour N = 2 :

(7.3) $$\| u \|_{W^{(k-1)}_{\frac{2m}{2-m}}} \leq \| u \|_{W_m^{(K)}} .$$

Pour démontrer (7.2), il suffit de s'appercevoir, qu'on peut placer $\varphi = \sigma^{2k} \frac{\partial u}{\partial x_\ell}$ dans (4.5) (nous savons de (4.1) que $\sigma^{2k} \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$).

Si nous posons $J=\int_\Omega \sigma^{2k} V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|i|\le k+1} (D^i u)^2 dx$, nous obtenons de (4.5): $J \le c\, J^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha u)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} +$

$$+\, c\int_\Omega V^{m-2} V_\lambda^{2-m} \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha u)^2 dx + c\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_\Omega \sum_{|i|\le k} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right|^{m'} dx\right)^{\frac{1}{m'}} + c\, J^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega V^m dx\right)^{\frac{2-m}{2m}} \left(\int_\Omega \sum_{|i|\le k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right)^{m'} dx\right)^{\frac{1}{m'}} +$$

$$+\, c\, J^{\frac{1}{2}} \int_\Omega V^m \cdot V_\lambda^{2-m} dx + c\int_\Omega V^{m-1} V_\lambda^{2-m} \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u|\, dx \ ;$$

il faut maintenant tenir compte de (7.1),(7.1b) et de (7.3), d'où suit (7.2).

Nous avons avec la notation du lemme 6.4:

__Lemme 7.2__. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$, on a (N = 2) :

$$(7.4)\quad \int_{K(x_0)} \sum_{|i|,|j|\le k} a_{ij}(x, D^\alpha u, \lambda) D^i\varphi D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell} dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|\le k} D^i\varphi\, g_i\, dx$$

avec

$$(7.5)\qquad \| g_i \|_{L_{m'}(K(x_0))} \le c\, d^{-k} A_d^{2-m} \ .$$

__Démonstration__. On part de (4.5). On raisonne maintenant comme dans la démonstration du lemme 5.4: pour l'intégrale $\int_{K(x_0)} \sum_{|i|\le k} D^i\varphi \dfrac{\partial f_i}{\partial x_\ell} dx$, c'est la même chose. Pour

$$(7.6)\qquad \int_{K(x_0)} \sum_{|i|\le k} \frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} D^i\varphi\, dx$$

on utilise $\left|\dfrac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\right| \le c\, V^{m-1} A_d^{2-m}$, alors $\left(\int_{K(x_0)} \left|\dfrac{\partial a_i}{\partial x_\ell}\right|^{m'} dx\right)^{\frac{1}{m'}} \le c\, A_d^{2-m}$; pour estimer les intégrales $\int_{K(x_0)} \sum_{|i|+|j|<2k} a_{ij} D^i\varphi D^j \dfrac{\partial u}{\partial x_\ell} dx$, on utilise l'inégalité (2.24), (7.2), le lemme 5.2 au cas $|j| = k$ et pour le cas $|j| < k$, on utilise l'estimation

$$|a_{ij}|\,|D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}| \le c\,|D^j \frac{\partial u}{\partial x_\ell}| \le c\,A_d^{2-m}(1+\sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha u|)^{m-1}$$

et on raisonne comme pour (7.6), en utilisant pour $|i| < k$ le lemme 5.2.

Nous obtenons maintenant

Lemme 7.3. Il existe $\gamma_6 > 0$ de sorte que pour $p = 2 + \gamma_6 A_d^{m-2}$:

$$(7.6) \qquad \|u(\lambda)\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \le c\,d^{-k-1} A_d^{2(2-m)} .$$

En effet, cela suit du lemme précédent et du lemme 5.3, appliqué sur $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 A_d^{m-2}$, $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2$, compte tenu de (7.1) et de (7.2).

Nous avons maintenant

Lemme 7.4. Soit $\varkappa := \dfrac{2(1+k)}{m-1}$. Alors pour $u(\lambda)$ en question $\|u(\lambda)\|_{C_\varkappa^{(k)}(\Omega)} \le c$.

Démonstration. Posons $m(x) = (1+\sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha u(x))^{\frac{m}{4}}$.

Il suit de (7.1a),(7.1b) et (7.2) que

$$(7.7) \qquad \|m\|_{W_2^{(1)}(K(x_0))} \le c\,d^{-k} .$$

Nous avons avec p du lemme précédent (avec γ_6 assez petit)

$$(7.8) \quad \left(\int_{L(x_0)} (|\frac{\partial m}{\partial x_1}|^p + |\frac{\partial m}{\partial x_2}|^p)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le c\,d^{-k-1} A_d^{2(2-m)} .$$

Soit $1/p_1 = a/p + b/p$, $a + b = 1$, $a > 0$. Nous obtenons de (7.8) et (7.7):

$$(7.9)\quad \left(\int_{L(x_0)} \left(\left|\frac{\partial m}{\partial x_1}\right|^{r_1} + \left|\frac{\partial m}{\partial x_2}\right|^{r_1}\right) dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq c\, d^{-k-1} A_d^{2a(2-m)} .$$

Puis, nous tirons de (7.1)

$$(7.10)\qquad d^{-2}\int_{L(x_0)} |m(x)|\, dx \leq c\, d^{-1} \quad ;$$

alors, on tire de l'inégalité (5.1) et de (7.9),(7.10):

$$(7.11)\quad |m(x_0)| \leq c\, d^{-k-1} a^{-1} A_d^{(2-m)\frac{1}{2} + 3a(2-m)} ,$$

d'où

$$(7.12)\qquad A_{2d}^{\frac{m}{2}} \leq c\, d^{-k-1} a^{-1} A_d^{1-\frac{m}{2} + 3a(m-2)} .$$

Si nous posons $a = \dfrac{m-1}{6(2-m)}$, nous obtenons

$A_{2d} \leq c\, d^{-\frac{2(1+k)}{m}} a^{-\frac{2}{m}} A_d^{1-\frac{m-1}{m}}$, d'où en vertu du lemme 6.1 suit facilement l'assertion.

Nous avons finalement

<u>Théorème 6</u>. Soit $1 < m < 2$, $N = 2$, u la solution du problème (2.12),(2.13). On suppose (2.1),(2.3), (2.5),(2.7),(2.22) - (2.25). On pose $d = (1/2)\,dist\,(x_0, \partial\Omega)$, $L(x_0) = \{x, |x - x_0| < (1/2)d\}$, $\Omega_d = \{x, dist\,(x,\partial\Omega) > d\}$, $A_d = 1 + \|u\|_{C^{(k)}(\overline{\Omega}_d)}$.

Alors

$$(7.12')\qquad \|u\|_{C^{(k)}(\overline{\Omega}_d)} \leq c\, d^{-\frac{2(1+k)}{1-m}} .$$

Il existe $c > 0$ de sorte que si $p = 2 + c\, A_d^{2-m}$, alors

(7.13) $\quad \|u\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leq c\, d^{-(1+k)-\frac{4(1+k)(2-m)}{m-1}}$

et

(7.14) $\quad u \in C^{(k),\mu}(\overline{\Omega}_d)$ avec $\mu = 1 - 2/p$.

Démonstration. D'après le théorème 4, on a $u(\lambda) \in$ $\in C_{\varkappa}^{(k)}(\Omega)$ avec $\varkappa = \dfrac{2(1+k)}{1-m}$. Mais il suit de (7.6) et du lemme 7.4 que

(7.15) $\|u(\lambda)\|_{W_p^{(k+1)}(L(x_0))} \leq c\, d^{-(1+k)-4(1+k)(2-m)/(m-1)}$.

Il en suit, qu'on peut trouver une suite $\lambda_n \to 0$ telle que $u(\lambda_n) \longrightarrow w$ dans $W_m^{(k)}(\Omega')$ pour chaque $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, $D^\alpha u(\lambda_n) \longrightarrow D^\alpha w$, $|\alpha| \leq k$ presque partout dans Ω . On peut faire le passage à la limite $\lambda_n \to 0$ dans (2.12) et de supposer que $u(\lambda_n) \rightharpoonup w$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$ et dans $W_p^{(k+1)}(\Omega_d)$. En vertu de l'unicité de la solution du problème en question, w = u et l'on tire de (7.15) l'inégalité (7.13). Ceci nous donne (7.14), d'où (7.12) en vertu du lemme 7.4.

§ 8. Régularité jusqu'à la frontière, m ≥ 2, N = 2

Nous supposons dans ce paragraphe $\partial\Omega$ indéfiniment continument différentiable, (2.1),(2.8),(2.9),(2.26) - - (2.29) et la condition:

(8.1) (2.26) - (2.29) sont invariantes par rapport à la transformation orthonormale des cartes.

Nous pouvons décrire la frontière $\partial\Omega$ au voisinage du chaque point de $\partial\Omega$ à l'aide d'une fonction indéfiniment continûment différentiable . Pour fixer les idées, nous supposons définie une telle fonction dans un système de cartes cartésiennes (que notons encore x):

(8.2) $\quad x_N = a(x'),\ x' = (x_1, \dots, x_{N-1}),\ |x'| \leq r \quad ,$

avec a de $\mathcal{E}(\overline{K}_r)$ ($K_r = \{x', |x'| < r\}$) . Supposons que les points $|x'| \leq r,\ a(x') < x_N < a(x') + r$ appartiennent dans Ω , tandis que les points $|x'| \leq r$, $a(x') - r < x_N < a(x')$ sont hors de Ω , et désignons l'ensemble $|x'| < r,\ a(x') < x_N < a(x') + r$ par V_r . Supposons que $\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}(0)\right)^2 = 0$.

Dans V_r , définissons "les dérivées dans la direction parallèle à $\partial \Omega$ ": pour $x \in V$, ce seront les dérivées au plan orthogonale à la direction

$\left(-\frac{\partial a}{\partial x_1}(x'), \dots, -\frac{\partial a}{\partial x_{N-1}}(x'),\ 1\right)$. Pour fixer les idées, nous choisissons ces directions en prenant pour elles:

$$\nu_\ell = \left(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, \frac{\partial a}{\partial x_\ell}(x')\right),\ \ell = 1, 2, \dots, N-1 .$$

Posons $H(x) = \sum_{|i| \leq k} \sum_{\ell=1}^{N-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}(D^i u) + \frac{\partial}{\partial x_N}(D^i u)\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\right)^2$.

Lemme 8.1. Soit $\mu \geq 2$ et $u(\mu)$ la solution du problème (2.12),(2.13), correspondant au paramètre μ . Supposons que $u(\mu) \in C^{(K)}(\overline{\Omega}) \cap W_2^{(K+1)}(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega V^\mu dx \leq c , \tag{8.1a}$$

$$\int_\Omega V^{\mu-2} H dx \leq c . \tag{8.1b}$$

Démonstration. (8.1a) suit immédiatement de (2.26). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(V_r)$ et définissons pour

$x \in V_k : h(x) = (0, \dots, 0, \tau, 0, \dots, 0, a(x'+h') - a(x'))$

avec τ sur l -ème place et $h' = (0, \dots, 0, \tau, 0, \dots, 0)$.

Nous avons d'après (2.12)

$$\frac{1}{\tau} \int_\Omega \sum_{|i| \le k} (D^i\varphi(x+h(x)) - D^i\varphi(x))\, a_i(x, D^j u(x), \mu)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_\Omega \sum_{|i| \le k} (D^i\varphi(x+h(x)) - D^i\varphi(x))\, f_i(x)\, dx$$

et par le passage à la limite $\tau \to 0$, on obtient:

$$(8.2) \quad \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_N} \frac{\partial a}{\partial x_l}\right) a_i(x, D^j u, \mu)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_N} \frac{\partial a}{\partial x_l}\right) f_i\, dx \;.$$

L'intégration par parties nous donne

$$(8.3) \quad \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i\varphi\, a_{ij} D^j \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx + \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i\varphi\, a_{ij} D^j\left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \frac{\partial a}{\partial x_l}\right) dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta| \le k} D^\alpha\varphi\, b_\alpha a_\beta\, dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \le k} D^\alpha\varphi\, a_{\alpha\beta} D^\gamma u\, d_\gamma\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D_i\varphi \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\, dx + \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D_i\varphi \frac{\partial a_i}{\partial x_N} \frac{\partial a}{\partial x_l}\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D_i\varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_l}\, dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|, |\beta| \le k} D^\alpha\varphi\, c_\alpha f_\beta\, dx \quad ,$$

où $b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathcal{E}(\overline{\Omega})$. En vertu de l'hypothèse que $u \in C^{(k)}(\overline{\Omega}) \cap W_2^{(k+1)}(\Omega)$, nous pouvons prendre $\varphi \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et spécialement: $\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial x_l} - \frac{\partial u_0}{\partial x_N} + \right.$

$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} - \frac{\partial u_0}{\partial x_N}\right) \frac{\partial a}{\partial x_l}\right) \gamma_k^{2k}$. Nous obtenons de (8.3), si nous posons $J = \int_\Omega \gamma_k^{2k} V^{k-2} H\, dx$: $J = c\, J^{\frac{1}{2}} + c$,

d'où $J \le c$ et d'où l'assertion.

__Lemme 8.2.__ Supposons toujours $u(\mu) \in C^{(k)}(\overline{\Omega}) \cap$

$\cap\ W_2^{(K+1)}(\Omega)$. Alors pour r assez petit

$$(8.4)\ \int_\Omega \gamma_r^{2k} V^{2(\mu-2)} \left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_N^{K+1}}\right)^2 dx \leq c(r)(1+\|u\|_{C^{(K)}(\Omega)})^{\mu-2} .$$

Démonstration. Désignons par $\omega(r) = \max_{x\in \overline{K}_r} \sum_{i=1}^{N-1} \left|\frac{\partial a}{\partial x_i}\cdot (x')\right|$, $(0,\dots,0,k-1) = \nu$, $\overline{\nu} = (0,\dots, 0, k)$, $\overline{\overline{\nu}} = (0,\dots,0,k+1)$

et posons $g(x) = \frac{\partial}{\partial x_N}(\gamma_r^k a_{\overline{\nu}}(x, D^\alpha u))$. Pour $|\alpha| = k-1$, $\alpha \neq \nu$, nous avons pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(8.5)\qquad \int_\Omega D^\alpha \varphi\, g\, dx = \int_\Omega D^\beta \varphi \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\gamma_r^k a_{\overline{\nu}})dx$$

avec $\ell \leq N-1$. Pour $\alpha = \overline{\nu}$, on a d'après (2.12):

$$(8.6)\ \int_\Omega D^{\overline{\nu}}(\varphi\gamma_r^k)\, a_{\overline{\nu}}\, dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k,\alpha\neq\nu} a_\alpha D^\alpha(\varphi\gamma_r^k)dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha(\varphi\gamma_r^k) f_\alpha\, dx .$$

Il suit maintenant de (8.1), compte tenu des inégalités (2.26) - (2.29) et du lemme 3.3, en posant $J = \int_\Omega \gamma_r^{2k} V^{2(\nu-2)} \cdot (D^{\overline{\nu}} u)^2 dx$:

$$J^{\frac{1}{2}} \leq c_1\omega(r) J^{\frac{1}{2}} + c_2(r)(1+\|u\|_{C^{(K)}(\overline{\Omega})})^{\frac{\mu}{2}-1} ,$$ d'où 8.4.

On a évidemment:

<u>Conséquence 8.1.</u> Pour $u(\mu)$ on a

$$(8.7)\ \int_\Omega V^{2(\mu-2)} \sum_{|\alpha|\leq k+1} (D^\alpha u)^2 dx \leq c(1+\|u\|_{C^{(K)}(\overline{\Omega})})^{\mu-2} ,$$

$$(8.8a)\left(\int_\Omega V^{(\mu-1)p} dx\right)^{1/p} \leq c(1+\|u\|_{C^{(K)}(\overline{\Omega})})^{\frac{\mu}{2}-1},\ N=2,\ 1\leq p<\infty ,$$

$$(8.3b)\quad \Big(\int_\Omega V^{(\mu-1)\frac{2N}{N-2}}dx\Big)^{\frac{N-2}{2N}} \le c\,(1+\|u\|_{C^{(\kappa)}(\bar\Omega)})^{\frac{\mu}{2}-1}, \quad N \ge 3 .$$

<u>Lemme 8.3</u>. Supposons $u(\mu) \in C^{(\kappa)}(\bar\Omega) \cap$ $\cap\, W_2^{(k+1)}(\Omega)$. Alors il existe $\gamma_5 > 0$ de sorte que pour $p = 2 + \gamma_5 (1+\|u\|_{C^{(\kappa)}(\bar\Omega)})^{2-\mu}$, on a

$$(8.9)\quad \Big(\int_\Omega V^{p(\mu-2)}\sum_{|\alpha|\le k+1}|D^\alpha u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le c\,(1+\|u\|_{C^{(\kappa)}(\bar\Omega)})^{3(\frac{\mu}{2}-1)}.$$

<u>Démonstration</u>. Dans V_n , posons $\omega = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big)\gamma_n^k$. Il suit de (8.3), où nous posons pour $\varphi : \varphi\gamma_n^k$ que ω satisfait à l'équation linéaire, à savoir en vertu de (8.1),(8.7),(8.8) et du lemme 3.1 que

$$(8.9)'\quad \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}\, D^i\varphi\, D^j\omega\, dx = \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D^i\varphi\, q_i\, dx$$

avec

$$\|q_i\|_{L_{p_0}(\Omega)} \le c\,(1+\|u\|_{C^{(\kappa)}(\bar\Omega)})^{\frac{\mu}{2}-1} .$$

Nous utilisons maintenant le théorème 2 pour $w = \omega - \gamma_n^k\Big(\frac{\partial u_0}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u_0}{\partial x_N}\frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big)$ et en obtenons, en posant $\tilde\gamma_1 = \gamma_1$, $\tilde\gamma_2 = \gamma_2(1+\|u\|_{C^{(\kappa)}(\bar\Omega)})^{\mu-2}$ l'inégalité

$$(8.10)\qquad \|\omega\|_{W_p^{(\kappa)}} \le c(\kappa)(1+\|u\|_{C^{(\kappa)}(\bar\Omega)})^{\frac{\mu}{2}-1} .$$

Maintenant, on procède comme dans la démonstration du lemme 8.2:

posons $g(x) = \frac{\partial}{\partial x_N} \left(\gamma_\kappa^{k} a_{\bar{\jmath}} \left(x, D^\alpha u, \mu\right)\right)$.

Il suit maintenant de (8.5),(8.6),(8.10),compte tenu des inégalités (2.26),(2.29) et du lemme 3.3,en posant $J = \int_\Omega \gamma_\kappa^{kp} V^{p(\mu-2)} |D^{\bar{\jmath}} u|^p dx$:

$$(8.11) \qquad J^{\frac{1}{p}} \le c_1 \omega(\kappa) J^{\frac{1}{p}} + c_2(\kappa)(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{3(\frac{\mu}{2}-1)}$$

d'où, en vertu de (8.10) suit finalement (8.9).

Lemme 8.4. Supposons $u(\mu) \in C^{(k)}(\bar{\Omega}) \cap W_2^{(k+1)}(\Omega)$, $N = 2$. Alors

$$(8.12) \qquad \|u(\mu)\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})} + \|u(\mu)\|_{W_2^{(k+1)}(\Omega)} \le c$$

et il existe $q > 2$ tel que

$$(8.13) \qquad \|u(\mu)\|_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} \le c .$$

Démonstration. Soit $m(x) = (1 + \sum_{|\alpha| = k} (D^\alpha u(\mu))^2)^{\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}}$

Il suit de (8.7) que

$$(8.14) \qquad \|m\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \le c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{\frac{\mu}{2}-1}$$

Il s'en suit de (8.9) et de (8.8) que

$$(8.15) \qquad \|m\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \le c(1 + \|u\|_{C^{(k)}(\bar{\Omega})})^{3(\frac{\mu}{2}-1)}$$

avec $p = 2 + \gamma_5 (1 + \|u\|_{C^{(k)}(\Omega)})^{2-\mu}$. Soit $1/p_1 = a/p + b/2$, $a + b = 1$, $1 < a < 0$. On obtient $p_1 \ge 2 + a\gamma_5 (1 + \|u\|_{C^{(k)}(\Omega)})^{2-\mu}$. Il suit de (8.14), (8.15) et du lemme 3.2:

$$(8.16)\quad \Big(1+\sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\bar\Omega)}\Big)^{\mu-1} \leq c\,\big(1+\|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)}\big)^{\frac{3}{2}(\frac{\mu}{2}-1)+3a(\frac{\mu}{3}-1)} \cdot a^{-1}.$$

D'autre part, en vertu de (8.1): $1+\|u\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)} \leq c\,(1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\bar\Omega)})$, alors il en suit en vertu de (8.16), si nous posons $a = \frac{1}{3\mu}$:

$$(8.17)\qquad \|u(\mu)\|_{C^{(k)}(\bar\Omega)} \leq c\ .$$

(8.12) suit d'ici et de (8.7); (8.13) suit de (8.9).

<u>Théorème 7</u>. Soit Ω un domaine borné à frontière indéfiniment continûment différentiable, N = 2 et les hypothèses (2.1),(2.8), (2.9),(2.26) - (2.29), (8.1) soient valables. Alors la solution u du problème de Dirichlet (2.12),(2.13) appartient à $W_{p_0}^{(k+1)}(\Omega)$ avec $p_0 > 2$, donc à $C^{(k),\mu}(\Omega)$ avec $\mu = 1 - 2/p_0$.

<u>Démonstration</u>. Considérons d'abord le cas m = 2 . Soit $a_i(x, \xi_i, t) = (1-t)\,\delta_{ij}\,\xi_j + t\,a_i\,(x, \xi_j)$ pour $0 \leq t \leq 1$ avec $\delta_{ij} = 0$ pour $|i| + |j| < 2k$ et $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $|i| = |j| = k$. Evidemment, les conditions (2.26) - (2.29) sont valables uniformément par rapport à t ; soit u(t) la solution du problème (2.12),(2.13). Pour t = 0 , l'assertion est vrai en vertu des théorèmes bien connus pour les équations linéaires cf. par exemple [10]. Désignons par N , l'ensemble des t pour lesquels (8.13) est valable avec $q = p_0$. N est fermé: si $t_n \to t_0$ et pour les t_n (8.13) est valable, il en suit, en vertu

du lemme 2.1, que $u(t_n)$ est un ensemble compacte dans $W_m^{(K)}(\Omega)$. On peut en tirer une suite, encore notée $u(t_n)$, telle que $u(t_n) \to u$ dans $W_m^{(K)}(\Omega)$. Il en suit en vertu de l'unicité de la solution du problème pour t que $u(t_0) = u$, d'où l'énoncé. N est ouvert: en effet, soit $t_0 \in N$ et désignons par A l'opérateur de $[W_{p_0}^{(1)}(\Omega)]^{\varkappa}$ dans $W_{p_0}^{(K+1)}(\Omega)$, où $\varkappa$ est le nombre des indices $|i| \leq k$, donnant la solution du problème. Soit $V =$ $= \{u, u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(K)}(\Omega)\}$ et désignons par B l'opérateur de $W_{p_0}^{(K+1)}(\Omega)$ dans $W_{p_0}^{(1)}(\Omega)$, défini par $(t_0 - t)\cdot a_i(x, D^j u) + (t - t_0)\sum_{|j|=k} \delta_{ij} D^j u$.

Soit $U_1 = \{u \in W_{p_0}^{(K+1)}(\Omega) \cap V, \|u - u(t_0)\|_{W_{p_0}^{(K+1)}} \leq 1\}$.

L'opérateur $ABu + u(t_0)$ pour $|t - t_0|$ assez petit transforme U_1 dans lui même. D'autre part, il est faiblement continu: $W_{p_0}^{(K+1)}$ étant un espace réflexif, séparable, on peut utiliser le théorème de Schauder "faible", cf. J. Schauder [21], d'où l'existence du point fixe u. Evidemment u = u(t). Il faut encore voir que l'estimation (8.13) est valable avec $q = p_0$. Mais cette estimation est valable avec q du lemme précédent. Il en suit que les coefficients a_{ij} dans (8.9)' sont hölderiennes. Il suit alors du travail [10] que $\|\omega\|_{W_p^{(K+1)}} \leq c$. Mais l'application du procédé, basé sur le lemme 3.3 comme audessus nous donne finalement l'estimation "à priori" (8.13) avec p_0. Il en suit que

$N = \langle 0, 1 \rangle$, d'où la démonstration au cas $m = 2$. Si $m > 2$, considérons $\mu \in \langle 2, m \rangle$ et les solutions $u(\mu)$. Mais pour $\mu = 2$ l'assertion est vrai. Maintenant, on raisonne comme audessus, en posant pour $B = a_i(x, D^j u, \mu_0) - a_i(x, Du, \mu)$, d'où la démonstration.

Remarque. Sous les hypothèses mentionnées et encore avec $a_{ij} = a_{ji}$ pour $|i| = |j| = k$, on peut démontrer par la même méthode, avec les modifications correspondantes au paragraphe 7, le théorème 7 pour $1 < m < 2$.

Bibliographie

[1] M.I. VIŠIK: Quasilinear strongly elliptic system of differential equations having divergence form (en russe),Trudy Mosk.Mat.Obšč.12,1963,125-184.

[2] F.E. BROWDER: Problèmes non linéaires,Séminaire de mathématiques supérieures,1965,Presse de l'Université de Montréal,1966.

[3] J. LERAY - J.L. LIONS: Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder,Sém.sur les équat.part.,Collège de France 1964.

[4] E. De GIORGI: Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari,Mem.Accad.Sci.Torino,3,1957,25-43.

[5] Ch.B. MORREY: Existence and differentiability theorems for the solutions of variational problemes for multiple integrals,Bull.Amer.Math.Soc. 46,1940,439-458.

[6] Ch.B. MORREY: Multiple integrals in the calculus of variations,Springer 1966.

[7] O.A. LADYŽENSKAJA - N.N. URALCEVA: Linějnyje i kvazilinějnyje uravněnija elliptičeskogo tipa, Moscou 1964.

[8] J. NEČAS: Proceedings of Equadiff II,Bratislava 1966.

[9] J. NEČAS: Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires d'ordre 2k en deux dimensions; Annali Scuola Norm.Sup.Pisa,XXI,fasc.III, 1967,427-457.

[10] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I,Comm.Pure Appl.Math.Vol.XII,623-727,1959.

[11] A. ZYGMUND: Trigonometrical series,Cambridge 1959.

[12] J. NEČAS: Les méthodes directes en théprie des équations elliptiques,Prague 1967.

[13] J. NEČAS: Sur les normes equivalentes dans $W_p^{(K)}$ et sur la coercitivité des formes formellement positives,Sémin.Math.Sup.Montréal 1965,Presse de l'Université Montréal 1966.

[14] J. NEČAS: Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique;l'existence et la régularité des solutions,CMUC Prague,7 1966,301-317.

[15] J. NEČAS: Sur les domaines du type N (en russe), Czechoslovak Mathematical Journal 12,1962, 274-287.

[16] J. NEČAS: Sur une méthode pour resoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique,voisine de la variationnelle,Ann.Scuola Sup.Pisa 16,1962,305-326.

[17] L. NIRENBERG: Remarks on strongly elliptic partial differential equations.Comm.Pure Appl.Math.8, 1955,648-674.

[18] G. STAMPACCHIA: Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,Collège de France,Sém.équat.part.,1963-1964.

[19] J. NEČAS: Les équations elliptiques non linéaires, L'école d'été,Tchécoslovaquie 1967,à paraitre dans Časopis pro pěst.matem.1968.

[20] E. BULEY: The differentiability of solutions of certain variational problems for multiple integrals,Technical Report 16,University of Berkeley,1960.

[21] J. SCHAUDER: Der Fixpunktsatz in Funktionalräume, Studia Math.II,1930,171-180.

[22] N.G. MEYERS: On L_p estimates for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations,Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa 17, 1963,189-206.

[23] E. De GIORGI: Un esempio di estremali discontinue

per un problema variazionale di tipo ellittico,Boll.U.M.I.Vol.I(1968),135-137.

[24] E. GIUSTI - M. MIRANDA: Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni,Boll.U.M.I. Aprile 1968,ser.2,num.2,219-226.

[25] Ch.B. MORREY: Partial Regularity Results for Non-Linear Elliptic Systems,J.Mathemat.Mechanics,Vol.17,num.7(1968),649-670.

(Received August 3, 1968)