Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Jaroslav Nešetřil

K-хроматические графы вез циклов длины ≤ 7

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 3, 373--376

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105070

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

7,3 (1966)

K - ХРОМАТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ БЕЗ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ ≤ 7

Ярослав НЕШЕТРИЛ (Jaroslav Nešetřil), Прага

В работах [1] и [2] доказано, что существуют конечные графы с производным хроматическим числом n без циклов длины ≤ 5. В этой заметке покажем, что для каждого натурального n существует конечный граф G без циклов длины ≤ 7 такой, что хроматическое число G больше чем n. Во всей статье придерживаемся определений и обозначений из [3]. Рассматриваемые здесь графы неориентированы.

Граф G задан, если дано непустое множество X и множество ребер $R \subset X \times X$, что записываем в виде $G = (X, R)$. Пусть дальше $|G|$ число точек G, $\gamma(G)$ хроматическое число G. Множество $I \subset X$ называется независимым в графе $G = (X, R)$, если $I \times I \cap R = \emptyset$. Через $J(G, k, n)$ обозначим систему всех независимых множеств в графе G, для окрашения которых требуется при любом раскрашении G n-цветами не меньше чем k-цветов.

<u>Теорема</u>. К каждому натуральному ℓ существует граф G_ℓ такой, что $\gamma(G_\ell) \geq \ell$ и G_ℓ не содержит циклов длины ≤ 7.

Сначала докажем

<u>Лемма 1</u>. Если $k < n$, k, n натуральные, и граф G такой, что $\gamma(G) = n$ и $\mathcal{J}(G, k, n) \neq \emptyset$, то существует граф $\tilde{G}$ такой, что $\mathcal{J}(\tilde{G}, k+1, n) \neq \emptyset$.

<u>Доказательство</u>: Построим $\tilde{G} = (\tilde{X}, \tilde{R})$ и $\tilde{I} \in (\tilde{G}, k+1, n)$. Пусть $I \in \mathcal{J}(G, k, n)$, $G = (X, R)$, $|I| = a$, $|G|^{|I|} = b$. Пусть $G_i = (X_i, R_i)$ $i = 1,..,b$, $G'_j = (X'_j, R'_j)$ $j = 1,..,a$ представляют копии графа G, так что X_i, X'_j, R_i, R'_j все попарно непересекаются. Пусть $I_i \in \mathcal{J}(G_i, k, n)$ и $|I_i| = |I|$ $i = 1,..,b$. Пусть $I_i = \{y_{i,j} \mid j = 1,..,a\}$. Пусть φ отображение множества $A = \{1, 2,..,a\}$ в $\bigcup_{j=1}^{a} X'_j$ такое, что $\varphi(j) \in X'_j$ для всех $j = 1, 2,.., a$. Множество всех таких отображений обозначим Φ. Ясно что $|\Phi| = b$. Элементы Φ обозначим $\varphi_1, .., \varphi_b$. Положим $\tilde{X} = (\bigcup_{i=1}^{b} X_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{a} X'_j)$, $\tilde{I} = \bigcup_{i=1}^{b} I_i$, $\tilde{R} = R^* \cup (\bigcup_{i=1}^{b} R_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{a} R'_j)$, где R^* определено следующим образом: $(u, v) \in R^*$ тогда и только тогда если $u = \varphi_i(j)$, $v = y_{i,j}$. Очевидно, $\tilde{I}$ есть независимое множество, и $\gamma(\tilde{G}) \geq n$. Допустим, что $\gamma(\tilde{G}) = n$ и $\tilde{I} \in \mathcal{J}(\tilde{G}, k, n)$, $\tilde{I} \notin \mathcal{J}(\tilde{G}, k+1, n)$. Потом существует окрашение $\tilde{G}$ n красками так, что на $\tilde{I}$ появится точно k-красок. Те же самые краски появятся на каждом I_i, $i = 1,..,b$. Пусть одна из этих красок α. α должна появиться при украшении любого G'_j, $j = 1,.., a$ в точке, скажем, $\tilde{x}'_j$. Положим $\tilde{\varphi}(j) = \tilde{x}_j$. Ясно что $\tilde{\varphi} \in \Phi$ и $\tilde{\varphi} = \varphi_{i_0}$. Учитывая определение R^*, мы видим, что на I_{i_0} не может появиться краска α. Противоречие. Необходимо $\tilde{I} \in \mathcal{J}(\tilde{G}, k+1, n)$. G_i, G'_j представляют графы без циклов длины ≤ 7 и длина циклов содержащих ребра из R^* не

меньше 8 (по крайней мере 4 ребра принадлежат R^* и тоже 4 ребра I_i и $I_{i'}$, так как I_i, $I_{i'}$ независимые множества). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если G граф без циклов длины ≤ 7, $\gamma(G)=n$ и $\mathcal{J}(G,n,n)\neq\emptyset$, то существует граф $\overline{G}$ без циклов длины ≤ 7 такой, что $\gamma(\overline{G})>n$.

Доказательство: $\overline{G}$ построим при помощи конструкции описаной в статье [1]. Пусть $I\in\mathcal{J}(G,n,n)$, $|I|=c$, $\binom{n(c-1)+1}{c}=d$. Пусть $G_i=(X_i\,,R_i)$ $i=1,\dots,d$ копии графа G, все X_i, R_i попарно непересекаются. Пусть $I_i\in\mathcal{J}(G_i,n,n)$, $|I_i|=|I|$, $i=1,\dots,d$. Пусть $I_i=\{\psi_{i,j}$, $j=1,\dots,c\}$. Пусть ψ взаимно однозначное отображение множества $B=\{1,2,\dots,c\}$ в множество N, $|N|=n(c-1)+1$. Множество всех таких отображений обозначим Ψ. Ясно, что $|\Psi|=d$. Элементы Ψ обозначим $\psi_1,\dots,\psi_d$. Пусть $\overline{G}=(\overline{X},\overline{R})$, где $\overline{X}=N\cup(\bigcup_{i=1}^{d}X_i)$ и $\overline{R}=R_0\cup(\bigcup_{i=1}^{d}R_i)$, где R_0 определено следующим способом: $(u,v)\in R_0$ тогда и только тогда, если $u=\psi_i(j)$, $v=\psi_{i,j}$. Пусть $\gamma(\overline{G})=n$. Потом существует по крайней мере c точек $a_1,a_2,\dots,a_c$ из N, окрашенных одинаковой краской, скажем α. Пусть $\tilde{\psi}(j)=a_j$, потом $\tilde{\psi}\in\Psi$ и $\tilde{\psi}=\psi_{i_0}$. В силу определения R_0, на I_{i_0} не может появиться краска α. Противоречие. Отсутствие в $\overline{G}$ циклов длины ≤ 7 следует из независимости I_j. Лемма 2 доказана.

Теперь докажем теорему. Для $\ell=1$ она верна. Одна точка представляет пример G_1. Предполагая верность теоремы для $\ell > 1$ построим $G_{\ell+1}$. В силу леммы 1 ($\Im(G,1,n) \neq \emptyset$ для каждого G) существует граф $\tilde{G}$ такой, что $\Im(\tilde{G},n,n) \neq \emptyset$, или $\gamma(\tilde{G}) > n$. Если ограничимся случаем $\Im(\tilde{G},n,n) \neq \emptyset$ и $\gamma(\tilde{G}) = n$, то из леммы 2 следует опять существование $\tilde{G}$ и $\gamma(\tilde{G}) > n$. Теорема доказана.

Литература

[1] B. DESCARTES: K-chromatic graphs without triangles, Amer.Math.Monthly, v.61(1954), 353.

[2] J.B. KELLY, L.M. KELLY: Paths and circuits in critical graphs, Amer.J.Math., v.76(1954) 786-792.

[3] К. БЕРЖ: Теория графов и ее применения, Москва-Издательство иностранной литературы, Москва 1962.

(Received May 23, 1966)